Тема 1. СИСТЕМА ОТЧЕТА. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Известны 4 механики:

1. Классическая механика И. Ньютона (соответствующая большим массам, т. е. массам, неизмеримо большим массы элементарных частиц и малым скоростям, т. е. скоростям, неизмеримо меньшим скорости света);
2. Релятивистская механика — теория относительности А. Эйнштейна (большие массы, большие скорости);
3. Квантовая механика (малые массы, малые скорости);
4. Релятивистская квантовая механика (малые массы, большие скорости).

Они полностью согласуются между собой «на стыках»

Далее мы будем рассматривать только классическую механику и сопротивление материалов в параллельном изложении.

Еще раз отметим *границы применимости* **классической механики:**

— объекты должны быть макроскопические**;**

— скорости точек объектов должны быть малыми по сравнению со скоростями света в вакууме;

— влияние на механическое движение других процессов (тепловых, химических и т. д.) должно отсутствовать.

Меха́ника (греч. *μηχανική* — искусство построения машин) раздел физики, наука, изучающая механическое движение материальных тел и их взаимодействие.

Сопротивление материалов — инженерное учение, изучающее «азбуку» и «грамматику» расчетов напряженно — деформированного состояния деформируемых твердых тел, с целью оценки их прочности и жесткости и устойчивости.

Прочность — способность тел воспринимать воздействие внешних сил до некоторого предела, не разрушаясь.

Жесткость — способность тел воспринимать воздействие внешних сил до некоторого предела, существенно не деформируясь.

Механическое движение — изменение положения объектов в пространстве с течением времени, т. е. движение всегда происходит относительно пространства и времени.

«Время и пространство составляют как бы вместилище самих себя и всего существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве — в смысле порядка расположения» **(Ньютон)**.

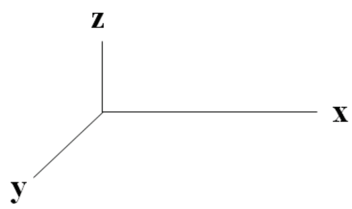
«***Абсолютное пространство*** по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

То есть модель абсолютного пространства представляет собой трехмерную, безотносительно неподвижную, сплошную, однородную, изотропную среду, состоящую из бесконечного либо конечного числа точек, расстояние между которыми не изменяется. Причем свойства абсолютного пространства не зависят от тел и процессов, находящихся в пространстве.

«***Абсолютное*, истинное, математическое *время*** по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Оно однородно, метризуемо, бесконечно, меняется одинаково во всех точках пространства в направлении увеличения. Свойства времени не зависят от свойств пространства и поведения тел, находящихся в нем

Совокупность абсолютного пространства и времени составляет **абсолютную систему отсчета и обозначается**:



Очень важны и пояснения самого Ньютона. *Относительное пространство* — есть некоторая подвижная часть абсолютного пространства, которая определяется нашими чувствами по положению некоторых тел и которые в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное.

«*Относительное,* кажущееся или обыденное *время* — есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершенная при посредстве какого либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как то: час, день, месяц, год». Например, солнечные сутки в действительности не равны и только принимаются за равные промежутки.

Ньютон, еще не используя координаты, применял понятие «место» и расстояние точек друг от друга. «Место» по Ньютону, «есть часть пространства, занимаемого телом».

Движение — перемещение тела из одного места в другое. То есть *механическое движение* можно трактовать, как происходящее во времени последовательное совпадение точек тела с точками пространства. «Свойство движения состоит в том, что части, сохраняющие постоянное положение по отношению к целому, участвуют в движении этого целого».

Покой — есть пребывание тела в... одном и том же месте.

«Свойство *Истинного* покоя состоит в том, что тела истинно покоящиеся находятся в покое и друг относительно друга». Если предположить, что в этой системе всегда найдется хотя бы одно неподвижное тело (не изменяющее своего положения относительно точек пространства — закрепленного к его точкам) и назвать его *телом отсчета*, то механическое движение тел можно рассматривать как происходящее по отношению к телу отсчета.

Ньютон отмечал: «Может оказаться, что не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих».

Введение тела отчета является просто удобным приемом, не отрицающее понятие «место» по Ньютону. Фактически определенная часть абсолютного пространства, т. е. место, называют телом отсчета.

Удобство состоит в том, что к телу отсчета может быть закреплена система координат (декартовая, сферическая, цилиндрическая и т. д.) в которой удобно описывать движение математическими методами. Тело отсчета и координатная система не являются системой отсчета, а только ее дополнением. Любая система отчета, связанная ли с Землей, звездами и т. п., строго говоря, не является абсолютной в понимании Ньютона. Однако, как подчеркивал Ньютон, во многих аспектах относительное пространство принимается за неподвижное.

На рис. 1 показана система отсчета с дополнениями.

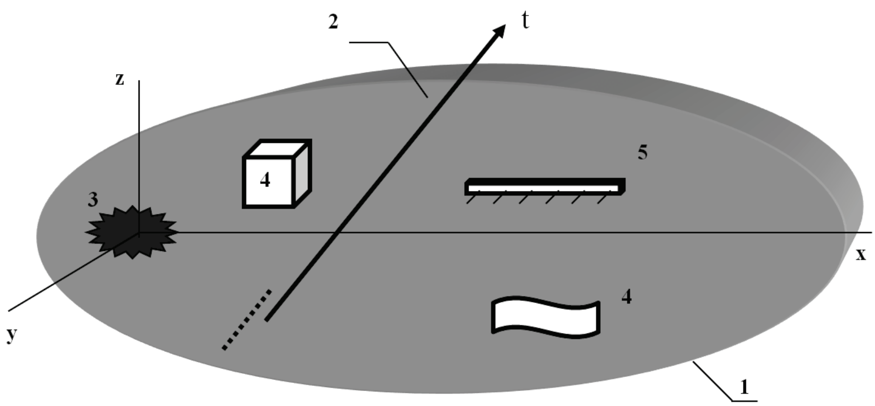


Рис. 1. Система отсчета с дополнениями

1 — абсолютное пространство (на рисунке оно ограничено);
2 — абсолютное время (условно показана ось времени t);
3 — тело отсчета;
4 — движущиеся объекты (тела);
5 — объект находится в состоянии покоя (закреплен к точкам пространства);
x, y, z — оси координат.

Пространство и время в классической механике рассматриваются как первичные «абсолютные» понятия и считаются независимыми друг от друга.

Фактически Ньютон идеализировал понятие пространства и времени, абстрагируясь от их реальных свойств, данных нам в ощущениях. Здесь уместно замечание Л. Эйлера: «Всякий, кто склонен отрицать существование абсолютного пространства, приходит в величайшее смущение. В самом деле, вынужденный отбросить абсолютный покой и движение, как пустые слова, лишенные смысла, он должен будет не только отбросить законы движения, покоящиеся на этом принципе, но и допустить, что вообще не может быть никаких законов движения... пришлось бы утверждать, что все происходит случайно и без всяких причин».

Тема 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Масса (*количество материи*) — есть мера материи, устанавливаемая пропорционально плотности и объему тела. Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу. В современной терминологии: *масса* — это мера количества вещества, пропорциональная его плотности и объему.

Масса является также мерой инерции тела. Латинское слово *inertia* означает «лень», «косность». Изолированная материальная точка (т. е. такая, действием на которую всех прочих тел можно пренебречь) как бы ленится изменить свое состояние. Для того чтобы изменить это состояние, нужна какая-то внешняя причина, называемая силой.

Ф. Энгельс писал: «Механика: точкой отправления для нее была инерция».

Величина силы инерции пропорциональна массе. Поэтому масса является мерой инерции.

Геометрическая точка — объект, лишенный пространственной ориентации, размеров и массы.

Материальная точка — это геометрическая точка наделенная массой.

Механическая система материальных точек — такая их совокупность, при которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех других точек, входящих в систему.

«Механика», с греческого, в буквальном переводе означает «хитрость, ухищрение». С некоторыми хитростями мы уже столкнулись выше. Например, точка — это тело, лишенное ориентации и размеров, а тело — это механическая система точек. Или понятия абсолютного пространства и времени. На практике тоже можно только удивляться такой хитрости, как применение рычага при подъеме груза, когда меньшее одолевает большее. Очередные хитрости ждут нас и в дальнейшем. В частности, для математического описания явлений в механике потребовалось введение количественной меры механического взаимодействия материальных объектов. Это сила.

Сила — *векторная* мера механического взаимодействия материальных тел, характеризующая интенсивность и направленность действия одного тела на другое. Размерность сосредоточенной в точке силы — ньютон (Н). На схемах изображается направленным отрезком. Величина отрезка в некотором масштабе означает значение силы по модулю, направление совпадает с направлением действия силы. Линия, содержащая данный отрезок, называется *линией действия силы* (см. рис. 2).

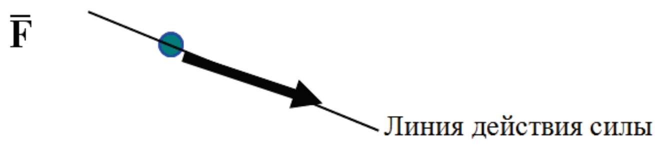


Рис. 2. Сила в точке

Две абстракции — материальная точка и сила, приложенная в точке. Сосредоточенная в точке сила $\overline{F}$ оправдана при условии, что, либо площадь, либо размер линии контакта пренебрежимо малы по отношению к размерам контактируемых тел. Реально, взаимодействие объектов происходит в основном через непосредственный контакт, как показано на рис. 3.

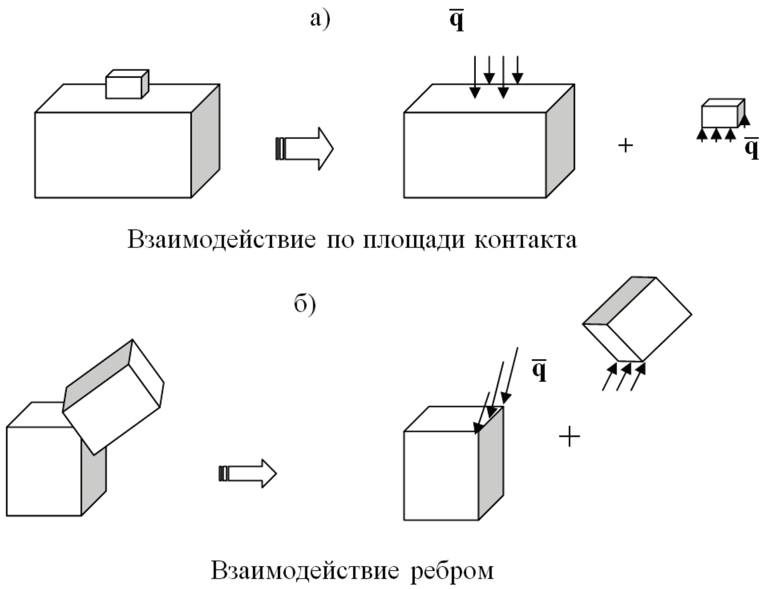


Рис. 3

Очевидно, что в приведенных на рис. 3 примерах, систему сил взаимодействия правильнее задавать как нагрузку, т. е. силу, распределенную по площади (пример *а*) и по линии контакта (пример *б*). Тогда интенсивность нагрузки q имеет размерность н/м^2 и н/м соответственно.

Существует понятие сил, распределенных по объему. Например, удельный вес — сила тяжести, действующая на каждый элементарный объем тел. Размерность интенсивности нагрузки — н/м^3.

Классификация сил и их систем производится по многим признакам. Различают:

— силы *внешние* — действующие на материальные точки объекта со стороны других материальных объектов;

— силы *внутренние* — действующие между материальными точками объекта. Внутренние силы для конкретного объекта являются внешними для его частей. Например, сила, действующая в тросе механической системы: грузовая лебедка — трос — груз, является внешней для лебедки и груза.

И еще одна «хитрость» механики. Понятие внутренних сил, обеспечивающих целостность любой механической системы, вполне ясно. Однако количественное определение этих сил, изначально действующих в механической системе (при отсутствии внешних сил), возможно только теоретически (с точки зрения материаловедения внутренние силы количественно определены для каждого вида материала).

Данная проблема решается следующим образом. В расчетах сопротивления материалов под *внутренними* силами понимаются не собственно они, а *их приращения,* возникающие при действии на тело внешних сил. В частности, оценка *прочности* (способности тел воспринимать действие внешних сил не разрушаясь) строится на оценке величины именно этих приращений.

Меру внутренних сил называют *механическим напряжением.*

Для изучения механических напряжений в точке деформируемого тела через точку мысленно проводят сечение и отбрасывают одну часть тела. Действие отброшенной части на оставшуюся часть заменяют внутренними силами.

Если на малый элемент сечения площадью dS, выделенный в окрестности т. A, действует внутренняя сила $d\bar{\mathbf{F}}$, то предел отношения $\lim_{ds\to 0} d\bar{\mathbf{F}}/dS = \bar{p}$ называется вектором *полного механического напряжения* в т. A (см. рис. 4). Размерность полного напряжения н/м^2 = Па — паскаль.

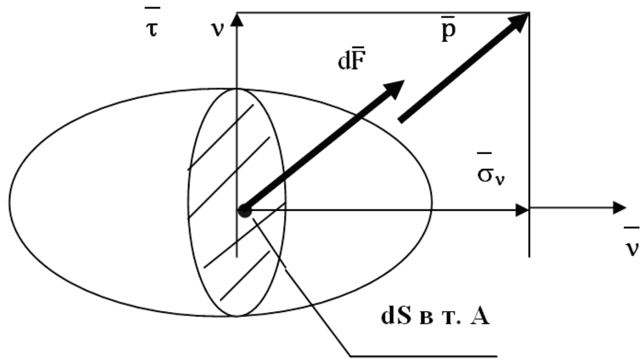


Рис. 4

Составляющие вектора $\bar{\mathbf{p}}$ по нормали $\bar{\upsilon}$ к сечению и по касательной к нему называются соответственно *нормальным* $\overline{\sigma_{\upsilon}}$ (сигма) и *касательным* $\overline{\tau_{\upsilon}}$ (тау) механическим напряжением в точке А по площадке dS (рис. 4). Нормальные напряжения будем считать положительными, если их направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке.

Напряженным состоянием в точке тела называется совокупность всех векторов механических напряжений на множестве сечений (площадок), проходящих через точку.

Можно показать, что совокупность нормальных и касательных напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, проведенных через точку тела, позволяет определить напряжения на любой площадке общего положения. Таким образом, шесть компонентов напряжений σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{xz} полностью определяют напряженное состояние в точке тела (см. рис. 5) и образуют *тензор напряжений*:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} & \boldsymbol{\tau_{xy}} & \boldsymbol{\tau_{xz}} \\ \boldsymbol{\tau_{yx}} & \boldsymbol{\sigma_y} & \boldsymbol{\tau_{yz}} \\ \boldsymbol{\tau_{zx}} & \boldsymbol{\tau_{zy}} & \boldsymbol{\sigma_z} \end{vmatrix} = \mathbf{T_н}$$

По теореме о парности касательных напряжений:

на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны по величине и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

Т. е. $\tau XZ = \tau ZX$, $\tau XY = \tau YX$, $\tau YZ = \tau ZY$.

Из данного Закона следует, что тензор напряжений Тн содержит только шесть независимых компонент напряжений, определяющих напряженное состояние в точке деформированного тела, заполненного сплошной средой.

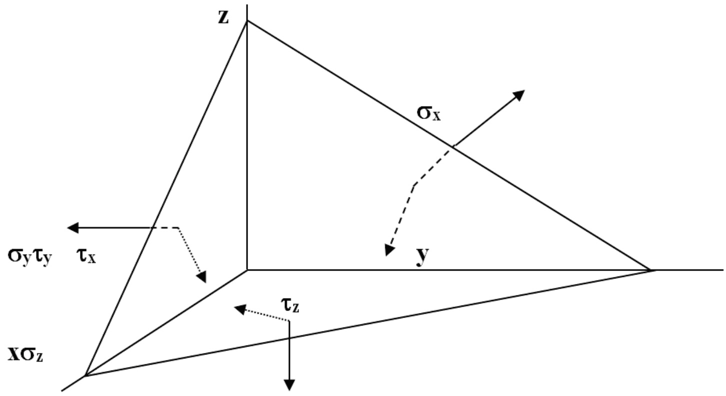


Рис. 5

Продолжим классификацию сил:

1. Силы *постоянные* — не изменяющиеся в течение всего времени действия;

2. Силы *временные;*

3. Силы *статические* — нагружая объект, растут достаточно медленно, от нуля до конечной величины, достигнув которой либо не изменяются, либо изменяются медленно и незначительно. При этом пренебрежимо малы ускорения материальных точек объекта;

4. Силы *динамические* — действие которых вызывает существенные ускорения материальных точек объекта и которые в свою очередь подразделяются на:

— *внезапно приложенные* — нагружают объект сразу всей своей величиной (рис. 6.);

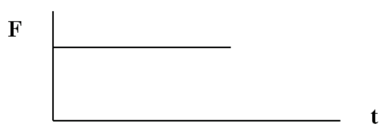


Рис. 6

— *повторно-переменные* — нагружение может многократно повторятся по некоторому циклу (циклические) или случайным образом (случайные), как показано на рис. 7;

Рис. 7

— *ударные* — характеризуются резким изменением скоростей соударяемых тел.

5. Силы *реактивные (реакции связей)* **—** выражающие действие накладываемых на материальный объект внешних и внутренних связей;

6. Силы *активные* — обычно задаваемые силы, вызывающие изменение параметров движения объектов и возникновение реакций связей.

Системой сил называется совокупность каких-либо сил, действующих на материальный объект.

Плоская система сил — вектора сил лежат в одной плоскости.

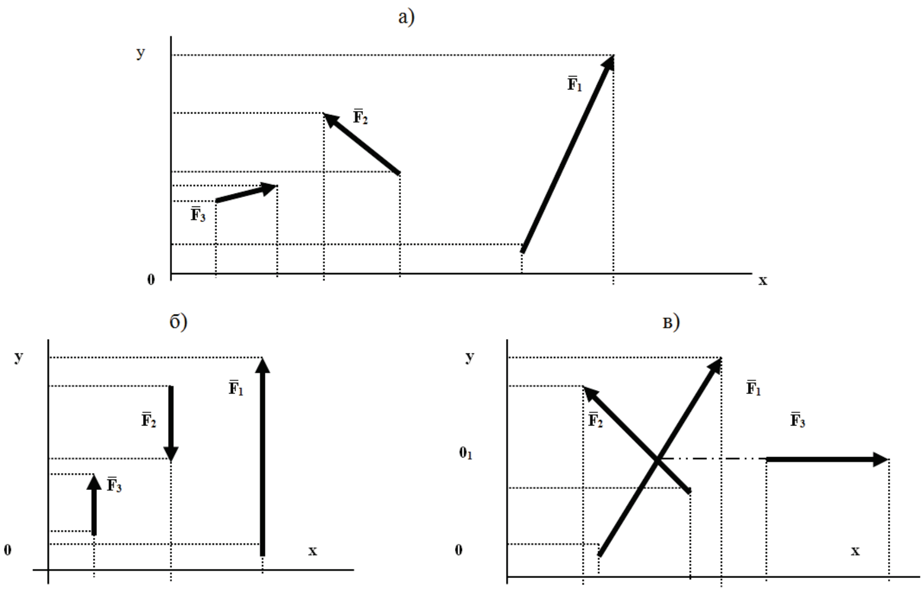
Пространственная система сил — вектора сил не лежат в одной плоскости.

Произвольная система сил — вектора сил произвольно расположены в пространстве либо в одной плоскости.

Параллельная система сил — линии действия всех сил расположены параллельно друг другу в пространстве либо в одной плоскости.

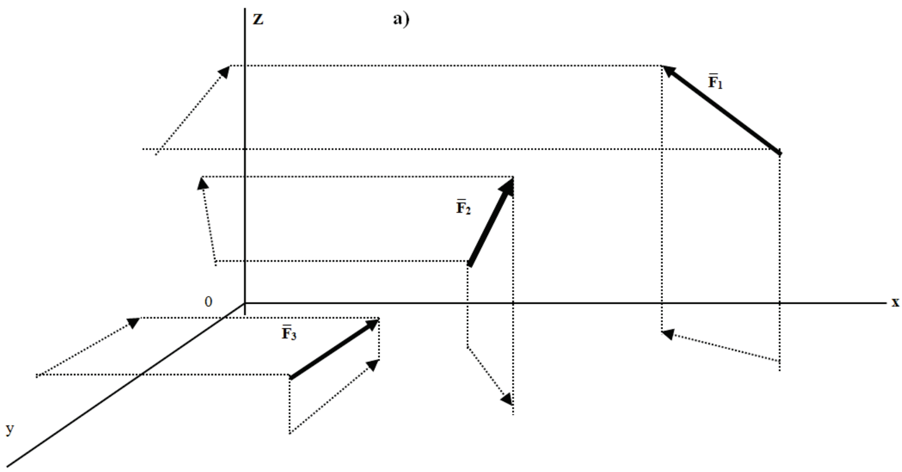
Сходящаяся система сил — линии действия всех сил пересекаются (сходятся) в одной точке пространства либо плоскости.

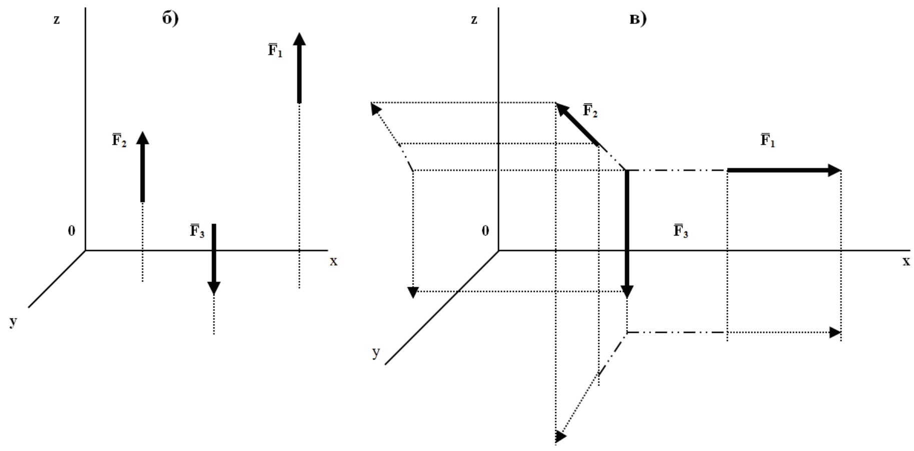
Системы сил показаны на рис. 8. и 9.



а) произвольная; б) параллельная; в) сходящаяся

Рис. 8. Плоская система сил





а) произвольная; б) параллельная; в) сходящаяся

Рис. 9. Пространственная система сил

«*Приложенная сила* есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Сила проявляется только в действии, и по прекращении действия в теле не остается…».

«*Врожденная сила* материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно представлено самому себе, весьма вразумительно названа “*силой инерции*”. Эта сила проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии».

Эквивалентными называют системы сил, которые, действуя по отдельности, вызывают одно и то же кинематическое состояние механической системы, либо возникновение одинаковых реакций связей.

Под *кинематическим состоянием* механической системы понимают совокупность скоростей и ускорений ее точек.

Если системе сил эквивалентна одна сила, то она называется *равнодействующей* — оказывающей ровно такое же действие, как вся система сил. Причем, равнодействующая имеет конкретную точку приложения, т. е. вектор закрепленный. Система сил, эквивалентная нулю, является *уравновешенной.*

Абсолютно твердое тело — механическая система, расстояние между любыми двумя точками которой остается постоянным при действии любых факторов.

Твердое деформируемое тело — называют тела, в которых возможно изменение расстояний между его точками под действием внутренних или внешних факторов. Объем тел заполнен идеально сплошной, однородной, изотропной средой.

Сплошной называют среду, непрерывно заполняющую объем тела.

Однородной — среду, физико-механические свойства которой во всех точках (элементарных объемах) тела одинаковы.

Изотропной — среду, свойства которой во всех направлениях, выделенных в теле, одинаковы.

Нередко в теоретической механике свойствами материала вообще пренебрегают, лишая тем самым тело всяких свойств. Например, геометрическая точка.

Под деформациями тел понимается изменение формы и размеров тел под действием внешних факторов. Различают упругие и пластические (остаточные) деформации.

Упругими называют *деформации*, исчезающие сразу после прекращения действия факторов, их вызывающих. В противном случае *деформации* называются *остаточными.*

В отличие от теоретической механики, в сопротивлении материалов интерес представляют только те перемещения точек тела, которые связаны с его деформацией. Перемещения разных точек тела в общем случае будут различными, а значит, будут функциями координат этих точек. Так как материал тела наделен свойством сплошности, то две бесконечно близкие точки, выделенные в теле, могут получать перемещения, отличающиеся только на бесконечно малую величину. Рассмотрим взаимное перемещение двух точек тела — т. А и т. В (см. рис. 10). При этом будем предполагать такую связь координатных осей с телом, при которой точка А остается неподвижной, а точка В, в следствие деформации тела, перемещается относительно т. А.

На рис. 10 точка B_1 — это положение точки В после деформации тела.

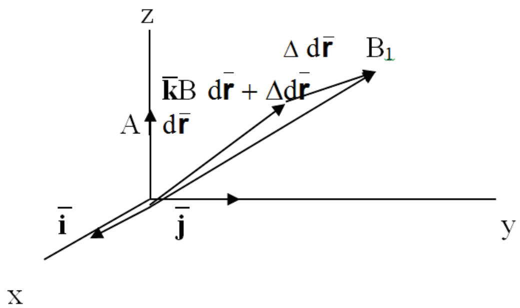


Рис. 10

Разложим радиус-вектора по координатным осям (см. рис. 10 и 11).

$$d\bar{\mathbf{r}} = dx\bar{\mathbf{i}} + dy\bar{\mathbf{j}} + dz\bar{\mathbf{k}}, \quad \Delta d\bar{\mathbf{r}} = \Delta dx\bar{\mathbf{i}} + \Delta dy\bar{\mathbf{j}} + \Delta dz\bar{\mathbf{k}}.$$

Величины Δdx, Δdy, Δdz — называются *абсолютными линейными деформациями* в точке А в направлении осей x, y, z.

Относительными линейными деформациями в точке А в направлении координатных осей называются величины:

$$\varepsilon_x = \Delta dx/dx,\ \varepsilon_y = \Delta dy/dy,\ \varepsilon_z = \Delta dz/dz.$$

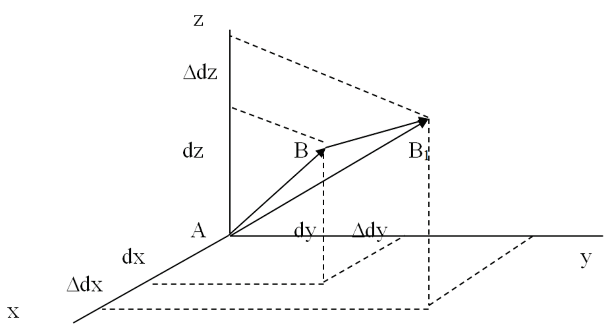


Рис. 11

Относительные линейные деформации — величины безразмерные, либо выражаются в процентах. При $\Delta dx \times dx > 0$, $\varepsilon_x > 0$, при $\Delta dx \times dx < 0$, $\varepsilon_x < 0$ т. д. Наряду с линейными деформациями в деформируемом теле происходят и угловые деформации. То есть, выделенные в теле до деформации углы получают приращения. Например, как показано на рис. 12, прямой угол zAy изменился на величину γ_{zy}. Этот угол, измеряемый в радианах либо в градусах, называется *угловой деформацией* либо *углом сдвига* в точке A в плоскости zAy.

В координатных плоскостях углы сдвига обозначаются: γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

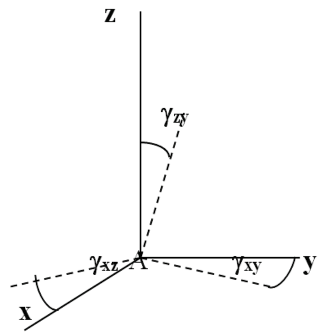


Рис. 12

Совокупность линейных деформаций по трем координатным осям и угловых деформаций в трех координатных плоскостях, проходящих через данную точку, называется *деформируемым состоянием в точке.*

Аналитически можно показать, что для определения линейных и угловых деформаций в данной точке в любых направлениях и плоскостях достаточно шести компонент деформаций ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}. Предсказать этот факт можно на основании следующих рассуждений. Перемещение точки B в положение B_1 можно представить как сумму двух движений.

Вращение вокруг неподвижной точки A → B → B” и прямолинейное в направлении AB_1 → B” → B_1 (см. рис. 13).

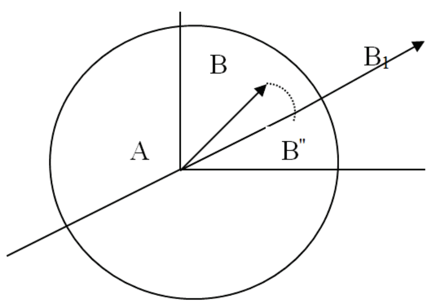


Рис. 13

Таким образом, деформируемое состояние в точке полностью определяется шестью компонентами. Деформируемое состояние в точке более сложное понятие чем, например, вектор. Если вектор можно задать тремя числами (значения проекций вектора на три координатные оси), то деформируемое состояние в точке задается шестью числами в виде таблицы (матрицы), которая называется *тензором деформаций*.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \gamma_{xy} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \varepsilon_y \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \gamma_{zy} \varepsilon_z \end{vmatrix} = \mathbf{Тд}$$

Понятие деформируемого состояния в точке основано на чисто геометрических соотношениях. Поэтому оно справедливо для любого однородного тела, независимо от свойств материала.

Свойства твердых деформируемых тел богаче и ближе к реальным, чем абсолютно твердых. Лишив тело свойства деформироваться, мы лишим сопротивление материалов предмета исследования.

Сопротивления материалов решает следующие задачи:

1. Подобрать материал и размеры тела, нагруженного известными внешними силами, так, чтобы прочность и жесткость тела были надежно обеспечены.

2. Проверить прочность и жесткость тела, нагруженного известными внешними силами, при заданных размерах и материале.

Исследование напряженно-деформированного состояния объектов основано на трех составляющих: геометрической, статической и физической. Геометрическая составляющая относится к изучению деформаций и может быть названа геометрией сопротивления материалов. Статическая составляющая относится к изучению механических напряжений. Физическая обнаруживает связь между деформациями и напряжениями. То есть построение сопротивления материалов аналогично построению теоретической механики.

Тема 3. МЕРЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Таковыми являются: количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия.

«*Количество движения* есть мера движения, устанавливаемая пропорционально скорости и массе. Количество движения целого есть сумма количеств движения отдельных его частей». Введя обозначения количества движения $\overline{k}$ — для точки и $\overline{K}$ — для механической системы, запишем:

$$\overline{k} = m\overline{V}; \overline{K} = \sum \overline{k_i} = \sum m_i \overline{V}_i, \tag{1}$$

где m — масса точки; $\overline{V}$ — ее скорость; i = 1, 2, 3…n; n — количество точек механической системы.

Точкой приложения вектора $\overline{k}$ является сама материальная точка. Вектор же $\overline{K}$ является свободным, а значит, может быть приложен к любой точке механической системы. Вектор $\overline{K}$ называют *главным вектором количества движения* механической системы.

Размерность количества движения [кг · м/с] либо [н · с].

Моментом количества движения материальной точки относительно полюса О *(кинетическим моментом)* называется вектор $\overline{l}_o$ равный векторному произведению радиус-вектора $\overline{r}_o$ материальной точки относительно полюса О и вектора количества движения точки $\overline{k} = m\overline{V}$, тогда

$$\overline{l}_o = \overline{r}_o \times \overline{k} = \overline{r}_o \times m\overline{V} \tag{2}$$

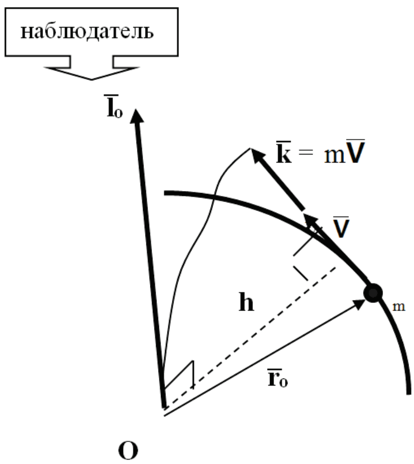


Рис. 14. Векторный момент количества движения точки

Величина этого вектора:

$$|\overline{l}_o| = |\overline{k}|\, h, \tag{3}$$

где h — перпендикуляр, проведенный из т. О на линию действия вектора $\overline{k}$.

Момент количества движения механической системы относительно полюса О есть вектор $\bar{L}_o$, равный векторной сумме моментов количества движения ее точек, рассчитанных относительно того же полюса О:

$$\bar{L}_0 = \sum \bar{l}_{oi} = \sum\left(\bar{r}_{oi} \times \bar{k}_i\right) = \sum(\bar{r}_{oi} \times m_i \bar{V}_i), \tag{4}$$

где i = 1, 2, 3…n; n — количество точек механической системы.

Его называют *главным моментом количества движения* механической системы материальных точек относительно полюса.

Вектора $\bar{l}_o$ и $\bar{L}_o$ закрепленные — точкой приложения является полюс О.

Их размерность в системе СИ — кг · м^2 /с, либо Н · м · с.

На ряду с векторными мерами механического движения $\bar{k}$, $\bar{K}$, $\bar{l}_0$, $\bar{L}_0$, существует еще и скалярная мера, относящаяся к основной. Это — *кинетическая энергия* или *живая сила.*

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная положительная величина Т, равная половине произведения массы точки и квадрата ее скорости:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot \bar{V}^2 = \frac{1}{2} \cdot V^2. \tag{5}$$

Кинетической энергией механической системы T_S называется сумма кинетических энергий ее точек:

$$T_s = \sum \frac{1}{2} m_i \cdot V_i^2, \; i = 1, 2, \dots n \tag{6}$$

Размерность этой меры — кг · м^2 / с^2 = н · м = дж (джоуль).

Ее значение не зависит от направления движения (не отражает его) даже для одной точки. На рис. 15 показаны два различных вида движения материальной точки массой m.

$$T = \frac{1}{2} m V^2$$

Рис. 15

В обоих случаях мы имеем одно и то же значение кинетической энергии.

Вообще *энергия* (от греч. *enérgeia* — действие) — общая мера различных форм движения материи. Для количественной характеристики качественно различных форм движения вводятся различные виды энергии: механическая, электромагнитная, ядерная и т. д.

Полная *механическая энергия* — энергия механического движения, равная сумме кинетической и потенциальной энергий.

Потенциальная энергия — часть энергии механической системы, зависящая от ее конфигурации, т. е. от взаимного положения точек системы и их положения во внешнем силовом поле. При изменении конфигурации механической системы изменяется и ее потенциальная энергия.

Нестационарным *силовым полем* называется часть пространства, в котором на материальную точку действует сила, зависящая от ее положения и времени.

В замкнутой (консервативной) механической системе выполняется *закон сохранения* механической энергии. При этом кинетическая энергия может преобразовываться в потенциальную энергию и наоборот.

Работа — скалярная физическая величина, характеризующая преобразование энергии из одной формы в другую.

Элементарная работа силы $\overline{F}$, совершаемая на элементарном (бесконечно малом) перемещении $d\overline{\mathbf{r}}$ точки ее приложения M, определяется равенством (см. рис. 16):

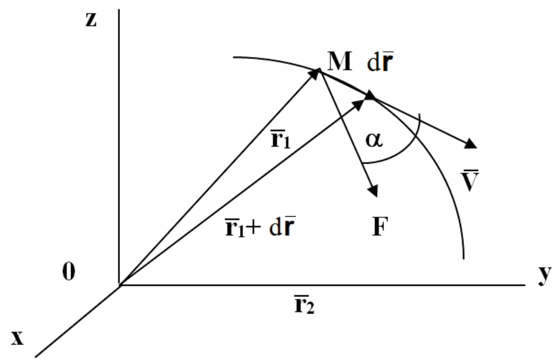


Рис. 16

$$\delta A = \overline{\mathbf{F}} d\overline{\mathbf{r}} = |\overline{\mathbf{F}}||d\overline{\mathbf{r}}|\cos\alpha = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz; \qquad (7)$$

где α — угол между вектором силы $\overline{F}$ и вектором перемещения $d\overline{\mathbf{r}}$;

x, y, z — декартовы координаты точки M;

F_x, F_y, F_z — проекции силы $\overline{F}$ на оси координат.

При $0 \le \alpha < 90°$ $\delta A > 0$ и сила $\overline{F}$ называется движущей;

при $\alpha = 90°$ $\delta A = 0$ и сила $\overline{F}$ работу не совершает;

при $90° < \alpha \le 180°$ $\delta A < 0$ и сила $\overline{F}$ называется силой сопротивления.

В системе СИ работа выражается в Дж — джоуль.

Тема 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТОВ

С геометрической точки зрения тела подразделяются на:

— *массивы,* это тела, все три измерения которых соизмеримы;

— *оболочки,* это тела, один размер которых много меньше двух других. Плоские оболочки называют *пластинами*;

— *брусья*, это тела, одно измерение которых много больше двух других. В зависимости от формы оси бруса и условий нагружения, его еще называют *стержнем, валом, балкой, кривым брусом.*

Моделью широко применяемых на практике канатов, тросов, цепей и т. п. является *абсолютно гибкая нерастяжимая* или *упругая нить* — механическая система точек, непрерывно распределенных по кривой.

На рис. 17 показаны основные объекты механики.

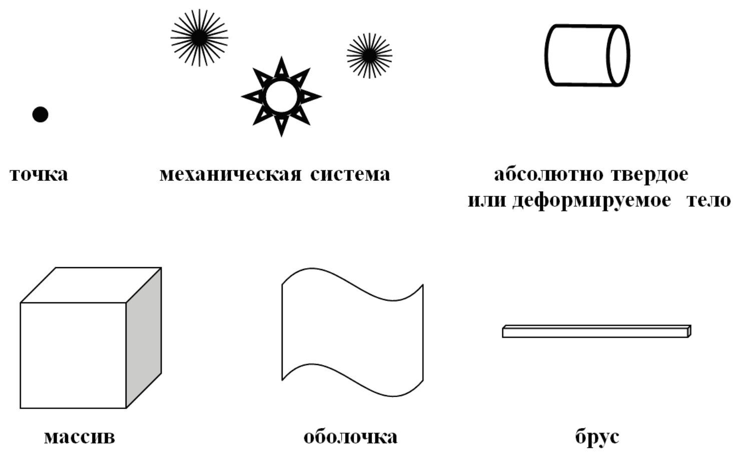


Рис. 17. Объекты механики

Так как далее простейшие виды деформаций будут рассматриваться на примере деформаций бруса, приведем его основные характеристики.

Тело в виде бруса образуется следующим образом (см. рис. 18). Будем перемещать плоскую фигуру Ф вдоль пространственной кривой L так, чтобы центр тяжести площади фигуры всегда принадлежал кривой L, а плоскость фигуры оставалась перпендикулярной к кривой L. Если длина кривой L много больше характерных размеров плоской фигуры, то тело, образованное таким образом по определению и является брусом. То есть, его продольный размер вдоль кривой L много больше размеров фигуры Ф (поперечных размеров бруса).

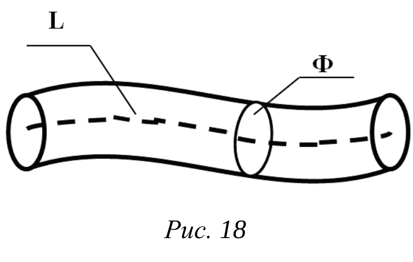


Рис. 18

Кривая L называется осью бруса, а плоская фигура Ф — поперечным сечением бруса.

Если при движении плоская фигура не поворачивается относительно оси бруса и не изменяет свою форму и размеры, то брус имеет постоянное поперечное сечение. Если ось бруса есть плоская кривая, то брус называется плоским кривым. При прямолинейной оси получаем плоский прямой брус. Если размеры фигуры Ф от сечения к сечению изменяются, то имеем брус переменного сечения.

Геометрическими характеристиками плоской фигуры являются:

площадь фигуры, статический момент площади плоской фигуры относительно оси, моменты инерции площади плоской фигуры относительно точки — полярный, относительно оси — осевой или экваториальный, относительно плоской системы осей — центробежный.

1. Площадь плоской фигуры

Площадь плоской фигуры это мера ее «плоской» протяженности по отношению к стандартной фигуре — квадрату со стороной, равной единице длины отрезка. Размерность площади (единица длины)^2 — мм^2, см^2, м^2 и т. д. Вычисление площади плоской фигуры состоит в монотонном процессе ее разбиения на стандартные квадраты с дробно уменьшающими размерами их сторон (см. рис. 19).

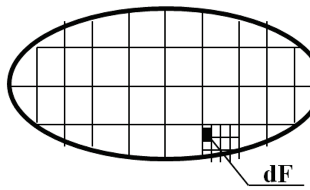


Рис. 19. Понятие площади плоской фигуры

В пределе сумма площадей квадратов, помещенных в плоскую фигуру, принимается за ее площадь:

$$F = \int_F \mathbf{dF},$$

где d**F** и F — площадь элементарной площадки и площадь фигуры соответственно.

2. Статический момент площади плоской фигуры относительно оси

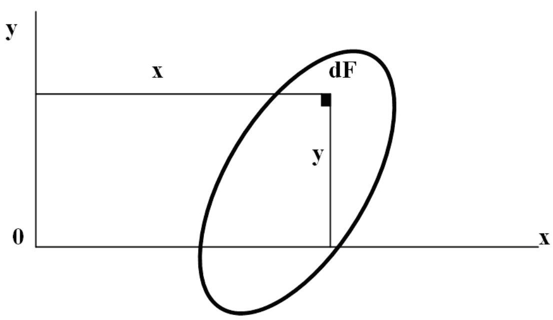


Рис. 20. Понятие элементарного статического момента

Статическим моментом элементарной площадки dF относительно осей *x* и *y* называются алгебраические величины dSx и dSy соответственно:

$$dSx = ydF,\ dSy = xdF. \tag{8}$$

В зависимости от знаков *y* и *x*, статические моменты могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Просуммировав их по всей площади фигуры, получим статические моменты площади фигуры относительно осей:

$$S_X = \int_F ydF,\ Sy = \int_F xdF. \tag{9}$$

Размерность статического момента — единица длины в кубе ($м^3$, $см^3$ и т. п.). По теореме о среднем, статические моменты плоской фигуры (значения соответствующих интегралов) можно представить в виде:

$$S_X = Fy_C;\ Sy = Fx_C, \tag{10}$$

где y_C и x_C — координаты точки, которую называют центром тяжести площади фигуры (см. рис. 21).

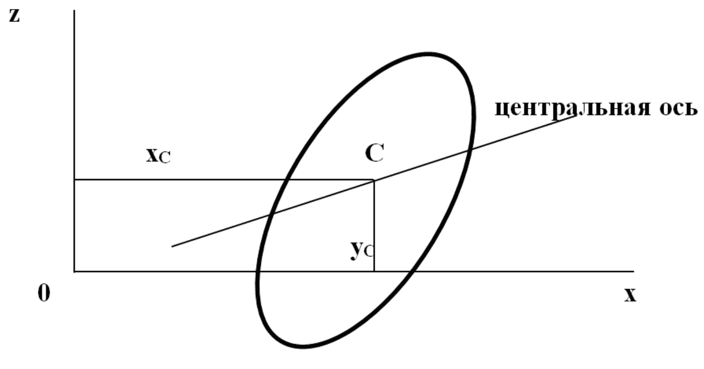


Рис. 21. Центральная ось

Любая ось, проходящая через точку C, называется центральной осью плоской фигуры. Если точку C принять за начало координатной системы, то в формуле (9) $y_C = x_C = 0$, а значит статический момент плоской фигуры относительно любой из центральных осей равен нулю.

Понятие статического момента используется для определения положения центра тяжести площади плоской фигуры. В частности, любая ось симметрии фигуры является центральной осью инерции. Если фигура имеет центр симметрии, то он является ее центром тяжести.

3. Моменты инерции площади плоской фигуры

Моментами инерции площади плоской фигуры относительно точки (полярным), оси (осевым), плоской системы координат (центробежным) называются скалярные величины, определяемые интегралами вида соответственно:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF, \quad Jx = \int_F y^2 dF, \; Jy = \int_F x^2 dF, \; Jzy = \int_F xy dF$$

где ρ — радиус-вектор, а x, y — координаты центра тяжести элементарной площадки dF площади плоской фигуры (см. рис. 22).

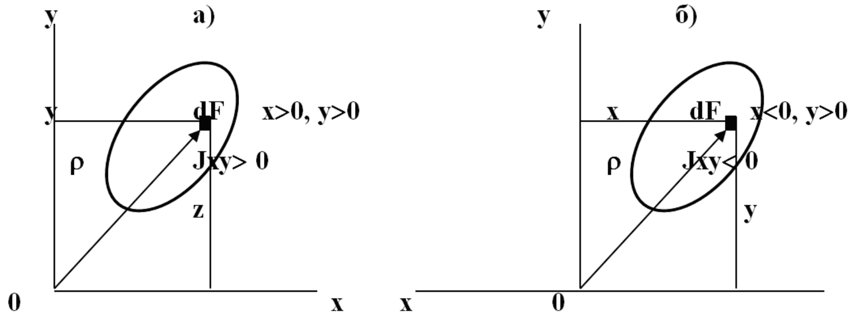


Рис. 22. Элементарные моменты инерции

Размерность моментов инерции — единица длины в четвертой степени ($м^4$, $см^4$ и т. п.). Интегралы, определяющие осевые моменты инерции, могут быть представлены в виде:

$$Jx = \int_F y^2 dF = Fi_x^2, \; Jy = \int_F dF = Fi_y^2, \tag{11}$$

где i_x и i_y — радиусы инерции фигуры относительно осей x и y соответственно. Их размерность — м, см и т. п.

Если полюс 0 является точкой пересечения осей, то полярный и осевые моменты инерции находятся в зависимости:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F (z^2 + y^2) dF = Jy + Jz. \tag{12}$$

В сопротивлении материалов полярный момент инерции имеет смысл, если при деформации бруса его поперечное сечение поворачивается вокруг некоторой точки, лежащей в плоскости сечения, например, при кручении вала. Осевые моменты инерции имеют смысл, если при деформации бруса его сечение поворачивается вокруг оси, лежащий в плоскости сечения, например, при чистом изгибе. Этим объясняется присутствие в названии моментов инерции понятия «инерция», отражающее способность фигуры удерживать свое начальное состояние (сопротивляться изменению своего положения при деформировании бруса). В сопротивлении материалов это свойство называется жесткостью. Слово «момент» отражает тот факт, что свойство жесткости проявляется при попытке повернуть фигуру относительно точки либо оси.

Из определения следует, что J_ρ, Jz, Jy всегда положительны. Знак Jzy зависит от положения координатных осей. Так, при повороте осей на 90° (рис. 23) знак Jzy изменяется на противоположный. Значит, существует такая координатная система, относительно которой центробежный момент инерции обращается в ноль. Оси такой координатной системы называются главными осями инерции. Если главная ось инерции проходит через центр тяжести площади фигуры, то она является главной центральной осью инерции плоской фигуры.

Рассмотрим зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей. На рисунке 23 показаны плоская фигура и две координатные системы — одна, состоящая из центральных осей Cy и Cz, вторая из осей 0y и 0z, параллельных центральным осям.

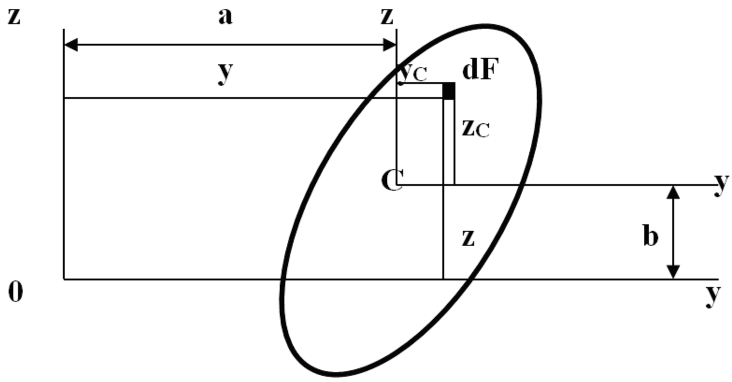


Рис. 23. Параллельный перенос осей

При заданных моментах инерции относительно центральных осей J_Cy, J_Cz, $J_Cy,_Cz$ и значениях a и b, необходимо вычислить значение моментов инерции Jy, Jz, Jyz относительно осей 0y и 0z.

Из рисунка 23 следует, что $y = y_C + a$ и $z = z_C + b$. Тогда из определения моментов инерции получим:

$$\mathbf{Jy} = \int_F \mathbf{z^2 dF} = \int_F \mathbf{(z_c+b)^2 dF} = \int_F \mathbf{z_c^2 dF} + \mathbf{2b}\int_F \mathbf{z_c dF} + \mathbf{b^2}\int_F \mathbf{dF},$$

где $\int_F \mathbf{z_c^2 dF} = J_Cy$ — по определению, $\int_F \mathbf{z_c dF} = S_Cy = 0$ — как статический момент площади фигуры относительно центральной оси, а $\int_F \mathbf{dF} = F$ — площадь фигуры.

Тогда окончательно получим:

$$Jy = J_Cy + b^2F. \tag{13}$$

Аналогично

$$Jz = J_Cz + a^2F. \tag{14}$$

В этих формулах слагаемые b^2F и a^2F называются переносными моментами инерции. Так как они всегда больше нуля, то при параллельном переносе центральных осей, осевые моменты инерции увеличивают свое значение. То есть относительно заданной центральной оси осевой момент инерции площади плоской фигуры всегда меньше, чем его значение относительно любой другой оси, параллельной центральной.

Из определения центробежного момента инерции:

$$J_{zy} = \int_F zy\,dF = \int_F (z_c + b)(y_c + a)\,dF = \int_F z_c y_c\,dF + a\int_F z_c\,dF + b\int_F y_c\,dF + ab\int_F dF.$$

Так как $\int_F z_c y_c\,dF = J_{z_c y_c}$ — по определению, $\int_F z_c\,dF = S_{y_c} = 0$ и $\int_F y_c\,dF = S_{z_c} = 0$ — как статические моменты инерции относительно центральных осей, а $\int_F dF = F$, то:

$$J_{zy} = J_{z_c y_c} + abF, \tag{15}$$

здесь a и b можно рассматривать как координаты центра тяжести фигуры в осях yz, не забывая о знаках.

Теперь получим зависимости между моментами инерции при повороте, как любой системы прямоугольных осей, так и центральных в частности.

При заданных моментах инерции относительно осей Cy и Cz, и значении угла поворота этих осей — α, необходимо найти моменты инерции в осях Cu и Cv (см. рис. 24).

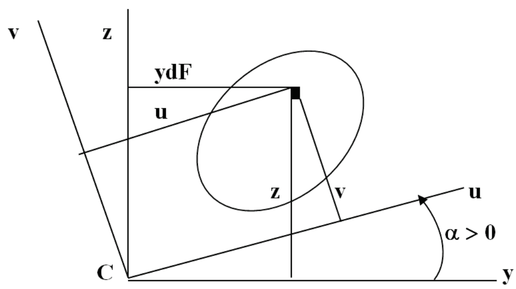


Рис. 24. Поворот координатных осей

Из аналитической геометрии связь между координатами элементарной площадки dF в показанных координатных осях:

$$v = z\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$u = y\cos\alpha + z\sin\alpha.$$

Тогда из определений моментов инерции получим:

$$J_U = \int_F v^2 dF = \int_F (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha\int_F z^2 dF - 2\cos\alpha\sin\alpha\int_F zy\,dF + \sin^2\alpha\int_F y^2 dF.$$

Или

$$J_U = J_Y\cos^2\alpha - J_{ZY}\sin 2\alpha + J_Z\sin^2\alpha. \tag{16}$$

Аналогично получим:

$$J_V = J_Z\cos^2\alpha + J_{ZY}\sin 2\alpha + J_Y\sin^2\alpha. \tag{17}$$