ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие позволяет студентам проверить и расширить свои знания и навыки в освоении теоретического и практического материала, подготовиться к прохождению тестирования расчетно-графической работы по теме "Геометрические характеристики поперечных сечений стержней".

Задания сгруппированы по четырем разделам. Так как каждый тест снабжен комментируемым ответом, то это позволяет учащемуся контролировать уровень своей подготовки в режиме "самотестирования".

К каждому тесту (заданию) предлагаются пять вариантов ответа. Причем все ответы помечены или символом "○" (кружок) или символом "□" (квадрат).

Символом "○" обозначены ответы, из которых только *один* является правильным, а символом "□" – ответы, из которых правильными являются *несколько* из пяти предложенных (но не более четырех). Таким образом, тестируемому даётся некоторая подсказка, в целом упрощающая задание.

В следующем за ответами *комментарии* содержится решение поставленной в тесте задачи и краткие сведения по соответствующему теоретическому материалу. В конце каждого теста предлагается *правильный ответ*.

При прохождении реального аудиторного тестирования на кафедре сопротивления материалов действуют такие же принципы. Студенту следует ответить на пять вопросов, включающих три задачи и два теоретических задания. Время тестирования - 15 минут. Для получения удовлетворительной оценки необходимо правильно ответить на три вопроса из пяти предложенных.

Авторы выражают особую благодарность профессору кафедры "Сопротивление материалов" МИСИ - МГСУ Н.М. Атарову за ценные советы и замечания.

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ФОРМУЛЫ

При выполнении расчетов на прочность, жесткость и устойчивость конструкций формулы для напряжений и деформаций содержат различные величины, характеризующие влияние размеров и формы поперечного сечения стержня на его напряженно-деформированное состояние. Эти величины принято называть геометрическими характеристиками поперечных сечений. Изучение этих функций, освоение различных приемов их вычисления, анализ их свойств на примерах в форме тестов позволит подготовиться к определению напряженного и деформированного состояний в стержнях.

Основные элементы стержня (балки, бруса) представлены на рис.1.

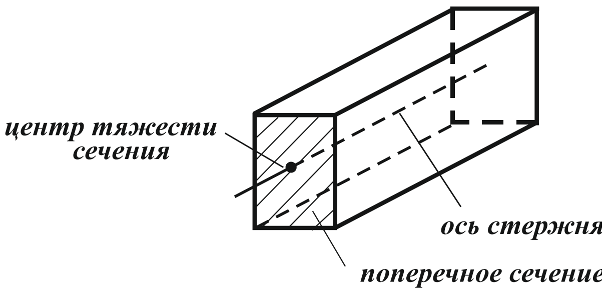


Рис. 1

Площадь поперечного сечения определяется по формуле

$$A = \iint_A dA.$$

На основании этого соотношения площадь делится на бесконечно малые площади dA, общая площадь поперечного сечения равна сумме всех бесконечно малых площадей dA.

В расчетной практике начало выбранной системы координат помещают в центр тяжести сечения.

Центральными осями называются оси, проходящие через центр тяжести сечения.

Положение центра тяжести сечения известно, если поперечное сечение имеет две и более осей симметрии. Центр тяжести расположен на пересечении осей симметрии поперечного сечения (рис.2).

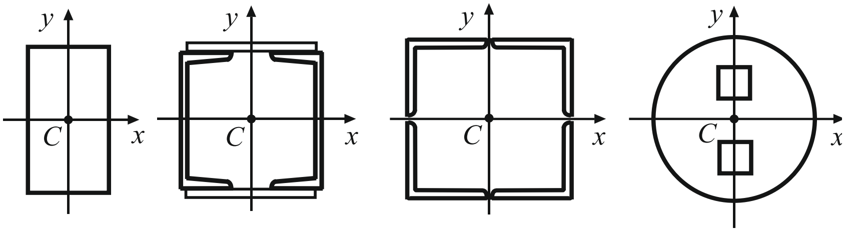


Рис. 2

В сечении, симметричном относительно одной оси, центр тяжести расположен на оси симметрии, при этом определяется одна координата центра тяжести. Известно, что в сечении, состоящем из двух элементов, центр тяжести расположен на линии, соединяющей центры тяжести элементов (рис. 3).

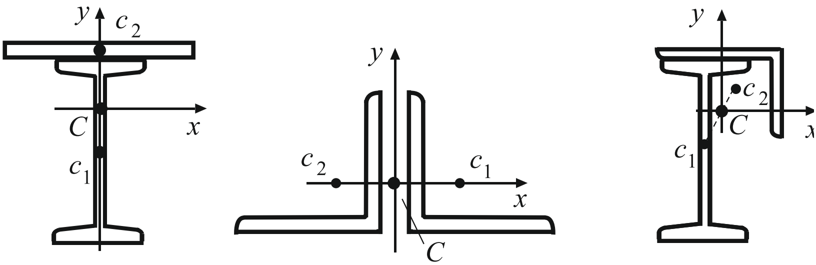


Рис. 3

Статические моменты

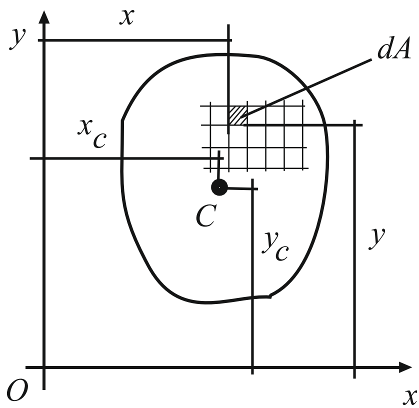


Рис. 4

Статические моменты сечения относительно осей Оx и Оy определяются по следующим формулам (рис. 4)

$$S_x = \iint_A y dA \ ; \ S_y = \iint_A x dA \ . \qquad (1)$$

Если известны координаты центра тяжести сечения, то статический момент сечения относительно оси равен произведению площади сечения на координату центра тяжести:

$$S_x = A \cdot y_c \ ; \ S_y = A \cdot x_c . \qquad (2)$$

Координаты центра тяжести сечения определяются с помощью статических моментов относительно произвольно выбранных осей $\sum S_x$, $\sum S_y$, при разделении сечения на простые элементы, положение центров тяжести которых известно, по формулам:

$$\boldsymbol{x_c} = \frac{\sum \boldsymbol{S_y}}{\boldsymbol{A}} \ ; \ \boldsymbol{y_c} = \frac{\sum \boldsymbol{S_x}}{\boldsymbol{A}} , \qquad (3)$$

где A – общая площадь сечения.

Статические моменты относительно центральных осей равны нулю. $\sum S_{x_c} = 0$, $\sum S_{y_c} = 0$. Это свойство используется для поверки правильности определения координат центра тяжести сечения.

Статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Последнее утверждение действительно относительно осей симметрии.

Моменты инерции сечения

Относительно двух взаимно перпендикулярных осей определяются три момента инерции сечения – два осевых и один центробежный по следующим формулам:

$$J_x = \iint_A y^2 \, dA \ ; \ J_y = \iint_A x^2 \, dA \ ; \ J_{xy} = \iint_A xy \, dA \qquad (4)$$

Поскольку произведение элементарной площади dA на квадрат расстояния до оси является положительной величиной, то осевые моменты инерции J_x , J_y принимают только положительные значения.

Центробежный момент инерции J_{xy} может быть положительным или отрицательным. Центробежный момент инерции J_{xy} равен нулю в следующих случаях:

– достаточно, чтобы одна из осей являлась осью симметрии,

– относительно главных осей.

Моменты инерции простых фигур (рис. 5)

ПРЯМОУГОЛЬНИК *ТРЕУГОЛЬНИК*

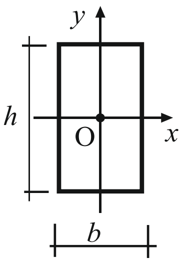


Рис. 5

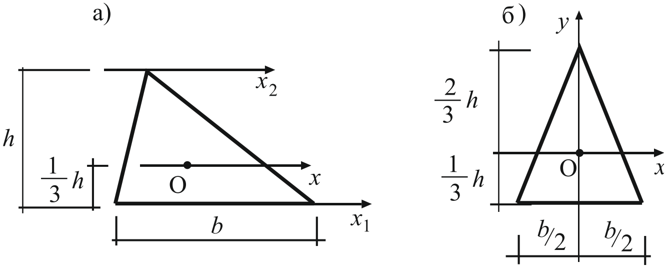


Рис. 6

$$J_x = \frac{bh^3}{12}\ ;\ J_y = \frac{hb^3}{12}. \tag{5}$$

Моменты инерции произвольного треугольника относительно трех осей, параллельных основанию, определяются по формулам (рис. 6, а):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}\ ; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}\ ;\ J_{x_2} = \frac{bh^3}{4}, \tag{6}$$

где Оx – центральная ось.

Моменты инерции равнобедренного треугольника (рис. 6, б):

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}\ ;\ J_y = \frac{h \cdot b^3}{48}. \tag{7}$$

КРУГ, ПОЛУКРУГ

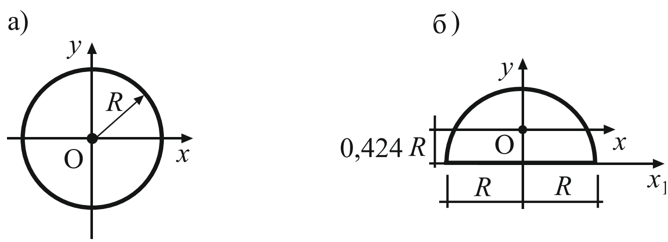


Рис. 7

Осевые моменты инерции характеризуют расположение точек сечения относительно осей. В круглом сечении точки сечения расположены одинаково относительно осей Оx и Оy, поэтому осевые моменты инерции круга равны между собой (рис.7, а):

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4}. \tag{8}$$

Моменты инерции полукруга определяются по формулам (рис. 7, б):

$$J_x = 0{,}11R^4\ ;\ J_{x_1} = J_y = \frac{\pi R^4}{8}. \qquad (9)$$

Полярный момент инерции

В полярной системе координат момент инерции элементарной площади dA относительно полюса О равен произведению dA на квадрат расстояния r от полюса О до dA (рис.8).

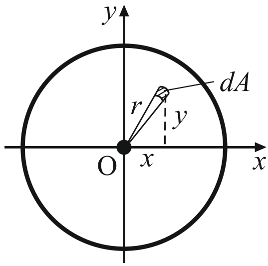


Рис. 8

Используя соотношение $r^2 = x^2 + y^2$, получим, что полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции:

$$J_p = \iint_A r^2 dA = \iint_A (y^2 + x^2)\, dA = J_x + J_y. \qquad (10)$$

Соотношение (10) выражает связь между моментом инерции в полярной системе координат и осевыми моментами инерции в декартовой системе координат.

Моменты инерции относительно параллельных осей

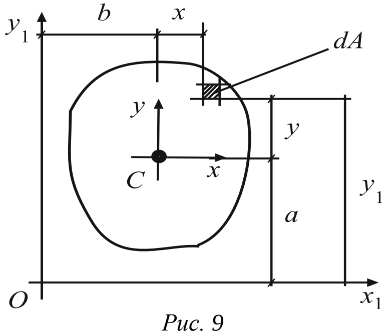


Рис. 9

Если известны моменты инерции относительно центральных осей Оx, Оy сечения, то моменты инерции относительно осей $0x_1, 0y_1$ (рис.9), параллельных центральным, определяются по следующим формулам:

$$J_{x_1} = J_x + A \cdot a^2;$$
$$J_{y_1} = J_y + A \cdot b^2; \quad (11)$$
$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + A \cdot ab.$$

К осевому моменту инерции относительно центральной оси добавляется произведение площади сечения A, умноженной на квадрат расстояния между параллельными осями. Центробежный момент инерции относительно центральных осей суммируется с произведением площади сечения A на расстояния a и b между осями.

Моменты инерции при повороте осей

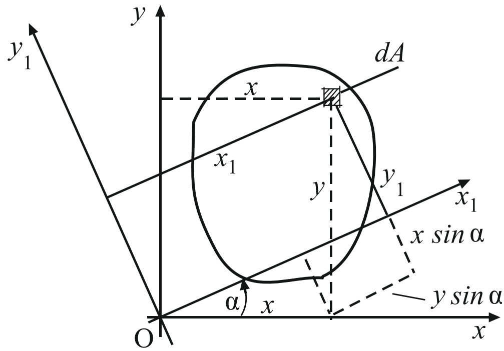


Рис. 10

Моменты инерции относительно осей $0x_1$, $0y_1$, повернутых к осям Оx , Оy под углом α, (рис. 10) можно выразить на основании общих соотношений (4):

$$J_{x_1} = \iint_A y_1^2 \, dA \; ; \; J_{y_1} = \iint_A x_1^2 \, dA \; ; \; J_{x_1 y_1} = \iint_A x_1 y_1 \, dA. \quad (12)$$

Полагая, что значения моментов инерции сечения относительно осей Оx, Оy известны, и используя соотношения, связывающие координаты x, y с координатами x_1, y_1:

$$x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \; ; \; y_1 = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

получим выражения для моментов инерции относительно наклонных осей:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \; ; \quad (13)$$
$$J_{y_1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2 + J_{xy} \sin 2\alpha \; ; \quad (14)$$
$$J_{xy} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (15)$$

Из сложения формул (13) и (14) следует, что сумма осевых моментов инерции сечения является величиной постоянной:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = \text{const}. \quad (16)$$

Главные оси и главные моменты инерции сечения

Главными осями называются оси относительно, которых центробежный момент инерции равен нулю, при этом осевые моменты инерции сечения принимают максимальное и минимальное значения.

Положение главных осей находится, при выполнении условия экстремума осевого момента инерции J_{x_1} по переменной α:

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = 0 \;\; ; \quad -2J_x \sin\alpha\cos\alpha + 2J_y \cos\alpha\sin\alpha - 2\,J_{xy}\cos2\alpha = 0,$$

$$-2\left(\frac{J_x - J_y}{2}\sin2\alpha + J_{xy}\cos2\alpha\right) = 0, \quad (\text{то есть } J_{xy} = 0)\,. \qquad (17)$$

Из соотношения (17), получим выражение для определения угла наклона главной оси к горизонтали:

$$\mathrm{tg}2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Значения главных моментов инерции определяются по формуле

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \qquad (18)$$

Индекс 1 относят к значению максимального момента инерции, 2 – к значению минимального момента инерции. При этом углы наклона осей 1и 2 к оси О*x* можно определить из соотношений:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} \;\; ; \;\; \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}. \qquad (19)$$

Положительный угол α откладывается от оси О*x* против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки. В результате расчета должно получиться $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90°$.

Моменты сопротивления сечения определяются для крайних точек сечения, поскольку используются для выражения значений наибольших напряжений при изгибе, возникающих в крайних волокнах балки. Моменты сопротивления сечения (рис.11) рассчитываются по формулам:

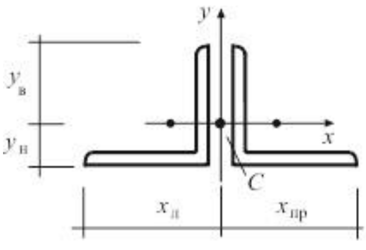


Рис. 11

$$W_x^{\text{в}} = \frac{J_x}{y_{\text{в}}} \;;\; W_x^{\text{н}} = \frac{J_x}{y_{\text{н}}}$$

$$W_y^{\text{п}} = \frac{J_y}{x_{\text{п}}} \;\; ; \;\; W_y^{\text{л}} = \frac{J_y}{x_{\text{л}}} \qquad (20)$$

Радиусы инерции сечения определяются из соотношений:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \; ; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \, . \qquad (21)$$

Главные радиусы инерции сечения вычисляются по величинам главных моментов инерции:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} \; ; \quad i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} \, . \qquad (22)$$

Свойства моментов инерции сечения

Знак центробежного момента инерции сечения изменяется на противоположный, если две взаимно перпендикулярные оси повернуть на 90° (рис.12, а, б):

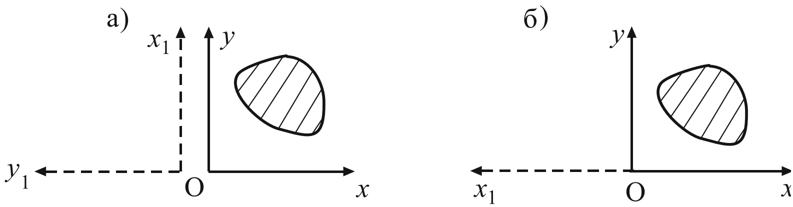


Рис. 12

Пару главных осей составляют ось симметрии и ось, ей перпендикулярная (рис.13) :

Для точки, расположенной на главной центральной оси, пару главных осей составляют главная центральная ось и ось ей перпендикулярная (рис.14).

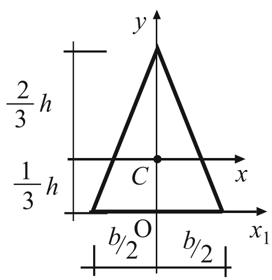


Рис. 13

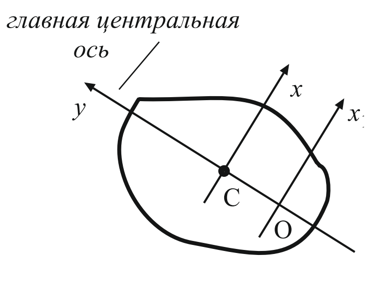


Рис. 14

Если относительно двух взаимно перпендикулярных главных осей моменты инерции одинаковы, то все оси, проходящие через точку их пересечения, главные и моменты инерции относительно них равны между собой (рис.15, а, б).

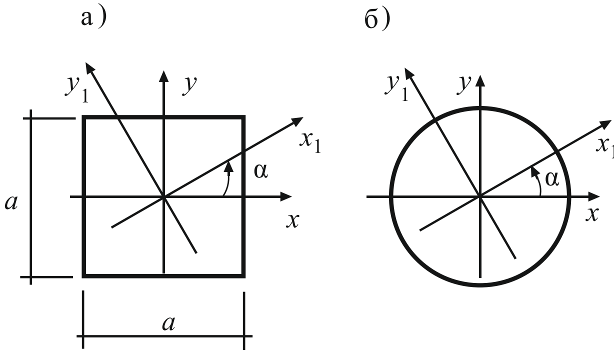


Рис. 15

Например, рассмотрим квадратное сечение. Известны значения моментов инерции относительно осей Оx и Оy:

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}\ ;\ J_{xy} = 0. \tag{23}$$

Используя соотношение для осевого момента инерции при повороте осей (13), получим формулу момента инерции относительно оси $0x_1$

$$J_{x_1} = \frac{a^4}{12}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{a^4}{12}. \tag{24}$$

Графическое определение моментов инерции сечения. Круг инерции (круг Мора)

С помощью круга инерций можно определить:

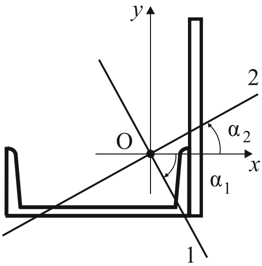
1) значения главных моментов инерции и положение главных осей;

2) значения моментов инерции относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей для рассматриваемой точки поперечного сечения.

Например, определены моменты инерции относительно центральных осей сечения J_x, J_y и J_{xy}. Допустим $J_x < J_y$, $J_{xy} > 0$.

На горизонтальной оси откладываются осевые моменты инерции J_x, J_y, на вертикальной оси – центробежный момент инерции J_{xy} с учетом его знака.

Обозначаем на горизонтальной оси центр круга $OC = \frac{J_x + J_y}{2}$ и полюс круга — точку K с координатами (J_y, J_{xy}). Радиусом CK проводим окружность. Точки пересечения окружности с горизонтальной осью показывают значения главных моментов инерции J_1 и J_2. Линии, проведенные через точку K и точки пересечения окружности с горизонтальной осью J_1 и J_2, показывают направления главных осей, обозначаемых 1 и 2. Угол между горизонтальной осью и линией 1 равен α_1, угол между горизонтальной осью и линией 2 равен α_2. (рис. 16, а, б)



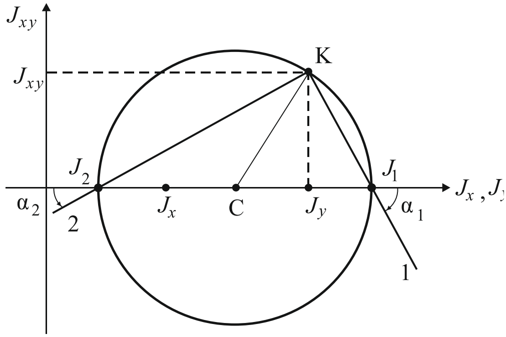


Рис. 16

Значения J_1, J_2, α_1, α_2, полученные с помощью круга инерции, совпадают с аналитическими вычислениями по формулам (18) и (19).

Положительный угол откладывается от горизонтали против хода часовой стрелки, отрицательный — по ходу часовой стрелки.

РАЗДЕЛ 1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Тест 1.1
Геометрические характеристики поперечного сечения вычисляются…

- □ 1) относительно главных центральных осей;
- □ 2) при определении внутренних усилий;
- □ 3) для определения напряжений;
- □ 4) для определения жесткости при растяжении—сжатии, изгибе, кручении;
- □ 5) при расчете положения центра тяжести.

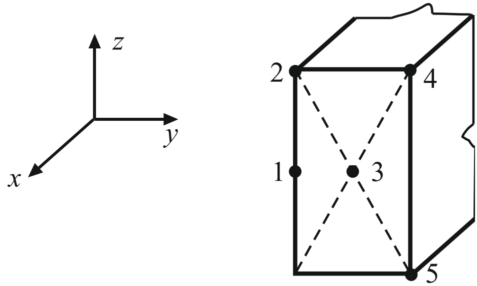
Комментарий:

При расчете на прочность, жесткость, устойчивость величины напряжений, деформаций и перемещений зависят от размеров и формы поперечного сечения. Геометрические характеристики сечений вычисляются относительно центральных главных осей. Жесткость при растяжении—сжатии EA, изгибе EJ, кручении GJ_p определяется относительно главных центральных осей. При определении координат центра тяжести сечения вычисляются статические моменты сечения относительно выбранных осей и площадь сечения.

Внутренние усилия определяются с помощью метода сечений и выражаются через внешние нагрузки. Форма и размеры поперечного сечения не влияют на их значения.

Правильные ответы: 1), 3), 4), 5).

Тест 1.2
Оси координат при расчете стержня на прочность, жесткость, устойчивость в поперечном сечении помещаются в точку ...



- 1) т.1;
- 2) т.2;
- 3) т.3;
- 4) т.4;
- 5) т.5 .

Комментарий:

> Начало координат помещается в центр тяжести сечения. Геометрические характеристики сечения, используемые в расчете, определяются относительно главных центральных осей. При расположении осей в точку 3 получаем, что Оz, Оy являются главными центральными осями.

Правильный ответ: 3).

Тест 1.3
Статические моменты сечения относительно осей определяются с помощью формул ...

- 1) $J_x = \iint_A y^2\, dA; \quad J_y = \iint_A x^2\, dA;$
- 2) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad \nu = \left|\frac{\varepsilon_{п}}{\varepsilon}\right|;$
- 3) $W_x = \frac{J_x}{y_{нб}}; \; W_y = \frac{J_y}{x_{нб}};$
- 4) $S_x = \iint_A y dA; \;\; S_y = \iint_A x dA;$
- 5) $\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y, \quad \tau = \frac{Q\, S_z^{отс}}{J_z\; b}$.

Комментарий:

> Статический момент относительно оси для элементарной площадки — это произведение бесконечно малой площади dA на расстояние от нее до соответствующей оси. При расчете строительных конструкций принято обозначать эту величину буквой S.
>
> В ответах представлены формулы для определения: J_x , J_y — осевых моментов инерции сечений; E – модуля упругости материала; ν — коэффициента Пуассона; W_x , W_y – моментов сопротивления сечения; σ_x — нормальных напряжений; τ — касательных напряжений.

Правильный ответ: 4).

Тест 1.4
Статический момент сечения равен нулю относительно…

- □ 1) главной оси;
- □ 2) любой центральной оси;
- □ 3) оси симметрии сечения;
- □ 4) горизонтальной оси, проведенной по касательной к контуру сечения;
- □ 5) вертикальной оси, проведенной по касательной к контуру сечения.

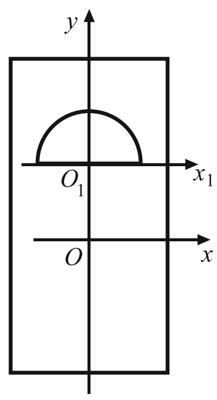
Комментарий:

> Если известно положение центра тяжести сечения, статический момент сечения относительно оси равен произведению площади сечения на расстояние от центра тяжести сечения до этой оси, поэтому статический момент сечения относительно любой центральной оси равен нулю. Известно, что ось симметрии проходит через центр тяжести сечения.
>
> Относительно главной оси, не проходящей через центр тяжести сечения, статический момент не равен нулю.
>
> Относительно осей, проходящих по касательной к контуру сечения, статический момент не равен нулю.

Правильные ответы: 2), 3).

Тест 1.5
Правильными утверждениями для статических моментов данного сечения (О – центр тяжести) являются …

- □ 1) $S_x = 0$;
- □ 2) $S_{x_1} > 0$;
- □ 3) $S_y < 0$;
- □ 4) $S_y = 0$;
- □ 5) $S_{x_1} < 0$.



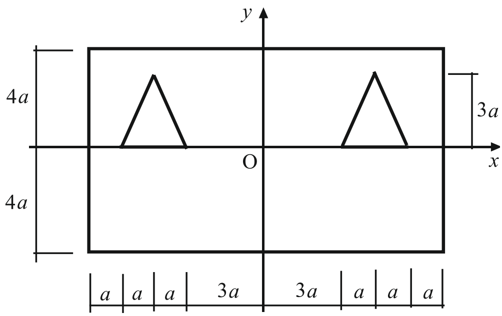
Комментарий:

Величина статического момента может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Оси Оx и Оy являются центральным осями данного сечения, поэтому $\boldsymbol{S_x = 0}$ и $\boldsymbol{S_y = 0}$.

Рассматривая расположение точек сечения относительно оси $\mathbf{O}\boldsymbol{x_1}$, отметим, что большее число точек сечения имеет отрицательную координату, y, поэтому статический момент всего сечения относительно оси $\mathbf{O}\boldsymbol{x_1}$ является отрицательным. На основании определения статического момента сечения $\boldsymbol{S_{x_1} = \iint_A ydA}$ делаем вывод, что $\boldsymbol{S_{x_1} < 0}$.

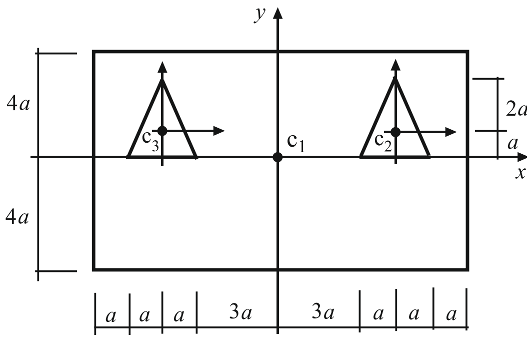
Правильные ответы: 1), 4), 5).

Тест 1.6
Статические моменты сечения относительно осей О*x* и О*y* равны…



- ☐ 1) $S_y = 0$;
- ☐ 2) $S_x = -2(\frac{1}{2}\ 2a \cdot 3a \cdot a)$;
- ☐ 3) $S_y = 2(\frac{1}{2}\ 2a \cdot 3a \cdot 4a)$;
- ☐ 4) $S_x = 0$;
- ☐ 5) $S_x = 2(\frac{1}{2}\ 2a \cdot 3a \cdot a)$

Комментарий:



Сечение симметрично относительно оси Оy, следовательно Оy — центральная ось, и относительно неё статический момент равен нулю.

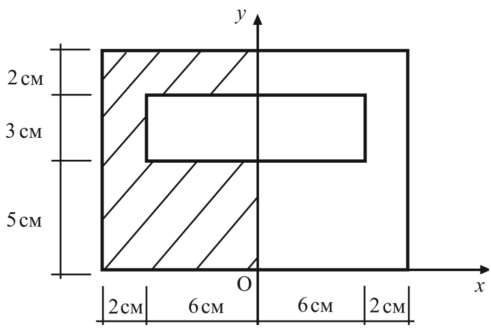
Ось Оx не является центральной осью сечения, относительно нее напишем выражение статического момента. Сечение разделим на три простых элемента, положение центров тяжести которых известно. Центр тяжести большого прямоугольника расположен на оси Оx, поэтому статический момент сплошного прямоугольника относительно оси Оx равен нулю $\boldsymbol{S_x^1 = 0}$, вычитаем из этого значения статические моменты двух одинаковых фигур, представляющие вырезы в форме треугольников. Статический момент каждого треугольника относительно оси Оx определим как произведение его площади, умноженной на расстояние от центра тяжести треугольника до оси Ox, равное a:

$$\boldsymbol{S_x = S_x^1 - S_x^2 - S_x^3 = -2\left(\frac{1}{2}\,2a \cdot 3a \cdot a\right)}.$$

Правильные ответы: 1), 2).

Тест 1.7

Статический момент заштрихованной части сечения относительно оси О*y* равен...



- 1) 374 см^3;
- 2) -266 см^3;
- 3) -320 см^3;
- 4) 54 см^3;
- 5) -374 см^3 .

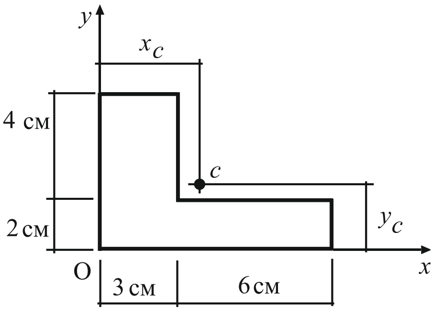
Комментарий:

Заштрихованную фигуру представим в виде большого сплошного прямоугольника (10×8) и выреза в форме малого прямоугольника (3×6), координаты центров тяжести каждой фигуры относительно оси Оy являются отрицательными. Статический момент заштрихованной фигуры определим как разность статических моментов этих фигур относительно оси Оy:

$$\mathbf{S_y = S_y^1 - S_y^2 = 10 \cdot 8 \cdot (-4) - 6 \cdot 3 \cdot (-3) = -266}\ \text{см}^{\mathbf{3}}.$$

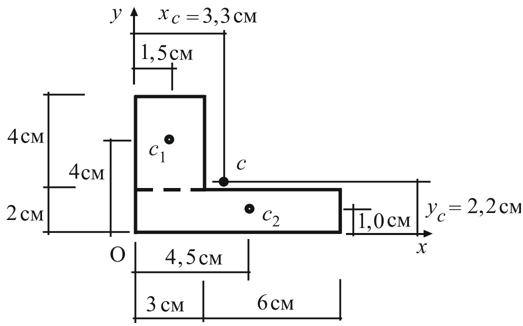
Правильный ответ: 2).

Тест 1.8
Координаты центра тяжести сечения x_c и y_c равны...



- ☐ 1) $x_c = 4{,}2$ см;
- ☐ 2) $y_c = 2{,}2$ см;
- ☐ 3) $x_c = 3{,}3$ см;
- ☐ 4) $y_c = 1{,}8$ см;
- ☐ 5) $x_c = 2{,}3$ см.

Комментарий:



Разделим поперечное сечение на простые элементы, положение центров тяжести которых известно, получим два прямоугольника, c_1 и c_2 — их центры тяжести. Вспомогательные оси Ox и Oy проведены по касательной к контуру сечения. Статический момент всего сечения относительно оси равен алгебраической сумме статических моментов отдельных элементов относительно рассматриваемой оси. Статический момент отдельного элемента относительно оси определяется как произведение площади этого элемента, умноженной на расстояние от центра тяжести элемента до оси.

Определим координаты центра тяжести сечения x_c и y_c по формулам:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4 \cdot 3) \cdot 1{,}5 + (2 \cdot 9) \cdot 4{,}5}{3 \cdot 4 + 2 \cdot 9} = 3{,}3 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{(4 \cdot 3) \cdot 4 + (2 \cdot 9) \cdot 1}{30} = 2{,}2 \text{ см}.$$

Правильные ответы: 2), 3).