§ 1. Аксиомы и основные определения абсолютной геометрии. Основные геометрические объекты и их свойства

1.1. Основные понятия и отношения абсолютной геометрии

Изучение форм, размеров предметов и их взаимного расположения составляет отдельную область человеческого знания, называемую ***геометрией***.

📖 Термин «*геометрия*» происходит от слияния двух древнегреческих слов γεω – «Земля» и μετρέω – «измеряю». Буквальный перевод звучит как «землемерие».

Геометрия изучает некоторые множества элементов, называемых ***точками*** и некоторые подмножества этого множества: ***прямые***, ***плоскости***, или, вообще говоря, ***фигуры***.

Фигурой на плоскости называется всякое множество точек этой плоскости, содержащее хотя бы одну точку. Термин «фигура» происходит от латинского слова *figura*, что означает *образ*, *вид*.

Для того чтобы отображать одну фигуру на другую, вводятся некоторые операции, применимые к элементам множества точек.

📖 Геометрию, изучаемую в средней школе, часто называют ***евклидовой*** – по имени древнегреческого математика Евклида (330-275 гг. до н.э.), написавшего один из первых курсов элементарной геометрии. Этот курс был изложен вместе с арифметикой в одиннадцати книгах и назван «Начала».

Постулаты Евклида:

1. Требуется, чтобы от всякой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.
2. И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.
3. И чтобы от любого центра можно было описать окружность любого радиуса.
4. И чтобы все прямые углы были равны.
5. Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих прямых, они пересекутся с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Совокупность теорем, которые могут быть выведены из системы аксиом, если аксиому параллельных заменить противоположным утверждением, называется ***неевклидовой геометрией Лобачевского***.

Абсолютная геометрия – это геометрия, в основе которой лежат аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных, то есть, это общая часть геометрии Евклида и Лобачевского.

Основные понятия геометрии – ***геометрическое тело, поверхность, линия, точка***.

Геометрическое тело рассматривается вне физических свойств предмета. Считается, что оно может свободно перемещаться и изменять своё положение среди других тел, не меняя размера, формы и взаимного расположения своих частей.

Тело отделяется ***поверхностью*** от прилегающих к нему других тел. У геометрической поверхности нет толщины.

При пересечении поверхностей образуется ***линия***. У линии нет ширины.

При пересечении двух линий образуется ***точка***. Точка не имеет никакого размера.

Простейшая из всех линий – ***прямая***. Простейшая поверхность – ***плоскость.***

Прямую линию обычно представляют безгранично продолженной в обе стороны. Обозначение прямой – малая латинская или две большие латинские буквы, которые обозначают две какие-либо точки этой прямой.

Часть прямой, все точки которой лежат по одну сторону от данной точки этой прямой – ***луч*** (***полупрямая***). Обозначение луча аналогично обозначению прямой.

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон точками, – ***отрезок***. Обозначение отрезка – две большие латинские буквы, поставленные при его концах.

Два луча, выходящие из одной точки, образуют фигуру, которая называется ***углом***.

Сами лучи при этом называются ***сторонами*** угла, а их общее начало – ***вершиной*** угла. Обозначение угла – одна большая латинская буква ($\angle A$), поставленная при его вершине либо три большие латинские буквы, из которых одна – при вершине, а две другие обозначают две какие-либо точки сторон угла ($\angle BAC$). Иногда углы обозначают одной малой латинской буквой ($\angle h$) или цифрой ($\angle 1$).

Внутренняя область угла целиком содержит все отрезки, концы которых лежат на сторонах угла. Оставшаяся часть плоскости – ***внешняя***.

Углы называются ***прилежащими***, если они имеют общую сторону, а их внутренние области не покрывают одна другую. На Рис. 1 это углы $\angle CAB$ и $\angle DAB$.

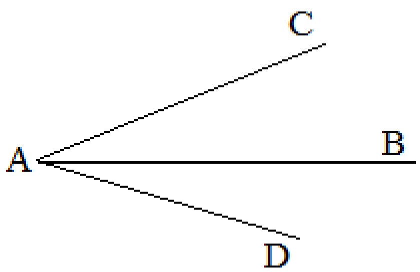


Рис. 1

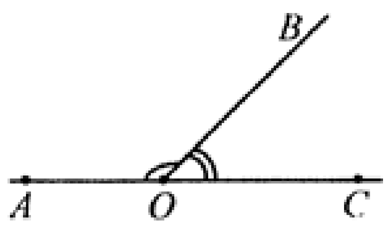


Рис. 2

Если у двух прилежащих углов не совпадающие стороны образуют одну прямую линию, то такие углы называются **смежными**. На Рис. 2 это углы $\angle COB$ и $\angle AOB$.

Угол называется ***развёрнутым***, если лучи, его образующие, составляют одну прямую. На Рис. 2 это угол $\angle AOC$.

Два угла называются ***равными***, если они могут быть совмещены так, что совпадут их вершины и соответствующие стороны.

Если смежные углы равны между собой, то каждый из них называется ***прямым***. Иначе, прямой угол – это угол, равный своему смежному углу. Из этого следует, свойство:

1^0) *Прямой угол равен половине развёрнутого.*

Если два угла имеют общие вершину и одну сторону, а вторая сторона одного из углов лежит между сторонами другого угла, то говорят, что первый из этих двух углов меньше второго (второй угол больше первого).

Прямые линии, образующие между собой прямой угол, называются ***взаимно перпендикулярными***. Обозначение: $AB \perp CD$.

Угол, меньший прямого угла, называется ***острым***, больший прямого – ***тупым***. В геометрии рассматриваются также ***нулевой*** и ***полный*** углы, у которых образующие их лучи совпадают.

Различие этих углов показано на Рис. 3 (слева – нулевой угол, а справа – полный угол).

Рис. 3

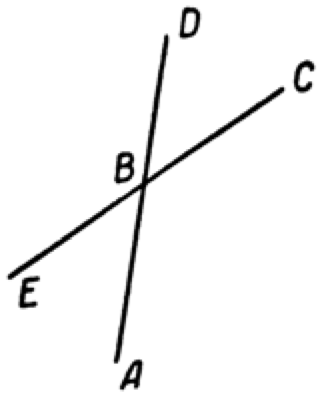


Рис. 4

Углы называются ***вертикальными***, если стороны одного из них служат продолжениями сторон другого. Так, на Рис. 4 $\angle EBA$ и $\angle BCD$ являются вертикальными.

2^0) *Вертикальные углы равны между собой.*

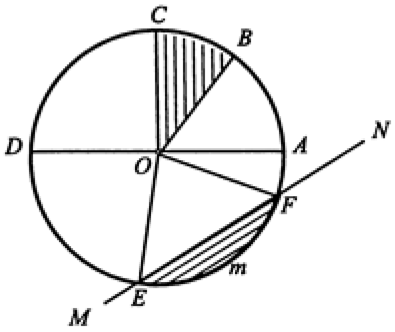


Рис. 5

Одной из важнейших фигур геометрии является ***окружность***.

Если придать циркулю произвольный раствор и, поставив одну его ножку острием в какую-нибудь точку *O* плоскости (Рис. 5), будем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на ней непрерывную линию, все точки которой будут одинаково удалены от точки *O*. Эта линия называется окружностью, а точка O – её ***центром***.

Отрезки *OA*, *OB*,..., соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются ***радиусами***.

Очевидно свойство: *все радиусы одной окружности равны между собой*.

Прямая (*MN*, Рис. 5), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется ***секущей***.

Отрезок прямой (*EP*), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется ***хордой***.

Всякая хорда (*AD*), проходящая через центр, называется *диаметром*.

Очевидно свойство: *диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой*.

Какая-нибудь часть окружности (например, *EmF*) называется ***дугой***.

О хорде (*EF*), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она *стягивает эту дугу*.

Не следует путать понятия «окружность» и «круг». Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется ***кругом***.

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть *COB*, покрытая штрихами на Рис. 5), называется ***сектором***, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть *EmF*), называется ***сегментом***.

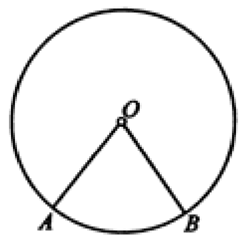


Рис. 6

Угол (*AOB*, Рис. 6), образованный двумя радиусами окружности, называется ***центральным углом***; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они соответствуют друг другу.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами.

В одном круге или в равных кругах:

3^0) *Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны*.

4^0) *Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны*.

Представим себе, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и ко всем точкам деления проведены радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности дуг называется ***дуговым градусом***, а каждый из образовавшихся при центре углов называется ***угловым градусом***. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $^1/_{360}$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу.

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых ***минутами***, а минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых ***секундами***).

🕮 Латинское слово *gradus* означает «шаг». Как заметили вавилонские жрецы, солнечный диск укладывается на пути, проходимым солнцем за день, 180 раз, т.е. солнце как бы делает 180 шагов. Обозначения градусов, напоминающие современные, были введены *Птолемеем* около 100–178 г.г.

Замечание. 1) Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за, ***град дуги*** принимают 1/100 четверти окружности, минуту принимают равной 1/100 града, секунду – 1/100 минуты. 2) Используется также и ***радианная мера угла***. В этом случае один ***радиан*** приписывается центральному углу, стороны которого заключают дугу окружности, равную радиусу. Такой центральный угол называется ***угловым радианом***, а соответствующая дуга – ***дуговым радианом***.

Для измерения углов употребляется особый прибор – ***транспортир***. Этот прибор (Рис. 7) представляет собой полукруг, дуга которого разделена на 180°. Чтобы измерить угол *DCE*, накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус *CB* был расположен по стороне *CE*. Тогда число градусов, содержащееся в дуге, заключенной между сторонами угла *DCE*, покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов.

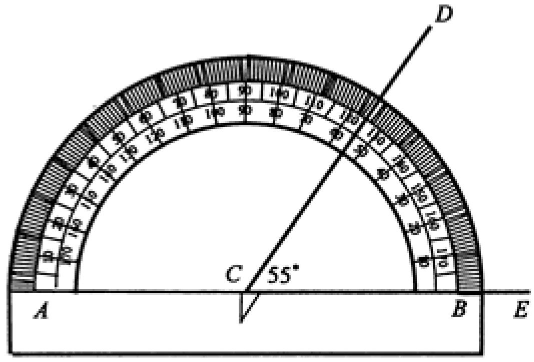


Рис. 7

5^0) *Развёрнутый угол имеет градусную меру, равную* 180°.

Обобщим понятия прямого, острого и тупого углов (с точки зрения их градусной меры).

Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла или четверть полного угла) есть *прямой угол*; угол, имеющий градусную меру, меньше 90°, есть *острый угол*, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, есть тупой угол (Рис. 8).

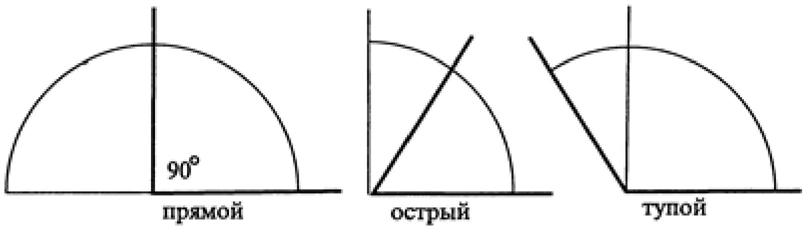


Рис. 8

6^0) *Все прямые углы, как содержащие одинаковое число градусов, равны между собой*.

🕮 Величину прямого угла иногда обозначают буквой *d* (начальная буква французского слова *droit*, которое означает «*прямой*»).

7^0) С*межные углы в сумме составляют развернутый угол*, то есть *сумма двух смежных углов равна* 180° (иначе, она равна сумме двух прямых углов).

8^0) *Если два угла равны, то и смежные с ними углы равны*.

Луч, который выходит из вершины угла и делит его на равные части, называется его ***биссектрисой***.

📖 Термин «*биссектриса*» происходит от латинского слова *bissectrix* – «делящая пополам». В старой математической литературе можно встретить другое название биссектрисы – «*равноделящая*».

Итак, сочетание точек, поверхностей и линий, как-либо расположенных друг относительно друга, образует геометрическую фигуру.

Геометрические фигуры разделяются на плоские и пространственные. У плоской фигуры все точки лежат на одной плоскости. Если не все точки фигуры лежат на одной плоскости, то эта фигура – пространственная. Часть геометрии, изучающая плоские фигуры, называется ***планиметрией***, пространственные – ***стереометрией***.

Первичными отношениями в геометрии являются:

- *отношение принадлежности*;
- *отношение лежать между*;
- *совмещаться движением*.

В геометрии используются первичные понятия из других отделов математики: множество, элемент множества, соотношение и др.

1.2. Система аксиом абсолютной геометрии. Аксиоматический метод её построения

Теоретической базой в геометрии является система операций и аксиом. ***Аксиома*** – это утверждение, которое принимается без доказательства.

📖 Термин «*аксиома*» впервые встречается у *Аристотеля* (384–322 г.г. до н.э.) и пришёл в математику от древнегреческих философов. Происходит он от греческого слова $\alpha\xi\iota o$, которое переводится как «важность», «уважение», «авторитет».

1 группа аксиом (аксиомы связи или принадлежности). В них определяются свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей, выраженных словом «принадлежать».

1-2. Существует единственная прямая, проходящая через две данные точки.

3. Существуют три точки, не принадлежащие общей прямой.

4-5. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. На плоскости существует по крайней мере одна точка.

6. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит ей.

7. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и ещё одну общую точку.

8. Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

2 группа аксиом (аксиомы порядка). Они выражают свойства взаимного расположения точек на прямой, определяют термин «лежать между».

1. Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит между точками C и A.

2. Для любых точек A и B существует точка C, такая, что B будет лежать между A и C.

3. Для любых точек *A, B, C* существует только одна точка, лежащая между двумя другими.
4. *Аксиома Паша*. Пусть точки *A, B, C* – три точки, не лежащие на одной прямой и *a* – некоторая прямая в плоскости *ABC*, не содержащая ни одной из точек *A, B, C*. Если прямая а проходит через точку отрезка *AB,* то она проходит также либо через точку *AC*, либо через точку отрезка *BC*.

<u>*3 группа аксиом (аксиомы равенства, конгруэнтности)*</u>.

1. Если *A* и *B* – две точки на прямой *a* и A' – точка на той же или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную сторону прямой a' от точки A' одну и только одну точку B', такую, что $AB = A'B'$.
2. Если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку *AB*, то они конгруэнтны друг другу.
3. Пусть *AB* и *BC* – два отрезка на прямой *a*, не имеющие общих внутренних точек и пусть $A'B'$ и $B'C'$ – два отрезка на той же или на другой прямой a', тоже не имеющие общих точек. Если при этом $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$.
4. Пусть даны: угол между лучами h и k на плоскости α, прямая a' на этой же или другой плоскости α', задана определённая сторона плоскости α' относительно прямой a'. Пусть h' – это луч прямой a', исходящий из точки O'. Тогда на плоскости α' существует единственный луч k', такой, что $\angle(h;k) \equiv \angle(h';k')$ и при этом все внутренние точки последнего угла лежат по заданную сторону от прямой a'.
5. Пусть *A, B, C* – три точки, не лежащие на одной прямой и A', B', C' – тоже три точки, не лежащие на одной прямой. Если при этом $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то $BC \equiv B'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

<u>*4 группа аксиом (аксиомы непрерывности)*</u>.

1. *Аксиома Архимеда*. Пусть *AB* и *CD* – произвольные отрезки. Тогда на прямой *AB* существует конечное число точек $A_1, A_2, ..., A_n$, расположенных так, что точка A_1 лежит между *A* и A_2, точка A_2 – между A_1 и A_3, …, причём отрезки $AA_1, A_1A_2, ...$ конгруэнтны отрезку *CD* и точка *B* лежит между *A* и A_n.
2. *Аксиома Кантора*. Если существует бесконечная последовательность вложенных отрезков, то существует такая точка α, которая принадлежит всем отрезкам.

<u>*5 группа аксиом (параллельности)*</u>.

В плоскости, определяемой прямой *a* и не лежащей на ней точкой *A* существует не более одной прямой, проходящей через точку *A* и не пересекающей прямую *a*.

Геометрия строится **дедуктивно** или **аксиоматически**. Это означает, что все теоремы (предложения) выводятся чисто логическим путём из нескольких предложений этой же теории, принятых за исходные (аксиомы). Аксиоматический метод – наиболее характерный метод в математике.

§ 2. Параллельные и перпендикулярные прямые на плоскости. Теорема Фалеса

Две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек. Обозначение: a ‖ b.

Кроме случая параллельности прямых могут быть ещё два случая взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые могут иметь бесконечно много общих точек (т.е. ***совпадать***), другими словами, каждая точка прямой a принадлежит прямой b и, наоборот, каждая точка прямой b принадлежит прямой a. В таком случае пишут: $a \equiv b$;

2) две прямые a и b на плоскости могут иметь одну общую точку, т.е. ***пересекаться***.

В связи с этим можно дать иное определение параллельных прямых: две прямые на плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются.

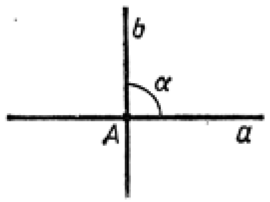


Рис. 9

Пусть a и b – две пересекающиеся прямые (Рис. 9). При пересечении этих прямых образуются четыре угла. Пусть α – один из этих углов. Тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом.

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом. Обозначение: $a \perp b$.

Отметим свойство перпендикулярных прямых.

1^0) *Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую и притом только одну.*

Перпендикуляром к прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом точку их пересечения. Этот конец называется ***основанием перпендикуляра***.

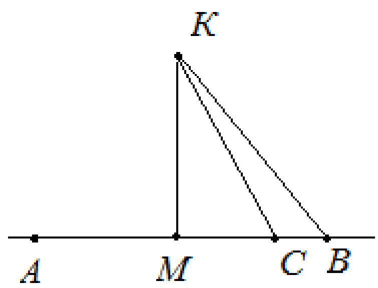


Рис. 10

Пусть AB – прямая. M – основание перпендикуляра, опущенного на неё из точки K; возьмём на AB произвольную точку C, отличную от M, и соединим её с точкой K. Полученная прямая образует с AB угол, отличный от прямого, и называется ***наклонной***. Точку C называют ***основанием наклонной***, а отрезок CM – ***проекцией наклонной***.

2^0) *Через точку K можно провести бесконечно много наклонных к AB.*

3^0) *Если из данной точки K к одной и той же прямой AB проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра.*

4^0) *Из двух наклонных, проведённых из одной точки K к прямой AB больше та, которая имеет большую проекцию.*

5^0) *Если две различные наклонные, проведённые к прямой AB из одной и той же точки K равны, то их основания лежат по разные стороны от основания пер-*

пендикуляра, опущенного на АВ из той же точки, на равных расстояниях от него.
6^0) *Пусть две равные наклонные проведены из точки К к прямой АВ. Проводя прямую через К и середину отрезка между основаниями наклонных, получим перпендикуляр к прямой АВ*

Отметим свойство параллельных прямых.

7^0) *Две различные прямые на плоскости, порознь параллельные третьей прямой, параллельны между собой.*

Рассмотрим пару параллельных прямых *AB* и *CD*, а также какую-либо прямую *m*, не параллельную им (***секущую***).

При пересечении двух параллельных прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой (Рис.11) образуется восемь углов:

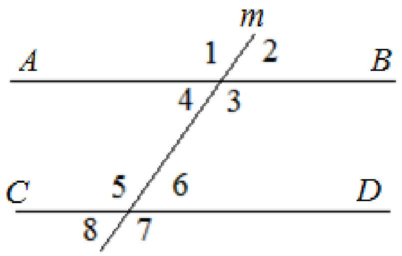


Рис. 11

соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$;
внутренние односторонние: $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$;
внешние односторонние: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$;
внутренние накрест лежащие: $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 5$;
внешние накрест лежащие: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

Имеют место свойства:

8^0) *Соответственные углы равны*, т.е. $\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 8$; $\angle 3 = \angle 7$.
9^0) *Внутренние накрест лежащие углы равны*, т.е. $\angle 4 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 5$.
10^0) *Внешние накрест лежащие углы равны*, т.е. $\angle 1 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 8$.
11^0) *Односторонние* (*как внутренние, так и внешние*) углы в сумме составляют $180°$, т.е. $\angle 1 + \angle 8 = 180°$; $\angle 2 + \angle 7 = 180°$; $\angle 4 + \angle 5 = 180°$; $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.
12^0) *Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна* $180°$, *то прямые параллельны.*
13^0) *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.*
14^0) *Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.*
15^0) *Различные прямые порознь перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой.*
16^0) *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.*

Рассмотрим также свойства углов с параллельными или перпендикулярными сторонами:

17^0) *Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам c и d другого угла и одинаково*

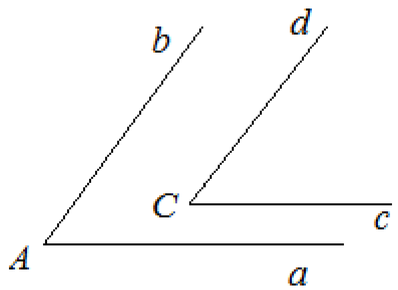


Рис. 12

с ним направлены, то такие углы равны, т.е. если a ∥ b *и* b ∥ d, *то* $\angle A = \angle C$ (см. Рис 12).

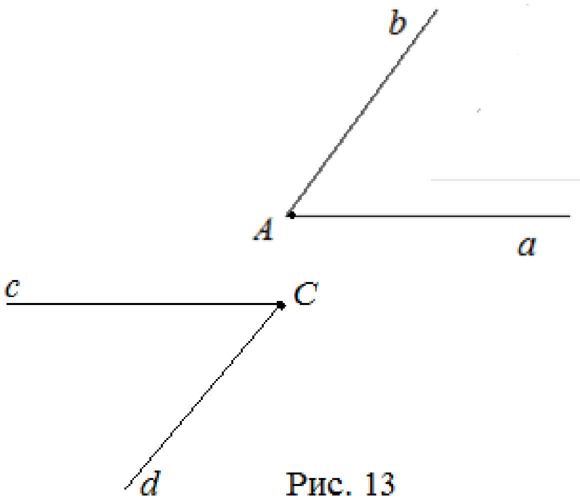


Рис. 13

18^0) *Если стороны a и b одного угла соответственно параллельны сторонам c и d другого угла, но противоположно направлены, то такие углы также равны, т.е.* $\angle A = \angle C$ (см. Рис 13).

19^0) *Если стороны a и c параллельны и одинаково направлены, а стороны b и d противоположно направлены, то углы* $\angle A$ и $\angle C$ дополняют друг друга до развёрнутого угла, т.е. $\angle A + \angle C = 180^0$.

20^0) *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг до развёрнутого угла.*

Теорема (**Фалеса**). *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Теорема (**о пропорциональных отрезках**). П*араллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.*

🕮 *Фалес Милетский* (ок. 625– ок. 547 г. до н.э.) древнегреческий философ, математик и астроном, основатель геометрии.

§ 3. Основные планиметрические фигуры, их признаки, свойства, метрические отношения в них

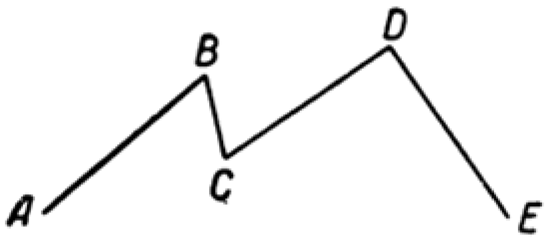


Рис. 14

Если на плоскости задано несколько точек, не лежащих на одной прямой, то их можно последовательно, в произвольном порядке соединить отрезками прямых линий. Совокупность этих орезков называется ***ломаной*** линией.

Отрезки *AB, BC, CD, DE* (см. Рис. 14) – **звенья** ломаной. Точки *A, B, C, D, E* – ***вершины*** ломаной.

Ломаная называется ***выпуклой***, если все её звенья лежат по одну сторону от каждого из них, если их неограниченно продолжить. Ломаная называется ***замкнутой***, если её начало и конец совпадают.

Многоугольником на плоскости или ***одномерным многоугольником*** называется фигура, образованная плоской замкнутой ломаной. Звенья ломаной, то есть, отрезки, называются ***сторонами многоугольника***. ***Смежные*** стороны имеют общую точку, которая не является внутренней точкой для этих отрезков. Эта общая точка называется ***вершиной***. При каждой вершине многоугольника находится один из его углов. Вершины, принадлежащие одной стороне, называются ***смежными***. ***Диагональ*** – это отрезок, соединяющий две несмежные вершины.

Многоугольник на плоскости называется ***простым***, если его стороны не пересекаются во внутренних точках и в вершинах сходятся лишь две стороны.

Теорема Жордана. Всякий плоский многоугольник делит плоскость на две области, в одной из которых содержатся целые прямые (она называется внешней), в другой – не содержатся целые прямые (внутренняя). Соответственно точки внешней и внутренней области называются внешними и внутренними.

Двумерным многоугольником называется соединение одномерного многоугольника с множеством внутренних точек. При этом одномерный многоугольник называется контуром двумерного. Для двумерного многоугольника имеют смысл понятия выпуклости и связности.

Теорема. Сумма внутренних углов простого многоугольника равна

$$\boxed{180^0(n-2)=2d(n-2).} \qquad (3.1)$$

Доказательство: проведём методом математической индукции

1) Проверим для $n=3$: $180^0(3-2)=180^0\cdot 1=180^0$ – истинно.

2) Пусть верно для $n\le k$, то есть, если $k_1\le k$, то $\sum уг.=180^0(k_1-2)$.

3) Рассмотрим многоугольник с числом сторон $n=k+1$. Его можно разбить на два простых многоугольника с числом сторон n_1 и n_2, где $n_1<n$ и $n_2<n$. Пусть $n_1\le k$, $n_2\le k$ и $n_1+n_2=n+2$. Для этих двух многоугольников выполняется допущение и, следовательно, сумма внутренних углов искомого многоугольника: $180^0(n_1-2)+180^0(n_2-2)=180^0(n_1+n_2-4)=180^0(n+2-4)=180^0(n-2)$.

Что требовалось доказать.

Многоугольник (как и вообще любая плоская фигура) может рассматриваться как множество, состоящее из точек плоскости, и называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя точками он содержит соединяющий их отрезок. Иначе, многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от любой прямой, соединяющей его соседние вершины.

На Рис. 15 слева изображён выпуклый многоугольник (точнее четырёхугольник), а справа – невыпуклый.

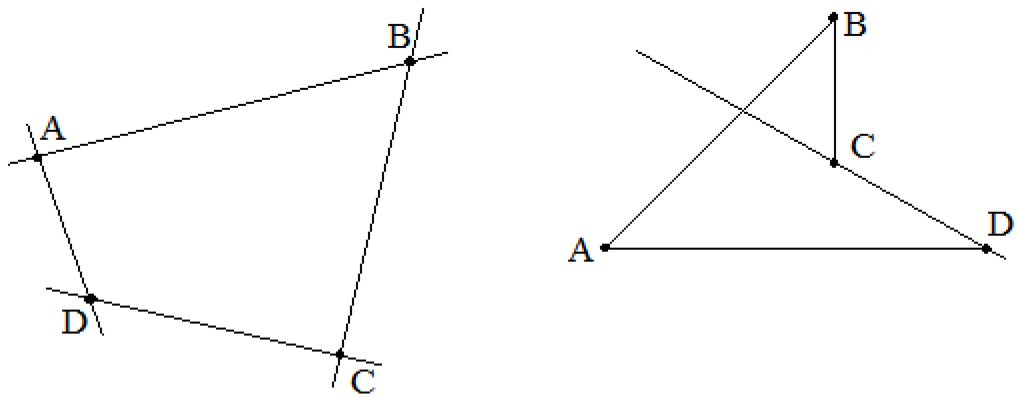


Рис. 15

Простой многоугольник называется ***правильным***, если все его стороны одинаковы и все углы равны между собой. Существование правильных многоугольников обеспечивается возможностью их построения делением окружности на равные части.

Теорема. Всякий правильный многоугольник является выпуклым.

Равноугольным или ***полуправильным*** называется многоугольник, у которого углы равны, а стороны равны через одну.
Способ их построения – метод среза.

Многоугольники классифицируются на виды в первую очередь в зависимости от количества сторон.

Треугольник **–** это многоугольник, у которого три стороны. Треугольник относится к простейшим геометрическим фигурам. Очевидно, всякий треугольник является выпуклой фигурой.

🕮 Свойства треугольника, изучающиеся в школе, за редким исключением, известны с античности. Дальнейшее изучение треугольника началось в XVII веке: была доказана теорема *Дезарга* (1636), открыты некоторые свойства точки *Торричелли* (1659). В XVIII веке была обнаружена *прямая Эйлера* и *окружность шести точек* (1765). В 1828 году была доказана *теорема Фейербаха*. В начале XIX века была открыта точка *Жергонна*. Над созданием совокупности фактов, называемых в настоящее время *геометрией треугольника*, работали *Пифагор*, *Евклид*, *Архимед*, *Менелай*, *Чева*, *Дезарг*, *Торричелли*, *Паскаль*, *Лейбниц*, *Ньютон*, *Эйлер*, *Лагранж*, *Жергонн*, Понселе и многие другие.

Но его роль определяется разнообразием практических применений. Изучение многих геометрических фигур осуществляется через разложение их на треугольники (*триангуляцию*) и раскрытие зависимостей между элементами этих треугольников. Известно, например, что всякий плоский многоугольник разлагается на треугольники (триангулируем) его диагоналями, причём все элементы многоугольника (стороны, углы, диагонали, площадь и т.д.) вполне определяются соответствующими элементами этих треугольников. В частности, выпуклый n-угольник разлагается на n-2 треугольника диагоналями, проведёнными из любой его вершины.

Разложение на треугольники криволинейных фигур уже невозможно. Однако в тех случаях, когда криволинейная фигура может быть получена через предельный переход от вписанного в неё многоугольника, разлагают на треугольники этот многоугольник и через предельный переход устанавливают связи элементов криволинейной фигуры с деформирующимися (в процессе предельного перехода) элементами этих треугольников. В соответствии с этим при изучении треугольника актуальны понятия вписанной и описанной окружностей.

Так, например, поступают в геометрии при изучении круга и окружности. Эти криволинейные фигуры получаются через предельный переход от вписанного в них правильного многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон; причём площадь круга оказывается равной пределу суммы площадей треугольников, на которые разлагается вписанный многоугольник, а длина окружности равна пределу суммы соответствующих сторон этих треугольников.

В технической практике при сооружении различных конструкций из стержней учитывается ещё одна особенность треугольника: конструкции треугольной формы, сделанные из стержней, обладают свойством «жёсткости» и «устойчивости», тогда как конструкции в форме многоугольника легко деформируются. Именно это обстоятельство заставляет инженеров при сооружении различных арок, мостов, перекрытий для крыш и т.п. «разлагать» конструкции многоугольной формы на треугольные, внесением в них вспомогательных стержней-укосов (Рис. 16).

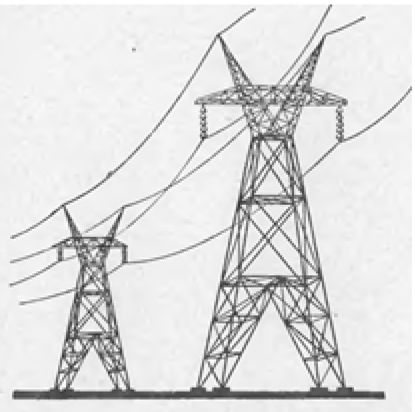


Рис. 16

Таким образом, как в теории, так и на практике треугольник служит существенным элементом геометрических фигур. Поэтому треугольник подробно изучается в геометрии.

Итак, ***треугольники*** – это геометрические фигуры, которые имеют три стороны, три угла и их площадь ограничена тремя точками и тремя отрезками, которые соединяют эти точки.

§ 4. Треугольник и его основные элементы. Классификация треугольников

В самом конце предыдущего пункта дано определение треугольника. Приведём иные определения треугольника:

1) Замкнутая ломаная линия, состоящая из трех звеньев, называется ***треугольником***.

2) ***Треугольник*** **–** это многоугольник, у которого три стороны.

3) ***Треугольником*** называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. При этом точки называются ***вершинами*** треугольника, а отрезки – ***сторонами*** треугольника.

Основными элементами треугольника являются его *стороны* и *углы*.

Треугольники различаются между собой, во-первых, по характеру углов, а во-вторых, по характеру сторон.

По *характеру углов* выделяют следующие виды треугольников:

1) ***остроугольный***, если все его углы острые;

2) ***прямоугольный***, если один из его углов прямой; сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, а стороны, образующие прямой угол, катетами;

3) ***тупоугольный***, если один из его углов тупой.

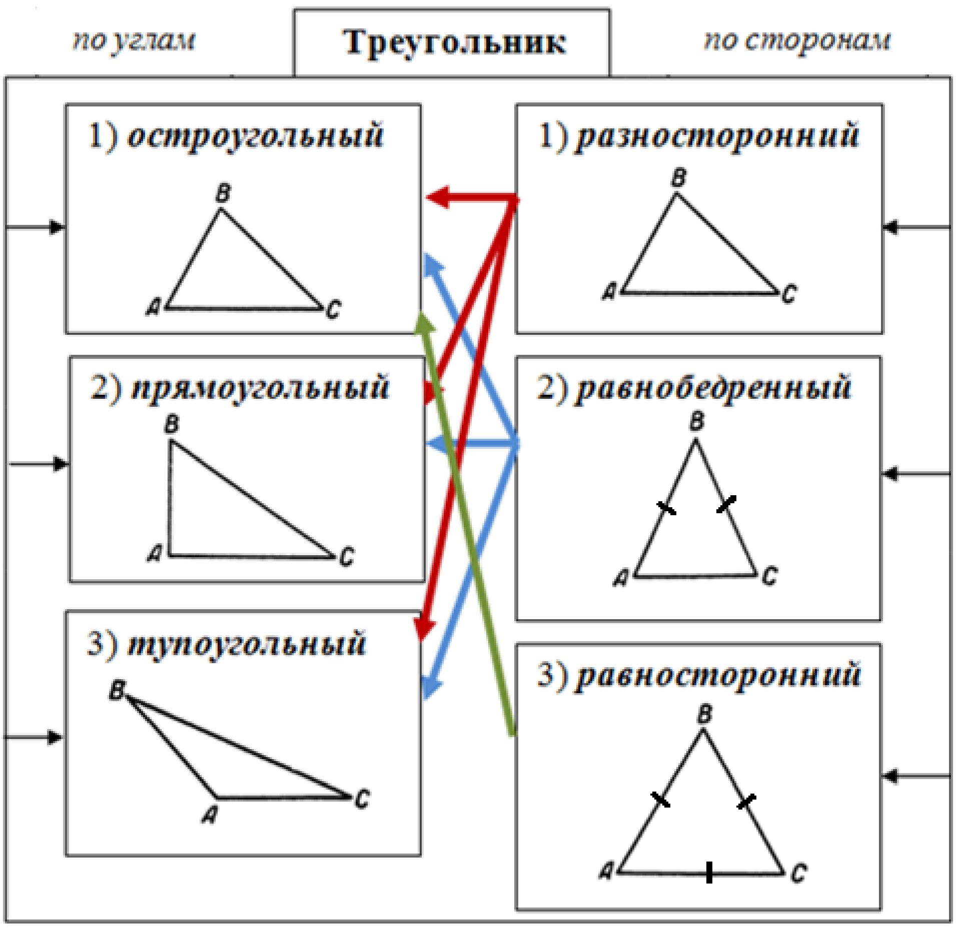
По характеру сторон классифицируют следующие виды треугольников:

1) ***разносторонний***, если все его стороны имеют разную длину;

2) ***равнобедренный***, если две его стороны равны между собой; сторона, не равная двум другим, называется ***основанием***;

3) ***равносторонний*** (правильный), если все три его стороны имеют одинаковую длину.

Представим классификацию треугольников в виде схемы.



К основным линиям треугольника относятся: медиана, биссектриса, высота и серединный перпендикуляр.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла, который соединяет вершину угла с точкой, которая лежит на противолежащей стороне треугольника.

Высота треугольника – это перпендикуляр, который проведён из вершины фигуры к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.

Серединным перпендикуляром (***медиатрисой***) треугольника называют прямую, которая проходит через середину отрезка (стороны треугольника) перпендикулярно ему.