Содержание

Введение

Одним из заданий повышенного уровня сложности на ЕГЭ является текстовая задача социально-экономической тематики. Это задание на применение математических методов для решения практических задач из различных областей жизни и интерпретацию полученного результата с учётом реальных ограничений. Решение подобных заданий предполагает проверку следующих умений учащихся:

- переходить от текста задачи к построению соответствующей математической модели;
- обращаться с целыми числами, то есть уметь использовать при решении задач элементы теории делимости целых чисел;
- производить действия со степенями с натуральным показателем;
- обращаться с простыми процентами, сложными (банковскими) процентами и долями.

Как показывает анализ содержания подобных задач, сюжеты, описанные в них, являются некоторыми текстовыми упрощениями, моделями реально возникающих в жизни ситуаций. Кроме того, сами сюжеты условно можно разделить на два типа: использующие дискретные модели (проценты, погашения кредитов и т. д.) и использующие непрерывные модели (различные производства, протяжённые во времени, объёмы продукции и т. д.).

За правильное выполнение этого задания выставляется два балла по следующим критериям.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Из приведённой таблицы следует, что верный переход от текстового условия к решению математической задачи, адекватной первоначальному сюжету, оценивается одним баллом. Правильное и достаточно обоснованное решение оценивается 2 баллами.

В таблице ниже указан средний процент решаемости этого задания участниками экзамена в период с 2021 по 2024 г.

<table>
<tr><th rowspan="2">Баллы</th><th colspan="4">Процент решаемости задания 16, %</th></tr>
<tr><td>2021 г.</td><td>2022 г.</td><td>2023 г.</td><td>2024 г.</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">Средний процент решаемости 19,0 %</td><td>5,2</td><td>4,3</td><td rowspan="2">Средний процент решаемости 5,2 %</td></tr>
<tr><td>2</td><td>31,5</td><td>8,4</td></tr>
</table>

В первой части нашего пособия рассматриваются задачи, связанные с построением экономико-математических моделей. Например, простейшие задачи на проценты, на пропорциональное деление величины, проценты и соотношения между величинами, на формулы простых и сложных процентов, задачи с целочисленными переменными и на оптимизацию, задачи на нахождение числовых характеристик дискретной случайной величины.

Во второй части пособия рассматриваются сюжетные практико-ориентированные задачи (о вкладах, кредитах, покупке акций, изменении цен, курсах валют, инфляционных процессах, выборах и социологических опросах, производстве и прибыли).

Регулярная и последовательная работа с нашим пособием поможет выпускникам сдать единый государственный экзамен по математике профильного уровня на высокий балл. Учителя могут использовать пособие для организации эффективной подготовки школьников, в том числе и дистанционно. При таком формате обучения рекомендуем предлагать задания пособия наиболее подготовленным выпускникам, стремящимся получить высокий балл на экзамене.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства legionrus@legionrus.com.

СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Экономико-математические модели

Рассмотрим некоторые математические модели и методы, которые являются необходимыми инструментами в анализе экономических задач.

Простейшие задачи на проценты

Процент — сотая доля целого (принимаемого за единицу); обозначается знаком «%». Поэтому процентом (от) какого-либо числа называется сотая часть этого числа. Определить p % от данного числа a означает вычислить произведение $0,01pa$.

Пусть число a составляет k % от числа b (k называется *процентным отношением* числа a к числу b).

Чтобы найти проценты от данного числа, надо

1) выразить проценты в виде дроби;

2) умножить данное число на эту дробь.

Запишем это формулой:

$$a = \frac{k}{100} \cdot b.$$

Чтобы найти число по его процентам, надо

1) выразить проценты в виде дроби;

2) разделить данное число на эту дробь.

Запишем это формулой:

$$b = a : \frac{k}{100}.$$

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо

1) найти отношение этих чисел;

2) умножить это отношение на 100 и приписать знак «%».

Запишем это формулой:

$$k = \frac{a}{b} \cdot 100\,(\%).$$

При сравнении двух величин та, с которой производится сравнение, — базовая величина, и она принимается за 100 %. В задачах на проценты сначала следует понять, какая величина принимается за 100 %.

Пример 1. (Открытый банк заданий, прототип 77345.) Только 94 % из 27 500 выпускников города правильно решили задачу 1. Сколько человек правильно решили задачу 1?

Решение.

1-й способ. Задачу решили $\frac{94}{100} \cdot 27\,500 = 94 \cdot 275 = 25\,850$ человек.

2-й способ. Примем 27 500 выпускников за 100 %. Тогда x выпускников, решивших задачу 1, составляют 94 %. Составим пропорцию $\frac{27\,500}{x} = \frac{100}{94}$, из которой найдём $x = \frac{27\,500 \cdot 94}{100} = 25\,850$.

Ответ: 25 850 человек.

Пример 2. (Открытый банк заданий, прототип 77344.) Призёрами городской олимпиады по математике стали 48 учеников, что составило 12 % от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Решение. *1-й способ*. Пусть в олимпиаде участвовали x человек. Тогда согласно условию задачи составим уравнение $\frac{12}{100} \cdot x = 48$, откуда найдём $x = \frac{4800}{12} = 400$.

2-й способ. Примем x учеников, участвующих в олимпиаде, за 100 %. Тогда 48 призёров олимпиады составляют 12 %. Составим пропорцию

$$\frac{x}{48} = \frac{100}{12}$$

и найдём $x = \frac{48 \cdot 100}{12} = 400$.

Ответ: 400 человек.

Пример 3. Число мальчиков в школе составляет 40% от общего числа учащихся. Каково процентное отношение числа девочек к числу мальчиков?

Решение. Число девочек в школе составляет $100\,\% - 40\,\% = 60\,\%$ от общего числа учащихся. Искомая величина равна $\frac{60}{40} \cdot 100 = 150\,(\,\%)$.

Ответ: 150 %.

Пример 4. Один из договоров о годичном страховании имущества от несчастных случаев предусматривает оплату 2,16 % страховой суммы при скидке 30 % для постоянных клиентов. Определите величину страхового платежа для повторного страхования дачного домика на сумму 20 000 рублей.

Решение. Исходя из условия, находим величину страхового платежа:

$$20\,000 \cdot 0{,}0216 \cdot 0,7 = 302{,}4\,(\text{руб.}).$$

Ответ: 302,4 рубля.

Пример 5. (Открытый банк заданий, прототип 99568.) Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение. Так как прибавление ещё одной зарплаты мужа увеличивает общий доход семьи на 67 %, то зарплата мужа составляет 67 % от общего дохода семьи. Так как уменьшение стипендии дочери втрое соответствует уменьшению общего дохода семьи на 4 %, то $\frac{2}{3}$ стипендии дочери составляют 4 % общего дохода семьи, а вся стипендия дочери соответственно составляет 6 % общего дохода семьи. На долю зарплаты жены приходятся оставшиеся

$$100\,\% - 67\,\% - 6\,\% = 27\,\%$$

общего дохода семьи.

Ответ: 27 %.

Пример 6. Свежие фрукты содержат 80 % воды, а сухие — 15 %. Сколько килограммов сухофруктов получится из 300 кг свежих фруктов?

Решение. 1) В свежих фруктах безводная часть составляет $100\,\% - 80\,\% = 20\,\%$.

2) $0{,}2 \cdot 300 = 60$ (кг) — безводная часть в свежих фруктах.

3) Сухофрукты содержат также 60 кг безводной части.

4) В сухофруктах безводная часть составляет $100\,\% - 15\,\% = 85\,\%$.

5) Масса сухофруктов составляет

$$60 : 0{,}85 = 6000 : 85 = 1200 : 17 = 70\frac{10}{17} \text{ кг.}$$

Ответ: $70\frac{10}{17}$ кг.

Задачи для самостоятельного решения

1. (Открытый банк заданий, прототип 26631.) В городе N живёт 200 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не имеет работы (пенсионеры и безработные). Сколько взрослых имеют работу?

2. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 6 килограммов изюма, если виноград содержит 90 % воды, а изюм содержит 5 % воды?

3. Жирность молока составляет 5 %, а сметаны — 25 %. Сколько килограммов сметаны можно получить из 800 кг молока?

4. Из учащихся, выполнявших контрольную работу, 30 % получили оценку «5», 40% — оценку «4», 8 учащихся — оценку «3», а остальные — оценку «2». Средний балл составил 3,9. Сколько учащихся выполняли работу?

5. Про опытных аналитиков Ивана и Давида известно, что ошибка их экономических прогнозов не превышает соответственно 5 % и 10 % от выданного прогноза. В каких пределах следует ожидать цену на бензин марки А-95 в следующем году, если прогноз Ивана составил 16 рублей, а прогноз Давида составил 18 рублей за литр? Предполагается, что опытные аналитики ошиблись не более чем обычно.

6. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

7. Компания застраховала перевозимый опасный груз на различные суммы в двух страховых обществах, плата за страховку (страховая премия) в которых составила 4 % и 5 % от страховой суммы соответственно. Суммарная страховая сумма составила 1 млн долларов, а суммарная плата за страховку — 46 000 долларов. На какую сумму застрахован груз в обществе со страховой премией в 5 %?

Пропорциональное деление величины

- Чтобы разделить число A на части, прямо пропорциональные данным числам a, b, c (разделить в данном отношении $a : b : c$), надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них:

$$A_a = \frac{Aa}{a+b+c},\ A_b = \frac{Ab}{a+b+c}, A_c = \frac{Ac}{a+b+c}.$$

Отметим, что $A_a + A_b + A_c = A$.

- Чтобы разделить число A на части, обратно пропорциональные данным числам a, b, c, надо разделить это число на части, прямо пропорциональные числам $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$.

- Пусть требуется найти, *в каком процентном соотношении находятся числа* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$. В этом случае необходимо определить, какой процент составляет каждое число по отношению к сумме этих чисел. Пусть k_a, k_b и k_c — искомые проценты, тогда

$$k_a = \frac{a}{a+b+c} \cdot 100,\ k_b = \frac{b}{a+b+c} \cdot 100,\ k_c = \frac{c}{a+b+c} \cdot 100.$$

Отметим, что $k_a + k_b + k_c = 100\,(\,\%)$.

Пример 7. (Открытый банк заданий, прототип 99570.) Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внёс 14 % уставного капитала, Антон — 42 000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внёс Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение. *1-й способ.* Митя внёс 14 %, или 0,14, уставного капитала. Антон внёс $\frac{42\,000}{200\,000} = 0,21$ уставного капитала. Гоша внёс 0,12 уставного капитала, а Борис внёс $1 - 0{,}14 - 0{,}21 - 0{,}12 = 0{,}53$ уставного капитала. Из прибыли размером в 1 000 000 рублей Борис получит $0{,}53 \cdot 100\,0000 = 530\,000$ рублей.

2-*й способ.* Митя внёс 14 % уставного капитала, Антон — $\frac{42\,000}{200\,000} \cdot 100 = 21$ % уставного капитала, Гоша — $0{,}12 \cdot 100 = 12\,\%$ уставного капитала. Тогда Борис внёс $100 - 14 - 21 - 12 = 53\,\%$ уставного капитала. Из прибыли размером в 1 000 000 рублей Борис получит $\frac{53}{100} \cdot 1000\,000 = 530\,000$ рублей.

Ответ: 530 000 рублей.

Пример 8. Три фирмы затратили на выполнение работы 740 000 рублей. Этот расход они распределили так, что каждый внёс сумму денег, обратно пропорциональную расстоянию от места объекта до работы. Первая фирма расположена в 4 км, вторая — в 5 км и третья — в 6 км от объекта. Сколько рублей должна уплатить за работу каждая фирма?

Решение. Фирмы должны разделить затраты прямо пропорционально числам $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. По свойству отношений имеем:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = \left(60 \cdot \frac{1}{4}\right) : \left(60 \cdot \frac{1}{5}\right) : \left(60 \cdot \frac{1}{6}\right) = 15 : 12 : 10.$$

Первая фирма должна уплатить

$$\frac{15}{15 + 12 + 10} \cdot 740\,000 = 300\,000\,(\text{руб.});$$

вторая фирма должна уплатить

$$\frac{12}{37} \cdot 740\,000 = 240\,000\,(\text{руб.});$$

третья фирма должна уплатить

$$\frac{10}{37} \cdot 740\,000 = 200\,000\,(\text{руб.}).$$

Ответ: 300 000 руб.; 240 000 руб.; 200 000 руб.

Задачи для самостоятельного решения

8. Фонды оплаты труда четырёх отделов компании соотносятся друг с другом как 2 : 3 : 5 : 6. Определите величину фондов оплаты труда каждого отдела, если суммарный фонд оплаты труда компании равен 128 млн рублей.

9. Разделите наследство в 1,5 млн рублей между тремя братьями так, чтобы на каждые 16 рублей, полученных старшим братом, приходилось семь рублей, полученных средним братом, и один рубль, полученный младшим братом.

10. Курсы иностранного языка арендуют в школе помещения для занятий. В первом полугодии за аренду четырёх классных комнат 6 дней в неделю школа получала 3 360 рублей в месяц. Какой будет арендная плата за месяц во втором полугодии за пять классных комнат 5 дней в неделю при тех же условиях?

11. Объёмы валового внутреннего продукта стран A, B и C, рассчитанные в долларах США, в 2016 г. относились как 1 : 3 : 2. В 2017 г. объём валового внутреннего продукта в каждой из этих стран вырос на 5 млрд долларов. В какой из стран были отмечены наибольшие темпы экономического роста?

12. (МГУ, 1994.) Четыре бригады разрабатывали месторождение медной руды в течение трёх лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На третьем году работа в течение двух месяцев не велась, а всё остальное время работала только одна из бригад. Отношения времени работы первой, второй, третьей и четвёртой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год 4 : 3 : 2 : 3 и 30 млн т;

во второй год 1 : 2 : 5 : 4 и 22 млн т;

в третий год 3 : 2 : 2 : 3 и 21 млн т.

Сколько млн т медной руды выработали бы за 5 месяцев четыре бригады, работая все вместе?

13. (МГУ, 1994.) Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объём торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август превысить в три раза, то суммарный объём торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастает в два раза. Найдите отношение объёмов торгов, запланированных на июль и на август, и выясните, во сколько раз надо увеличить план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объём торгов, проводимых в эти два месяца, возрос в три раза.

14. С расчётного счёта в банке *А* предприятие в апреле перевело некоторую сумму на свой расчётный счёт в банк *Б*, после чего на расчётном счёте в банке *А* оказалось в три раза больше денег, чем в банке *Б*. В мае предприятие перевело аналогичную сумму из банка *А* в банк *Б*, после чего на расчётном счете в банке *Б* денег стало в два раза меньше, чем в банке *А*. Во сколько раз сумма денег на расчётном счете предприятия в банке *А* была больше суммы денег на расчётном счете в банке *Б* изначально?

15. В целях стимулирования продаж магазин установил 10%-ную скидку на каждую пятую продаваемую газонокосилку и 25%-ную — на каждую тринадцатую продаваемую газонокосилку. В случае если на одну газонокосилку выпадают обе скидки, то применяется бо́льшая из них. Всего в ходе рекламной акции была продана 1 000 газонокосилок. Определите выручку магазина от продажи партии газонокосилок, если цена одной газонокосилки составляет 1 000 рублей.

16. Отец предполагал распределить некоторую сумму денег между своими тремя сыновьями (старшим, средним и младшим) в отношении $7 : 6 : 5$. Затем он изменил своё решение и эту же сумму разделил в отношении $6 : 5 : 4$. Известно, что в результате второго деления старший сын получил на 12 тысяч рублей больше, чем получил бы по первому делению. Какую сумму получил в результате каждый брат в качестве наследства?

17. За первый квартал автозавод выполнил 25 % годового плана выпуска машин. Количество машин, выпущенных за второй, третий и четвёртый кварталы, оказалось пропорциональным числам 15, 16 и 18. Определите перевыполнение годового плана выпуска в процентах, если во втором квартале автозавод выпустил продукции на 8 % больше, чем в первом.

18. Зарплаты рабочего за октябрь и ноябрь относятся как $1{,}5 : \frac{4}{3}$, а за ноябрь и декабрь — как $2 : \frac{8}{3}$. За декабрь он получил на 4 500 рублей больше, чем за октябрь, и за три месяца рабочему начислили премию в размере 20 % от трёхмесячного заработка. Найдите размер премии.

19. Две бригады за работу получили 2 425 000 рублей. Одна бригада из 13 человек работала 4 дня, а другая — из 15 человек — работала 3 дня. Сколько денег получила каждая бригада, если ежедневная оплата труда каждого рабочего одна и та же?

20. Три совхоза условились разделить расходы по ремонту моста пропорционально числу дворов и обратно пропорционально расстоянию каждого совхоза от моста. Как им распределить расход 5 532 000 рублей, если в первом совхозе было 84 двора, а расстояние до моста 3 км; во втором — 156 дворов, а расстояние — 2,6 км; в третьем — 56 дворов, а расстояние — $1\frac{3}{4}$ км?

Процентное изменение величины

Задачи на процентное изменение величины уже нельзя отнести к простейшим. Они решаются в несколько действий. В большинстве случаев их удобнее решать с помощью формул.

Здесь также можно выделить три задачи (прямая и две обратные), которые встречаются в задании №1 контрольно-измерительных материалов.

Пусть в задаче требуется определить число a, большее числа b на p %. Это условие записывают формулой $a = b + \frac{p}{100} \cdot b$ или кратко

$$a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot b.$$

В случае, если число a меньше числа b на p %, используется формула

$$a = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot b.$$

- Пусть некоторая величина A, меняющаяся со временем, имеет в начальный момент значение A_0, а через известный промежуток времени t_1 значение A_1. Обозначим процентный прирост (увеличение или уменьшение) величины A через p %. Для нахождения A_1 через A_0 и p используются формулы:

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ или } A_1 = A_0\left(1 - \frac{p}{100}\right).$$