ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Основные теоретические сведения» – приводятся основные теоретические сведения с достаточной полнотой и доказательно (заголовок раздела опускается). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

Опорный конспект целесообразен для первичного, быстрого ознакомления с курсом математики, а далее нужно продолжить изучение теорию по разделу «Основные теоретически сведения», где все изложено с достаточной полнотой и доказательно. Опорный конспект полезен и для закрепления изученного материала, для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Авторы надеются, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Они также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

1.1. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию, её производные (или дифференциалы).

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию, её производные или дифференциалы до порядка n включительно и имеет вид

$$F\left(x;\, y;\, y';\, y'';\, \ldots;\, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.1)$$

В этом уравнении x − независимая переменная, y − неизвестная функция, а $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ − производные неизвестной функции.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x;\, y;\, y') = 0, \qquad (1.2)$$

а если его удастся решить относительно производной, то оно запишется в ***нормальной*** форме:

$$y' = f(x;\, y). \qquad (1.3)$$

В некоторых случаях уравнение (1.3) удобно записывать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x;\, y) \text{ или в виде } f(x;\, y)dx - dy = 0,$$

которое является частным случаем более общего уравнения в ***дифференциальной форме***

$$P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = 0, \qquad (1.4)$$

где $P(x;\, y)$ и $Q(x;\, y)$ − известные функции.

Уравнение в симметричной форме (1.4) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в верное равенство.

Справедлива

Теорема 1 (***Коши***). *Если функция* $f(x; y)$ *непрерывна в точке* $M_0(x_0; y_0)$ *и в её окрестности, то существует решение* $y = y(x)$ *уравнения* (1.3), *такое, что* $y(x_0) = y_0$.

Если непрерывна также частная производная $\partial f / \partial y$ *данной функции, то это решение единственно.*

Общим решением уравнения первого порядка называется функция $y = y(x; C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения.

Общее решение, полученное в неявном виде:

$$\Phi(x;\ y;\ C) = 0,$$

называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Построенный на плоскости Oxy график всякого решения $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой*** этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = y(x; C)$ на плоскости Oxy соответствует ***семейство интегральных кривых***, зависящее от одного параметра – произвольной постоянной C.

Часто среди всех решений дифференциального уравнения, определяемых его общим решением, требуется найти такое, которое удовлетворяет условиям $y = y_0$ при $x = x_0$, где x_0 и y_0 − заданные числа. Геометрически это значит, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку плоскости $M(x_0; y_0)$.

Задание таких условий ($y = y_0$ при $x = x_0$), называется заданием ***начальных условий*** и записывается коротко так:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0\,.$$

Решения, которые получаются из общего решения $y = y(x; C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называются ***частными***.

Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Замечание. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C.

Такие решения (интегралы) называются ***особыми***.

Например, проверкой можно убедиться, что уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет общее решение $y = \sin(x + C)$, в то же время функция $y = 1$ также является решением этого уравнения, но это решение не может быть получено из общего решения ни при каких значениях C, т.е. является ***особым***.

Графиком особого решения является интегральная кривая. Интегральная кривая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых, определяемых общим решением. (Такая кривая называется ***огибающей*** семейства интегральных кривых.)

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием*** дифференциального уравнения.

Геометрический смысл основных понятий

Исходя из геометрического смысла производной y', заметим, что уравнение первого порядка $y' = f(x; y)$ задает в каждой точке $(x; y)$ плоскости Oxy значение $f(x; y)$ тангенса угла наклона (к оси Ox) касательной к графику решения, проходящего через эту точку.

Величину $k = \operatorname{tg}\alpha = f(x; y)$ далее будем называть ***угловым коэффициентом***. Если теперь в каждой точке $(x; y)$ задать с помощью некоторого вектора направление касательной, определяемое значением $f(x; y)$, то получится так называемое ***поле направлений***. Таким образом, геометрически задача интегрирования дифференциальных уравнений состоит в нахождении интегральных кривых, которые в каждой своей точке имеют заданное направление касательной.

Общее решение – однопараметрическое семейство интегральных кривых $y = y(x; C)$, где C − параметр.

Частное решение уравнения $y' = f(x; y)$ − интегральная кривая $y = y(x; C_0)$, угловые коэффициенты касательных к которой определяются данным дифференциальным уравнением.
В области G, в которой выполняются все условия теоремы 1 (Коши), для уравнения (1.3) можно выделить однопараметрическое семейство линий $f(x; y) = k = \text{const}$, каждая из которых называется ***изоклиной***. Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, то есть $y' = k = \text{const}$.

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т.е. графически проинтегрировать это уравнение.

Пример 1.1. Для дифференциального уравнения $y' = -x/y$ с начальным условием $y_0 = 4$ при $x_0 = 3$ общее решение имеет вид $y^2 + x^2 = C^2$. Оно представляет собой семейство окружностей.

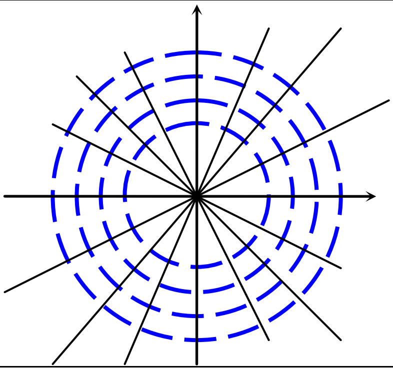
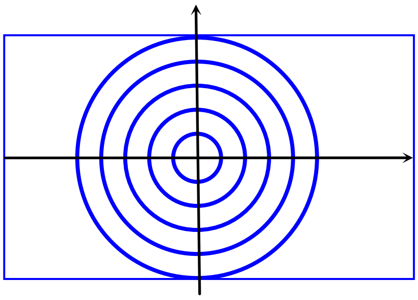
Если теперь в общее решение подставить начальные данные, то получим $4^2 + 3^2 = C^2$, то есть $C = 5$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее указанному начальному условию, есть $y^2 + x^2 = 25$. Геометрически это означает, что из всего множества окружностей, представляющих общее решение, выбирается одна окружность, проходящая через точку $M_0(3; 4)$.

Полагая $-x/y = k$ $(k = \text{const})$, находим изоклины $y = -x/y$ данного уравнения. Они представляют собой проходящие через начало координат прямые линии, вдоль которых поле направлений определяется равенством $y' = k = \text{tg}\,\alpha$. Придавая k различные значения, находим соответствующие изоклины, вдоль которых направление поля характеризуется углом α наклона к оси Ox касательной к интегральной линии. Необходимые вычисления приведены в виде таблицы.

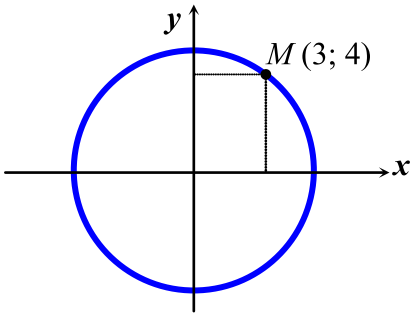
Таблица 1.1

k	0	$\pm 1/\sqrt{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\infty$
α	0	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$	$\pm\pi/2$
$y = -x/k$	$\pm\infty$	$y = \mp\sqrt{3}x$	$y = \mp x$	$y = \mp x/\sqrt{3}$	$y = 0$

Что есть что?

	
1. Дифференциальное ур-е $y' = -x/y$.	2. Общее решение $y^2 + x^2 = C^2$.

3. Частное решение $y^2 + x^2 = 25$.



1.2. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим методы нахождения решений дифференциальных уравнений первого порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решения.

1.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнением с разделяющимися переменными (тип I) называются уравнения вида

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)}, \quad \boxed{x' = g_1(x) \cdot g_2(y)},$$

$$\boxed{p_1(x) \cdot p_2(y)dx + q_1(x) \cdot q_2(y)dy = 0}.$$

Чтобы решить уравнение типа I надо разделить переменные, привести уравнение к виду с разделенными переменными

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

и проинтегрировать почленно.

Как разделять переменные?

Для отыскания решения уравнения

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \text{ или } x' = g_1(x) \cdot g_2(y)$$

нужно разделить в нем переменные. Для этого

1. заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ $\left(x' = \dfrac{dx}{dy}\right)$,
2. умножим обе части уравнения на dx (dy) (dx и dy ***должны быть только в числителях***),
3. разделим обе части уравнения на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую – только y, т.е. на $f_2(y)$ $\left(g_1(x)\right)$,
4. проинтегрируем обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения (особые), обращающие это выражение в нуль.

Пусть дифференциальное уравнение задано в дифференциальной форме (1.4). В частном случае, когда каждая из функций $P(x;\, y)$ и $Q(x;\, y)$ является произведением двух функций, одна из которых – функция только x, а вторая – только y, т.е. когда

$$P(x;\, y) = p_1(x) \cdot p_2(y), \text{ а } Q(x;\, y) = q_1(x) \cdot q_2(y),$$

уравнение примет вид $p_1(x) \cdot \underline{p_2(y)}dx + \underline{q_1(x)} \cdot q_2(y)dy = 0$.

Разделение переменных производится делением обеих частей полученного уравнения на произведение $p_2(y) \cdot q_1(x)$, в котором $p_2(y)$ – функция только от y, являющаяся множителем при dx, а $q_1(x)$ – функция только от x, являющаяся множителем при dx.

После деления на это произведение уравнение примет вид

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy = 0.$$

Это уравнение называется уравнением с разделенными переменными: при dx находится функция, зависящая только от x, при dy – только от y.

1.2.2. Однородные дифференциальные уравнения (тип II)

Функция $F(x;\, y)$ называется ***однородной функцией измерения k*** относительно аргументов x и y, если равенство $F(\lambda x;\, \lambda y) = \lambda^k F(x;\, y)$

справедливо для любого числа $\lambda \in \mathrm{R}$, при котором функция $F(\lambda x; \lambda y)$ определена $k = \mathrm{const}$.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме $y' = f(x; y)$ называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если $f(x; y)$ − однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

$$f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^0 f(x; y) = f(x; y).$$

Однородное дифференциальное уравнение в нормальной форме всегда можно записать в виде (положив $\lambda = \frac{1}{x}$) $y' = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Уравнение в дифференциальной форме $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ называется ***однородным***, если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ − однородные функции одного измерения.

Однородное уравнение с помощью замены

$$y = tx \ \left(t = \frac{y}{x}\right), \ y' = t'x + t$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $t(x)$.

Чтобы решить однородное уравнение, нужно:

1. ***Ввести подстановку***

$$t = \frac{y}{x}, \ y = tx, \ y' = t'x + t.$$

Получим уравнение типа I.

2. ***Разделить переменные и проинтегрировать уравнение типа I.***
3. ***Результат интегрирования упростить, пропотенцировать, если нужно, и записать общий интеграл, вернувшись к исходной переменной.***

1.2.3. Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение называется ***линейным***, если функция, ее производная входят в него в первой степени (линейно):

$$y' + p(x)y = q(x) \ \text{или} \ x' + p(y)x = q(y) \ − \text{тип III}.$$

Для решения уравнения типа III применяется ***метод подстановки***

$$y = uv \ (x = uv),$$

где $u = u(x), v = v(x)$ $\big(u = u(y), v = v(y)\big)$ − непрерывные функции, а также ***метод вариации произвольной постоянной***.

<u>Что необходимо для решения линейных уравнений</u>:

Уметь:

1. ***интегрировать по частя*** $\int u dv = uv - \int v du$.
2. ***заменять переменную***

$$\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{x = u(t)} \\ \underleftarrow{dx = u'(t)dt} \end{Bmatrix} = \int f(u(t))u'(t)dt,$$

стрелки в скобках указывают на два способа замены переменной.

3. ***Знать***, ***что для определения двух неизвестных величин нужна система из двух уравнений***.

Если в уравнении $y' + p(x)y = q(x)$ ввести замену

$$y = u \cdot v,\ y' = u'v + uv',\ \text{где}\ u = u(x), v = v(x).$$

Для определения *u* и *v* можно составить две идентичные системы

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \begin{array}{l} \nearrow u'v + u(v' + p(x)v) = q(x), \\ \searrow uv' + v(u' + p(x)u) = q(x), \end{array}$$

из верхнего уравнения получается одна система уравнений,

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x), \end{cases}$$

а из нижнего уравнения – вторая

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ uv' = q(x). \end{cases}$$

В каждой из систем первое уравнение выбрано произвольно потому, что две неизвестные *u* и *v* нельзя найти из одного уравнения. Пользоваться можно любой системой.

1.2.4. Уравнение Бернулли

Одним из уравнений, сводящихся к линейным уравнениям, является уравнение Бернулли (тип IV), которое имеет вид

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha} \ \text{или}\ x' + p(y) \cdot x = q(y) \cdot x^{\alpha},$$

где $\alpha \in \mathrm{R}$ $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$.

Преобразование уравнения Бернулли в линейное уравнение в такой последовательности:

1. умножим обе части уравнения на выражение $y^{-\alpha}$;

2. введём подстановку $z = y^{-\alpha+1}$. Обе части этого равенства продифференцируем:

$$z' = (-\alpha+1)y^{-\alpha}y';\ y^{-\alpha}y' = \frac{z'}{1-\alpha};$$

3. полученное линейное уравнение $\dfrac{z'}{-\alpha+1} + p(x)\cdot z = q(x)$ можно решить методом замены переменной или методом вариации;

4. возвратимся к искомой функции, заменяя y на $z = y^{-\alpha+1}$.

1.2.5. Уравнения в полных дифференциалах и сводящиеся к ним

Уравнение $P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах*** (тип V), если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x;\,y)dx + Q(x;\,y) = du(x;\,y).$$

В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x;\,y) = 0$, откуда следует, что соотношение $u(x;\,y) = C$ является его общим интегралом.

Выражение $P(x;\,y)dx + Q(x;\,y)dy$, где P, Q − непрерывные функции вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G, есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ во всей области G.

***Что нужно знать для успешного обучения решению уравнений типа* V *и уравнений, сводящихся к ним*?**

1. ***Понимать*** смысл символов $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$.

2. ***Уметь*** интегрировать частные дифференциалы:

Пусть $d_x u = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx = P(x;\,y)dx$, тогда

$$u = \int P(x;\,y)dx + C(y)\ \ (y = \text{const});$$

Если $d_y u = \dfrac{\partial u}{\partial y}dy = Q(x;\,y)dy$, то $u = \int Q(x;\,y)dy + C(x)\ \ (x = \text{const})$.

Как определять тип дифференциального уравнения первого порядка

- Прежде всего, нужно знать типы всех уравнений и признаки каждого из них на память.
- Затем усвоить алгоритм распознавания типа дифференциального уравнения, который состоит из проверки признаков типов дифференциальных уравнений.

Ниже приводится сводная таблица типов дифференциальных уравнений первого порядка и их признаков.

Тип	Название диф. ур-я	Общий вид	Признаки	Метод решения
I	Уравнение с разделяющимися переменными	$y' = f_1(x)f_2(y)$ или $p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0$	В правой части стоит произведение двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной	Разделение переменных и интегрирование
II	Однородное уравнение	$y' = f(x;\, y)$ $P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = 0$	$f(x;\, y)$ − однородная функция нулевого измерения; $P(x;\, y), Q(x;\, y)$ − однородные функции одного измерения	$t = \frac{y}{x}$, $y = tx$, $y' = t'x + t$
III	1. Линейное уравнение относительно $y(x)$ 2. Линейное уравнение относительно $x(y)$	$y' + p(x)\cdot y = q(x)$ $x' + p(y)\cdot x = q(y)$	Функция, ее производная входят в уравнение в первой степени (линейно)	$y = uv,\ y' = u'v + uv'$ $x = uv,\ x' = u'v + uv'$
IV	1. Уравнение Бернулли относительно $y(x)$ 2. Уравнение Бернулли относительно $x(y)$	$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$ $x' + p(y)\cdot x = q(y)\cdot x^{\alpha}$ $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$	Отличается от соответствующего линейного уравнения правой частью	Делим на y^{α} (x^{α}) $z = y^{1-\alpha},\ z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ $z = x^{1-\alpha},\ z' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x'$
V	Уравнение в полных дифференциалах	$P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = 0$	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	

Как только данное уравнение совпадает по признакам (или общему виду) с одним из типов, его следует решать, воспользовавшись соответствующим этому типу методом.

Чтобы определить дифференциального уравнения, его лучше записать либо в виде $y' = f(x;\, y)$, либо $P(x;\, y)dx + Q(x;\, y)dy = 0$ − как проще.

2.1. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x;\, y;\, y';\, y'') = 0 \qquad (2.1)$$

или

$$y'' = f(x;\, y;\, y'). \qquad (2.2)$$

Общим решением уравнения (2.1) называется функция

$$y = y(x;\, C_1;\, C_2) \qquad (2.3)$$

Эта функция зависит от переменной *x* и двух произвольных постоянных C_1, C_2, обращает данное уравнение в верное равенство.

Общее решение уравнения (2.1), заданное в неявном виде

$$\Phi(x;\, y;\, C_1;\, C_2) = 0, \tag{2.4}$$

называется ***общим интегралом***.

Частное решение

$$y = y(x;\, C_1^0;\, C_2^0), \tag{2.5}$$

где C_1^0, C_2^0 − фиксированные числа, получаются из общего решения (2.3) при фиксированных значениях C_1 и C_2.

Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_0) = y_0'$.

Константы C_1 и C_2 определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y(x;\, C_1;\, C_2), \\ y_0' = y_x'(x;\, C_1;\, C_2). \end{cases} \tag{2.6}$$

1.1. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три частных случая, когда решение уравнения (2.2) с помощью замены переменной сводится к решению уравнения первого порядка. Такие преобразования уравнения (2.2) называются ***понижением порядка***.

Уравнения вида $y'' = f(x)$

Уравнение не содержит y и y'.

Уравнение интегрируется подстановкой $\underline{\underline{z(x) = y'}}$, которая дает возможность свести его к уравнению с разделяющимися переменными y и z.

Уравнения вида $y'' = f(x;\, y')$

Уравнение не содержит y.

Положим, как и в предыдущем случае $z(x) = y'$, тогда $z'(x) = y''$, и уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно $z(x)$.

Уравнения вида $y'' = f(y;\, y')$

Уравнение не содержит x.

Вводим новую функцию $z(y)$, полагая $z(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z(y).$$

Подставляя в уравнение выражения для y' и y'', получаем уравнение первого порядка относительно z как функции от y:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y; z).$$

Ниже приводится сводная таблица трех типов дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка, и их признаков.

Тип	Вид уравнения	Признаки	Способ понижения порядка
А	$y'' = f(x)$	Нет явно y, y'	Подстановка $z(x) = y', z' = y''$
Б	$F(x; y'; y'') = 0$ или $y'' = f(x; y')$	Явно нет y	Подстановка $z(x) = y', z' = y''$
В	$F(y; y'; y'') = 0$ или $y'' = f(y; y')$	Явно нет x	Подстановка $z(y) = y', y'' = \frac{dz}{dt}z$

2.2. Однородные линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

в котором $p_i(x)\,(1 \le i \le n)$ − непрерывные функции на отрезке $[a; b]$, называется ***однородным линейным дифференциальным уравнением*** n-го ***порядка***.

С помощью дифференциального оператора n-го порядка

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

оно запишется так $L[y] = 0$.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ − n линейно независимых решений (***фундаментальная система решений***) уравнения $L[y] = 0$, то

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ − произвольные постоянные, есть его общее решение.

Если для уравнения $L[y] = 0$ на отрезке $[a; b]$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения, то для того чтобы n

решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ***определитель Вронского*** $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0\ \forall x \in [a; b]$. Решения y_1 и y_2 уравнения второго порядка $L[y] = 0$ линейно независимы, если $y_1 / y_2 \neq \text{const}$. В противном случае они линейно зависимы.

Вид общего решения уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = 0$ с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

1. Если k_1 и k_2 − различные и вещественные корни, общее решение уравнения $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.
2. Если $k_1 = k_2 = k$ − двукратный вещественный корень, общее решение имеет вид $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$.
3. Если $k_{1,2} = a \pm ib$ − комплексно-сопряженные корни, общее решение записывается в виде $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Зависимость общего решения от корней характеристического уравнения (k_1, k_2) отражена в следующей таблице

№	**Характер корней** (k_1, k_2) **характеристического уравнения** $k^2 + pk + q = 0$	**Вид общего решения уравнения** $y'' + py' + qy = 0$
1	Корни вещественные разные $k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	Корни вещественные равные $k_1 = k_2 = k$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
3	Комплексные корни $k_{1,2} = a \pm ib$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Что нужно знать для составления общих решений уравнения

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0\ ?}$$

1) ***Уметь*** составить характеристическое уравнение по виду дифференциального уравнения.

Чтобы составить характеристическое уравнение надо

в дифференциальном уравнении заменить производные степенями неизвестной величины *k*, причем степень *k* должна быть равна порядку соответствующей производной, а сама искомая функция y заменена единицей

(т.е. для этого нужно формально заменить $y^{(n)}$ $(0 \le n \le 2)$ любой буквой в степени n: $y = y^{(0)}$ заменить $k^0 = 1$,

$$y' = y^{(1)} = k,\ y'' = y^{(2)} = k^2).$$

2) ***Уметь*** решать квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ по формуле $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ или по теореме Виета $k_1 k_2 = q,\ k_1 + k_2 = -p$.

3) ***Знать*** на память вид общего решения в зависимости от k_1 и k_2.

Алгоритм отыскания общего решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$

1. Составить характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению.

2. Решить характеристическое уравнение и записать его корни $k_1,\ k_2$.

3. По виду корней $k_1,\ k_2$ записать общее решение.

Независимо от того, решили вы примеры или нет, разберитесь, как найдены общие решения данных уравнений.

№	Алгоритм / Уравнение	1) Составить хар-ое ур-е	2) Найти корни хар-ое ур-я	3) Записать общее решение
1	$y'' - 5y' + 6y = 0$	$k^2 - 5k + 6 = 0$	$k_1 = 2 \vee k_2 = 3$	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
2	$y'' + 6y' + 9 = 0$	$k^2 + 6k + 9 = 0$	$k_1 = k_2 = -3$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$
3	$y'' + 2y' + 5 = 0$	$k^2 + 2k + 5 = 0$	$k_{1,2} = -1 \pm 2i$ $a = -1,\ b = 2$	$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$
4	$y'' + 16y = 0$	$k^2 + 16 = 0$	$k_{1,2} = \pm 4i$ $a = 0,\ b = 4$	$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

2.3. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y'' + py' + qy = f(x)$.

Общее решение данного уравнения находится по формуле $y = y_о + y_ч$, где $y_о$ − общее решение соответствующего однородного уравнения $y_о'' + py_о' + qy_о = 0$, а $y_ч$ − частное решение неоднородного уравнения $y_ч'' + py_ч' + qy_ч = f(x)$.

В простейших случаях, когда функция $f(x)$, входящая в исходное уравнение, является многочленом, либо показательной функцией, либо тригонометрической функцией $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, либо линейной комбинацией перечисленных функций, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, не содержащим процесса интегрирования.

В дальнейшем будем употреблять символы $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ для обозначения многочленов степени n:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Рассмотрим некоторые виды правых частей неоднородного исходного уравнения, допускающие применение этого метода.

Правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)$

Частное решение $y_ч$ уравнения $y_ч'' + py_ч' + qy_ч = P_n(x)$ надо искать в виде

$$y_ч = \begin{cases} Q_n(x), \text{если } q \neq 0 \text{ (0 - не корень хар - го ур - я)}, \\ xQ_n(x), \text{если } q = 0,\ p \neq 0 \text{ (0 - простой корень хар - го ур - я)}, \\ x^2Q_n(x), \text{если } q = p = 0 \text{ (0 - двойной корень хар - го ур - я)}. \end{cases}$$

Во всех случаях за $Q_n(x)$ надо взять многочлен с неопределенными коэффициентами, которые находятся после подстановки $y_н$ в уравнение.

Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

Частное решение $y_ч$ уравнения $y_ч'' + py_ч' + qy_ч = e^{\alpha x}P_n(x)$ надо икать в виде

$$y_ч = \begin{cases} e^{\alpha x}Q_n(x), \alpha \text{ - не корень хар - го ур - я}, \\ e^{\alpha x}xQ_n(x), \ \alpha \text{ - простой корень хар - го ур - я}, \\ e^{\alpha x}x^2Q_n(x), \alpha \text{ - двойной корень хар - го ур - я}, \end{cases}$$

Во всех случаях за $Q_n(x)$ надо взять многочлен с неизвестными коэффициентами, которые определятся после подстановки $y_ч$ в уравнение.

Правая часть имеет вид $f(x) = a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x$

Частное решение $y_ч$ уравнения $y_ч'' + py_ч' + qy_ч = a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x$ надо искать в виде

$$y_ч = \left[\begin{array}{l} A\cos\beta x + B\sin\beta x,\ \beta i \text{ - не корень хар - го ур - я,} \\ x(A\cos\beta x + B\sin\beta x),\ \beta i \text{ - корень хар - го ур - я.} \end{array}\right.$$

Коэффициенты A и B определяются после подстановки $y_ч$ в уравнение.

Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x\right)$

где $P_n(x)$ **− многочлен степени** n**, а** $P_m(x)$ **− многочлен степени** m.

Частное решение $y_ч$ уравнения

$$y_o'' + py_o' + qy_o = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x\right)$$

надо искать в виде

$$y_ч = \left[\begin{array}{l} e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right), \alpha + \beta i \text{ - не корень хар - го ур - я,} \\ xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right), \alpha + \beta i \text{ - корень хар - го ур - я.} \end{array}\right.$$

Зависимость частного решения от корней характеристического уравнения (k_1, k_2) отражена в следующей таблице

Тип	Правая часть диф. ур-я $f(x)$	Корни хар-го ур-я	Виды частного решения y_o
I	$P_n(x)$	1. $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 2. $k_1 = 0$ (или $k_2 = 0$) 3. $k_1 = k_2 = 0$	$Q_n(x)$ $x \cdot Q_n(x)$ $x^2 \cdot Q_n(x)$
II	$e^{\alpha x}P_n(x)$	1. $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$ 2. $\alpha = k_1$, (или $\alpha = k_2$) 3. $\alpha = k_1 = k_2$	$e^{\alpha x}Q_n(x)$ $x \cdot e^{\alpha x}Q_n(x)$ $x^2 \cdot e^{\alpha x}Q_n(x)$
III	$a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x$	1. $0 \pm \beta i \neq 0 \pm bi$ $(k_{1,2} = 0 \pm bi)$ 2. $0 \pm \beta i = 0 \pm bi$ $(k_{1,2} = 0 \pm bi)$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$ $x \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x\right)$	1. $\alpha \pm \beta i \neq a \pm bi$ $(k_{1,2} = a \pm bi)$ 2. $\alpha \pm \beta i = a \pm bi$ $(k_{1,2} = a \pm bi)$	$e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$ $xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$

Здесь $Q_n(x), Q_1(x), Q_2(x)$ − многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x), P_m(x)$, а коэффициенты многочленов подлежат $Q_n(x), Q_1(x), Q_2(x)$ определению.

Для определения общего вида многочленов $Q_n(x), Q_1(x), Q_2(x)$ можно воспользоваться следующей таблицей

Данный многочлен в правой части ур-я $P_n(x)$	Наивысшая степень данного многочлена n	Общий вид искомого многочлена $Q_n(x)$
$2;\ -37;\ 23/27$	0	A
$x;\ -5x+3;\ 2x/3-3/7$	1	$Ax+B$
$3x^2-5x+7; -4x^2; 7x^2+9; x^2-13x$	2	Ax^2+Bx+C
$-5x^3;\ 2x^3+3;\ x^3-x^2+3x-23;$ $2x^3+5x;\ x^3/3+3x/7$	3	Ax^3+Bx^2+Cx+D

Неопределенные коэффициенты многочленов равенства находятся так.

1. В заданное уравнение подставляется частное решение $y_ч$.
2. Сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях.

Ниже на примерах укажем, как это выполняется практически.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференциального уравнения 1-го порядка.
2. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
3. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
4. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
5. Укажите геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.
6. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения 1-го порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решения.
7. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
8. Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ и укажите, где условия теоремы не выполняются.
9. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

10. Изложите метод нахождения общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
11. Дайте определение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка.
12. Изложите метод нахождения общего решения однородного дифференциального уравнения 1-го порядка.
13. Дайте определение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.
14. Изложите метод нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.
15. Дайте определение уравнения Бернулли.
16. Изложите метод нахождения общего решения уравнения Бернулли.
17. Дайте определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
18. Изложите метод нахождения общего решения дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
19. Что называется особым решением дифференциального уравнения?
20. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 2-го порядка.
21. Какие виды уравнений 2-го порядка допускают понижение порядка?
22. Как понизить порядок уравнения $y^{(n)} = f(x)$?
23. Что называется частным решением уравнения $y'' = f(x; y; y')$. Сколько начальных условий нужно для того, чтобы найти это частное решение?
24. Как понизить порядок уравнения $y'' = f(x; y')$?
25. Как понизить порядок уравнения $y'' = f(y; y')$?
26. Какие правила обращения с произвольной постоянной величиной вы усвоили?
27. Как решить задачу Коши для уравнений 2-го порядка?
28. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n-го порядка (однородного и неоднородного).
29. Докажите основные свойства частных решений однородного линейного дифференциального уравнения.
30. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций.
31. Докажите, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю.

32. Докажите теорему об общем решении однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
33. Изложите метод нахождения общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка, если известно одно его частное решение.
34. Выведите формулу для общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае вещественных различных корней характеристического уравнения.
35. Выведите формулу для общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае равных корней характеристического уравнения.
36. Выведите формулу для общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
37. Докажите теорему об общем решении однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
38. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ − многочлен степени $n \geq 0$.
39. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.
40. Докажите, что сумма частных решений уравнений

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \text{ и } y'' + py' + qy = f_2(x)$$

является решением уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.
41. Что называется нормальной системой дифференциальных уравнений 1-го порядка? Сформулируйте задачу Коши для этой системы.
42. Изложите метод для нахождения общего решения нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка сведением системы к одному дифференциальному уравнению (метод исключения).
43. Изложите метод для нахождения общего решения нормальной системы двух однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.