С благоговейным трепетом и священным восторгом
мы посвящаем эту книгу

ПРИНЦИПУ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Автор приложил особые старания к тому, чтобы с как можно большей простотой и отчетливостью изложить руководящие идеи теории, придерживаясь в целом той их последовательности и связи, в какой они возникли в действительности. В интересах ясности я не останавливался перед частыми повторениями, нисколько не считаясь с изяществом изложения. Я добросовестно следовал предписанию гениального теоретика Л. Больцмана, рекомендовавшего заботу об изяществе представить портным и башмачникам.

А. Эйнштейн,
«*О специальной и общей теории относительности*»
(перев. с 12-го изд. под ред. проф. С. Я. Лифшица)

Содержание

От издательства ... 12

Предисловие ... 13

Благодарности ... 19

Глава 1. Механика Лагранжа ... 21

1.1. Конфигурационное пространство ... 23
1.2. Обобщенные координаты ... 25
1.3. Принцип наименьшего действия ... 28
Наблюдение движения ... 28
Реализуемые траектории ... 28
1.4. Вычисление действий ... 33
Траектории минимального действия ... 37
Расчет траекторий, минимизирующих действие ... 38
1.5. Уравнения Лагранжа–Эйлера ... 42
Уравнения Лагранжа ... 42
1.5.1. Вывод уравнений Лагранжа ... 43
Непосредственный вывод ... 43
Вариационный оператор ... 44
Вывод уравнений Лагранжа с помощью вариационного оператора ... 46
Гармонический осциллятор ... 48
Движение по окружности в поле силы тяжести ... 49
1.5.2. Уравнения Лагранжа на компьютере ... 51
Свободная частица ... 51
Гармонический осциллятор ... 52
1.6. Откуда берутся лагранжианы? ... 54
Принцип Гамильтона ... 56
Равноускоренное движение ... 57
Центральное силовое поле ... 57
1.6.1. Преобразования координат ... 60
Кориолисовы и центробежные силы ... 63
1.6.2. Системы с жесткими связями ... 65
Лагранжианы для систем с жесткими связями ... 65
Маятник на шарнирном подвесе ... 66
Почему это работает ... 68
1.6.3. Связи как преобразования координат ... 74
1.6.4. Является ли лагранжиан системы единственным? ... 77
Полная производная по времени ... 78
Прибавление полных производных по времени к лагранжианам ... 79
Свойства полной производной по времени ... 81

1.7. Эволюция динамического состояния ... 82
Численное интегрирование ... 86
1.8. Сохраняющиеся величины ... 91
1.8.1. Сохранение импульса ... 91
Примеры сохраняющихся импульсов ... 92
1.8.2. Сохранение энергии ... 93
Энергия в терминах кинетической и потенциальной энергий ... 94
1.8.3. Центральные силы в трехмерном пространстве ... 95
1.8.4. Ограниченная задача трех тел ... 98
1.8.5. Теорема Нётер ... 100
Иллюстрация: движение в центральном поле ... 102
1.9. Абстрагирование функций траектории ... 104
Мгновенные уравнения Лагранжа ... 107
1.10. Движение с ограничивающими связями ... 108
1.10.1. Координатные связи ... 110
Интересное наблюдение ... 111
Альтернативный подход ... 111
Маятник со связями ... 112
Построение систем из частей ... 114
1.10.2. Связи как производные ... 116
Обруч Голдстейна ... 118
1.10.3. Неголономные системы ... 119
1.11. Резюме ... 122
1.12. Проекты ... 123

Глава 2. Твердые тела ... 126
2.1. Кинетическая энергия вращения ... 127
2.2. Кинематика вращательного движения ... 129
Реализация функций угловой скорости ... 131
2.3. Моменты инерции ... 132
2.4. Тензор инерции ... 135
2.5. Главные моменты инерции ... 136
2.6. Момент импульса ... 139
2.7. Углы Эйлера ... 141
2.8. Движение свободного твердого тела ... 144
Сохраняющиеся величины ... 144
2.8.1. Вычисление движения свободных твердых тел ... 146
2.8.2. Качественные особенности движения свободного твердого тела ... 148
2.9. Уравнения Эйлера ... 152
Уравнения Эйлера для твердых тел, совершающих вынужденное движение ... 155
2.10. Осесимметричные волчки ... 157
2.11. Спин-орбитальное взаимодействие ... 164
2.11.1. Вывод потенциальной энергии ... 164
2.11.2. Вращение Луны и Гипериона ... 168
2.11.3. Спин-орбитальный резонанс ... 174
2.12. Несингулярные координаты и кватернионы ... 178

Композиция вращений 182
2.12.1. Описание движения в терминах кватернионов 184
2.13. Резюме 187
2.14. Проекты 187

Глава 3. Гамильтонова механика 189
3.1. Уравнения Гамильтона 191
Иллюстрация 193
Гамильтоново состояние 194
Вычисление уравнений Гамильтона 196
3.1.1. Преобразование Лежандра 197
Преобразования Лежандра с пассивными аргументами 200
Преобразования Лежандра квадратичных функций 203
Вычисление гамильтонианов 203
3.1.2. Вывод уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия 206
3.1.3. Электрическая схема 207
3.2. Скобки Пуассона 209
Свойства скобки Пуассона 210
Скобка Пуассона сохраняющихся величин 211
3.3. Случай одной степени свободы 211
3.4. Уменьшение фазового пространства 214
Движение в центральном поле 215
Осесимметричный волчок 217
3.4.1. Упрощение лагранжиана 222
3.5. Эволюция в фазовом пространстве 224
3.5.1. Описание фазового пространства неоднозначно 226
3.6. Поверхности сечения 226
3.6.1. Системы, совершающие периодическое вынужденное движение 228
3.6.2. Вычисление стробоскопических поверхностей сечения 233
3.6.3. Автономные системы 234
Исторический фон для работы Энона–Хейлза 235
Система Энона и Хейлза 238
Интерпретация 242
3.6.4. Вычисление поверхностей сечения в системе Энона–Хейлза 245
3.6.5. Неосесимметричный волчок 247
3.7. Экспоненциальное расхождение 248
3.8. Теорема Лиувилля 251
Фазовый поток для маятника 251
Доказательство теоремы Лиувилля 253
Сохранение площади стробоскопических поверхностей сечения 255
Теорема Пуанкаре о возвращении 255
Газ в углу комнаты 256
Несуществование аттракторов в гамильтоновых системах 256
Сохранение фазового объема в диссипативной системе 257
Функции распределения 259
3.9. Стандартное отображение 259

3.10. Резюме ... 262
3.11. Проекты ... 263

Глава 4. Структура фазового пространства ... 265

4.1. Возникновение разделенного фазового пространства ... 266
Сечения маятника на шарнирном подвесе, когда амплитуда действующей силы нулевая ... 267
Сечения маятника на шарнирном подвесе для малой действующей силы ... 269
4.2. Линейный анализ устойчивости ... 270
4.2.1. Равновесие дифференциальных уравнений ... 271
4.2.2. Неподвижные точки отображений ... 273
4.2.3. Соотношения между показателями ... 276
Специализация гамильтониана ... 277
Линейная и нелинейная устойчивость ... 280
4.3. Гомоклинное переплетение ... 280
4.3.1. Вычисление устойчивого и неустойчивого многообразий ... 285
4.4. Интегрируемые системы ... 288
Типы орбит в интегрируемых системах ... 288
Поверхности сечения для интегрируемых систем ... 290
4.5. Теорема Пуанкаре–Биркгофа ... 292
4.5.1. Вычисление построения Пуанкаре–Биркгофа ... 296
4.6. Инвариантные кривые ... 299
4.6.1. Нахождение инвариантных кривых ... 300
4.6.2. Исчезновение инвариантных кривых ... 304
4.7. Резюме ... 304
4.8. Проекты ... 307

Глава 5. Канонические преобразования ... 308

5.1. Точечные преобразования ... 309
Реализация точечных преобразований ... 311
5.2. Общие канонические преобразования ... 314
Полярно-каноническое преобразование ... 316
5.2.1. Преобразования, зависящие от времени ... 318
Вращающиеся координаты ... 319
5.2.2. Абстрагирование условия каноничности ... 321
Примеры ... 322
Условие каноничности и скобки Пуассона ... 323
Симплектические матрицы ... 324
5.3. Инварианты канонических преобразований ... 327
Неинвариантность pv ... 327
Инвариантность скобок Пуассона ... 328
Сохранение объема ... 328
Симплектическая 2-форма ... 329
Интегральный инвариант Пуанкаре ... 331
5.4. Производящие функции ... 333

Полярно-каноническое преобразование ... 334
5.4.1. F_1 порождает канонические преобразования ... 335
5.4.2. Производящие функции и интегральные инварианты ... 337
Производящие функции типа F_1 ... 337
Производящие функции типа F_2 ... 339
Связь между F_1 и F_2 ... 340
5.4.3. Типы производящих функций ... 341
5.4.4. Точечные преобразования ... 342
Полярные и прямоугольные координаты ... 343
Вращающаяся система координат ... 344
Сведение задачи двух тел к задаче одного тела ... 344
Эпициклическое движение ... 347
5.4.5. Полные производные по времени ... 355
Маятник на шарнирном подвесе ... 357
5.5. Расширенное фазовое пространство ... 359
Ограниченная задача трех тел ... 363
5.5.1. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана ... 365
5.6. Приведенное фазовое пространство ... 366
Орбиты в центральном поле ... 367
Производящие функции в расширенном фазовом пространстве ... 369
5.7. Резюме ... 370
5.8. Проекты ... 371

Глава 6. Каноническая эволюция ... 374
6.1. Уравнение Гамильтона–Якоби ... 374
6.1.1. Гармонический осциллятор ... 376
6.1.2. Уравнение Гамильтона–Якоби для задачи Кеплера ... 380
6.1.3. F_2 и лагранжиан ... 383
6.1.4. Действие порождает эволюцию во времени ... 385
6.2. Эволюция во времени является канонической ... 387
Еще раз о теореме Лиувилля ... 388
Еще одно преобразование, связанное с эволюцией во времени ... 389
6.2.1. Другой взгляд на эволюцию во времени ... 392
Сохранение площади поверхности сечения ... 394
6.2.2. И еще один взгляд на эволюцию во времени ... 395
6.3. Преобразования Ли ... 397
Преобразования Ли функций ... 398
Простые преобразования Ли ... 399
Пример ... 401
6.4. Ряды Ли ... 402
Динамика ... 404
Вычисление рядов Ли ... 406
6.5. Экспоненциальные тождества ... 409
6.6. Резюме ... 410
6.7. Проекты ... 411

Глава 7. Каноническая теория возмущений 414
7.1. Теория возмущений, основанная на рядах Ли 415
7.2. Маятник как возмущенный ротор 417
7.2.1. Более высокий порядок 424
7.2.2. Исключение секулярных членов 426
7.3. Случай многих степеней свободы 428
7.3.1. Маятник на шарнирном подвесе как возмущенный ротор 430
7.4. Нелинейный резонанс 432
7.4.1. Аппроксимация маятника 434
Резонансы маятника на шарнирном подвесе 435
7.4.2. Чтение гамильтониана 439
7.4.3. Критерий перекрытия резонансов 441
7.4.4. Теория возмущения высшего порядка 442
7.4.5. Устойчивость перевернутого вертикального равновесия 443
7.5. Резюме 446
7.6. Проекты 447

Глава 8. Приложение: язык Scheme 449

Глава 9. Приложение: наша нотация 459

Литература 472

Предметный указатель 475

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

«Почти во всех учебниках, даже в лучших, этот принцип представлен так, что его нельзя понять» (Якоби К., *Лекции по динамике*, 1842–1843). Не решусь нарушать эту традицию.

В. И. Арнольд, «Математические методы классической механики». Наука, 1974, [5]

Если вы не можете объяснить что-то просто, вы недостаточно хорошо это понимаете.

Альберт Эйнштейн

Заметное возрождение интереса к классической теоретической механике, наблюдающееся в последние годы, связано с открытием глубинных, не предполагавшихся ранее слоев познания. Поведение классических[1] систем оказалось удивительно богато; вывод уравнений движения, находящийся в центре внимания традиционной механики, – это только начало. В классических механических системах был обнаружен сложный набор явлений, таких как нелинейные резонансы, хаотическое поведение и фазовые переходы к стохастическому поведению или хаосу.

В традиционных методах механики большая часть усилий сосредоточена на исследовании чрезвычайно узкого класса динамических систем, поведение которых поддается аналитическому описанию. Мы же будем изучать общие методы исследования поведения систем независимо от того, имеют описывающие их уравнения аналитическое решение или нет. Реальные динамические системы демонстрируют поведение, принципиально отличающее их от аналитически разрешимых систем, и это поведение бывает удивительно сложным. Мы намерены широко использовать компьютерное моделирование для изучения явлений движения.

Даже когда уравнения движения механической системы не допускают аналитического решения, инструменты современной динамики позволяют получить качественное понимание законов движения. Вместо того чтобы громоздить формулы, мы концентрируемся на геометрических особенностях набора возможных фазовых траекторий. Такие методы обеспечивают возможности для систематического анализа численных или экспериментальных данных.

Простота классической механики обманчива. Легко можно получить правильный ответ, даже используя ошибочные исходные предположения, без реального понимания сути задачи. Традиционная система математических обозначений подчас добавляет сложностей пониманию. Символические обо-

[1] То есть нерелятивистских. – *Прим. перев.*

значения имеют значения, которые зависят от контекста, а иногда меняют свое значение даже в пределах одной задачи[2]. Теоретическая механика основывается на уравнениях Лагранжа. В канонической форме уравнения Лагранжа имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Лагранжиан L здесь должен быть функцией обобщенных координат и скоростей q^i и $\dot{q}_i$, для того чтобы соответствующие частные производные были определены и существовали, однако чтобы производная по времени d/dt также была определена и существовала, в частные производные лагранжиана должны быть подставлены решения для траектории системы, дабы дифференцируемое выражение зависело только от времени. Традиционное использование неоднозначной нотации удобно в простых ситуациях, но в более сложных ситуациях может стать серьезным препятствием для четкого рассуждения. Чтобы выкладки были ясными и недвусмысленными, мы используем более точную математическую нотацию. Используемая нами нотация функциональна и соответствует современным математическим представлениям[3]. Ее подробное описание приведено в приложении.

Численные расчеты также необходимы для развития и реализации математических идей, лежащих в основе механики. Мы требуем, чтобы наши математические обозначения были настолько однозначными и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически с помощью компьютера. Вследствие этого формулы и уравнения, которые появляются в тексте, существуют самостоятельно, имея четкое значение независимо от неформаль-

---

2 В своей книге по математической педагогике [17] Ганс Фрейденталь утверждает, что использование двусмысленных и неявных соглашений в таких выражениях, как $f(x)$ и $df(x)/dx$, делает понимание математики, и особенно вводный курс дифференциального и интегрального исчисления, чрезвычайно сложным для начинающих студентов. Он советует преподавателям математики по возможности использовать более формальную современную нотацию.

3 В своей прекрасной книге «Математический анализ на многообразиях» [40] Майкл Спивак использует операторную форму записи. На стр. 44 он обсуждает некоторые проблемы классической нотации. Мы приводим особенно пикантный отрывок: Простое выражение [для производной сложной функции] в классической системе обозначений требует введения не относящихся к делу символов. Обычно выражение для $D_1(f\circ(g, h))$ записывается следующим образом:
Если $f(u, v)$ – функция такая, что $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, то:

$$\frac{\partial f(g(x,y),h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Здесь $\partial u/\partial x$ означает $\partial/\partial x\, f(x, y)$ и $\partial/\partial u\, f(u, v)$ означает $D_1 f(u, v) = D_1 f(g(x, y), h(x, y))$.] Обычно это уравнение записывается в упрощенной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Обратите внимание, что f в правой и левой частях этого уравнения имеет разный смысл!

ного контекста. Например, в операторной форме мы записываем уравнения Лагранжа следующим образом[4]:

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - \partial_1 L \circ \Gamma[q] = 0.$$

Здесь лагранжиан L – вещественная функция времени t, обобщенных координат x и скоростей v – $L(t, x, v)$. Обозначение частных производных позиционное – то есть для идентификации переменной, по которой берется производная, используется ее позиция или номер порядкового положения в обозначении функции; таким образом, оператор $\partial_2 L$ определяет функцию, полученную путем взятия частной производной функции Лагранжа L по переменной скорости, находящейся во второй позиции. Традиционные способы записи с частными производными, когда используются явно выписанные производные по «переменным», могут зависеть от контекста, что может привести к двусмысленности[5]. Частные производные лагранжиана затем явным образом вычисляются вдоль пути q. Берется производная по времени, и получаются уравнения Лагранжа. На каждом шаге используются только явные методы, вся процедура вывода уравнений движения из лагранжиана свободна от «скрытых» подстановок.

Численные методы применяются для точного расчета динамики при анализе механических систем. Реализация методов вариационной механики на языке компьютеров заставляет их быть однозначными и вычислительно эффективными. Численные расчеты требуют от нас точности в представлении механических и геометрических понятий как объектов вычислений и позволяют явно составлять алгоритмы для манипулирования этими объектами. Кроме того, после формализации в виде процедуры математическая идея становится инструментом, который можно использовать непосредственно для получения результатов.

Активное участие в исследовании со стороны студента является неотъемлемой частью процесса обучения. Необходимо сосредоточиться на глубоком понимании движения систем; чтобы понять эволюцию динамических систем, студент должен активно исследовать их движение с помощью компьютерного моделирования и эксперимента. Упражнения и проекты являются неотъемлемой частью процесса обучения.

То, что математический формализм достаточно точен, чтобы его можно было интерпретировать автоматически, позволяет использовать компьютеры для активных исследований. Требование, чтобы компьютер мог интерпретировать любое выражение, обеспечивает строгую и немедленную обратную связь относительно того, правильно ли сформулировано выражение.

---

[4] Здесь это уравнение приводится без пояснений, чтобы должным образом заинтриговать читателя. В основном тексте, разумеется, приведено подробное разъяснение.

[5] Приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в самом обозначении которого уже кроется двусмысленность (В. И. Арнольд, «*Математические методы классической механики*» [5], §47, с. 222. См. также сноску на этой странице).

Опыт показывает, что такое интерактивное взаимодействие с компьютером быстрее выявляет и исправляет многие недостатки в понимании.

В этой книге мы используем для написания программ Scheme – вариант языка программирования Lisp, который также применяется на вводном курсе информатики в Массачусетском технологическом институте. Существует много хороших описаний Scheme, здесь мы приводим только краткое введение в этот язык программирования в приложении.

Даже во вводном курсе информатики мы никогда специально не занимаемся изучением языка, потому что это не нужно. Мы просто начинаем использовать его, вначале в простых ситуациях, и студенты способны успешно программировать уже через несколько дней. Это одно из больших преимуществ Lisp-подобных языков: у них очень мало способов формирования сложных выражений и почти нет синтаксической структуры. Все формальные свойства могут быть изучены за час, как правила шахмат. Через некоторое время мы забываем о синтаксических деталях языка (потому что их нет) и переходим к реальным задачам – выясняем, что мы хотим вычислить.

Преимущество Scheme перед другими языками для расчетов в области классической механики заключается в том, что манипулирование процедурами, реализующими математические функции, в нем организуется проще и естественнее, чем в других компьютерных языках. Действительно, многие теоремы механики непосредственно представимы в виде программ на Scheme.

Версия Scheme, которая используется в этой книге, – вариант MIT/GNU, дополненный большой библиотекой программ под названием Scmutils, расширяющей операторы Scheme с целью сделать их универсально применимыми к различным математическим объектам, включая символические выражения. Библиотека Scmutils также обеспечивает поддержку численных методов, которые мы используем в этой книге, таких как интегрирование, решение систем дифференциальных уравнений и многопараметрическая оптимизация.

Система Scheme, дополненная библиотекой Scmutils, является свободным программным обеспечением. Мы предоставляем эту систему в комплекте с документацией и исходным кодом в форме, которую можно использовать с операционной системой GNU/Linux, в интернете по адресу mitpress.mit.edu/classical_mech.

В этой книге классическая механика представлена с необычной точки зрения. Изложение направлено на понимание динамики механических систем, а не на вывод уравнений движения. Мы вводим последние достижения в области нелинейной динамики на протяжении всего курса, а не только как запоздалое дополнение. Используя операторную математическую систему обозначений, мы облегчаем точное понимание фундаментальных свойств классической механики. Мы применяем численные вычисления для закрепления изученного материала, для формализации методов, для моделирования и для аналитических вычислений.

Эта книга является результатом преподавания классической теоретической механики в Массачусетском технологическом институте. Содержание ее стало результатом объединения курса лекций по нелинейной динамике и динамике Солнечной системы профессора Уиздома и дополнения к вводному курсу информатики Абельсона и Сассмана по использованию компьютерных вычислений для формализации теоретических методов. Приступая к работе, мы ожидали, что использовать этот подход для формализации теоретической механики будет легко. Но быстро поняли, что многие вещи, которые, как нам казалось, были нам понятны, на самом деле таковыми не являлись. Наше требование, чтобы математические обозначения были достаточно четкими и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически, с помощью компьютера, оказалось очень эффективным для выявления неоднозначностей и неточностей в рассуждениях. В результате борьба за то, чтобы сделать математику точной и при этом ясной и вычислительно эффективной, продолжалась гораздо дольше, чем мы ожидали. Благодаря этой работе мы многое узнали как о механике, так и о компьютерных вычислениях. Мы надеемся, что другие, особенно наши конкуренты, воспользуются этими методами, чтобы наконец начать понимать ту науку, которой они занимаются, пусть даже и ценой замедления исследований.

Второе издание

Мы преподавали курс теоретической механики в Массачусетском технологическом институте, используя этот учебник в течение всего времени с момента публикации первого издания[6]. Мы выявили ряд трудностей, с которыми сталкивались студенты, изучая материал. Обнаружилось, что некоторые из наших объяснений нуждаются в улучшении. Это издание является результатом нашего нового, улучшенного понимания.

Программное обеспечение и наши вычислительные возможности совершили гигантский скачок вперед за эти годы, и мы использовали его для предоставления алгебраических доказательств большей общности, чем это могло быть сделано в первом издании. Это преимущество пронизывает большую часть нового издания.

В первой главе мы теперь переходим прямо к координатному представлению действия, не жертвуя важностью независимости действия от координат. Мы также добавили простой вывод уравнений Эйлера–Лагранжа из принципа наименьшего действия, дополнив более формальный вывод в первом издании. В главе о движении твердого тела мы теперь приводим алгебраический вывод существования вектора угловой скорости. Наш новый вывод согласован с использованием обобщенных координат твердого тела в качестве параметров преобразования из базовой к фактической ориентации системы координат. Мы также приводим новый раздел об использовании кватернионов, чтобы избежать сингулярностей при анализе движения твердых тел.

Каноническим называется такое преобразование координат фазового пространства и связанное с ним преобразование гамильтониана системы, кото-

[6] Первое издание вышло в 2001 году. – *Прим. перев.*

рое обеспечивает взаимно однозначное соответствие между траекториями. Хоть и ценой усложнения методов работы с каноническими преобразованиями, мы допускаем, что лагранжиан системы и сами преобразования могут зависеть от времени. Глава о канонических преобразованиях была тщательно пересмотрена, чтобы прояснить связь канонических преобразований с симплектическими преобразованиями. Мы выделили в новую главу раздел, посвященный каноническим преобразованиям в задачах эволюции, включая преобразования Ли.

Мы исправили множество мелких ошибок. Очень хочется надеяться, что при этом мы не добавили их больше, чем удалили.

Благодарности

Мы благодарны многим людям, которые помогали нам в подготовке этой книги и учебного курса, который она призвана поддержать. Значительную помощь нам оказали чудесные студенты, изучавшие классическую механику на нашем курсе. Ради них нам приходилось стремиться к предельной ясности; мы исправляли найденные ими ошибки в программах, в способе подачи материала и в образе собственного мышления.

Немалую техническую помощь в отборе тем и изложении предмета мы получили от Гарольда Абельсона – одного из разработчиков программной системы Scmutils. В некоторые части кода он вложил очень много труда. Мы также советовались с ним, когда отчаянно пытались понять логику механики. Зачастую ему удавалось показать, в каком направлении двигаться, чтобы выбраться из интеллектуального лабиринта.

Мэттью Халфант привлек наше внимание к разработке системы Scmutils. Он подталкивал нас к научным вычислениям с использованием Scheme и функционального стиля, убеждая, что это активный подход к объяснению идей, не отвлекаясь на сложности императивных языков типа C. В 1980-х годах он написал на Scheme некоторые ранние процедуры численных расчетов, которыми мы до сих пор пользуемся.

Дэн Зурас помог нам придумать уникальную организацию системы Scmutils. Именно благодаря его вдохновенным находкам система построена вокруг обобщения правила дифференцирования сложной функции. Он также помог с трудными деталями хорошего алгоритма нахождения наибольшего общего делителя полиномов, основанного на идеях Ричарда Циппеля.

Эта книга, как и многое другое в нашей лаборатории, не состоялась бы без выдающейся работы Криса Хансона. Крис разработал и поддерживает систему Scheme, на которой основан этот труд. Недавно Тэйлор Кэмпбелл и другие продолжили разработку версии MIT/GNU Scheme. Кроме того, Крис руководил реорганизацией системы Scmutils, в ходе которой были уточнены многие идеи о типах и обобщенных операциях, благодаря которым система приняла свой настоящий вид и стала такой удобной.

Гильермо Хуан Розас, соразработчик системы Scheme, внес значительный вклад в создание компилятора Scheme и реализовал ряд хитроумных механизмов, сделавших систему достаточно эффективной для поддержки нашей работы.

Помимо вклада в некоторые методы решения линейных уравнений в системе Scmutils, Якоб Кацнельсон сделал ряд ценных замечаний, улучшивших изложение материала.

Джулия Сассман внимательно прочитала книгу и высказала серьезные критические замечания, заставившие нас реорганизовать и переписать значительную часть текста. Джулия работала с соавтором первого издания Мейнхардом (Харди) Майером над созданием указателя. Она также «разработала и поддерживает» Джеральда Джея Сассмана.

Сесил Уиздом, святая женщина, ведомая искренней верой, собственным примером постоянно напоминает нам о том, что действительно важно. Проект не состоялся бы без ее любви, поддержки и ободрения, которые она оказывала Джеку Уиздому. Их дети, Уильям, Эдуард, Томас, Джон и Элизабет, каждодневно сплетают их жизни со своими.

На протяжении прошедших лет многие люди обогащали наше понимание динамики. Особенно хочется отметить Бориса Чирикова, Мишеля Энона, Питера Голдрейха и Стэна Пила. Мы также отдаем должное влиянию покойного Реса Джоста.

В работе принимали участие многие другие – в разработке как программного обеспечения, так и содержания: Билл Зиберт, Панайотис Скордос, Клеантес Кониарис, Кэвин Лин, Джеймс Макбрайд, Ребекка Фрэнкель, Томас Ф. Найт, Паван Кумар, Элизабет Брэдли, Элис Секель, Джихад Тоума, Кеннет Йип. Мы вынесли много полезного из отзывов и обсуждений с Пиетом Хатом, Йоном Дойлем, Дэвидом Финкельштейном, Питером Фишером, Гаем Льюисом Стэеле младшим и Робертом Херманном.

Мы признательны поколениям студентов, которые посещали наши курсы и работали над нашими задачами. Они источник фантастических отзывов и желания работать дальше. Особенно много пользы принесли наши студенты Уилл Фарр, Марк Тобенкин, Кит Уинштейн, Алексей Радул, Мика Бродский, Деймон Вандер Линд, Питер Януччи, Уильям Троу и Лео Стейн.

Мы благодарны лаборатории информатики и искусственного интеллекта Массачусетского технологического института за гостеприимство и логистическую поддержку. Спасибо также корпорации Panasonic Corporation за поддержку Джеральда Джея Сассмана путем выплат из целевого фонда. Мы благодарны факультетам математики и электротехники и информатики MIT за предоставление творческого отпуска Мейнхарду Майеру, работавшему вместе с нами над первым изданием. С грустью сообщаем, что Харди больше нет с нами. Нам его очень не хватает.

Глава 1

Механика Лагранжа

> Если я, без особого раздумья и не вдаваясь в подробные разъяснения, формулирую задачу механики таким образом: «механика имеет своей задачей описать, как с течением времени тела меняют свое место в пространстве», – то я рискую взять на свою душу несколько смертных грехов против святого духа ясности. Прежде всего надо вскрыть, в чем эти грехи заключаются.
>
> *А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение)»* [16]

Предметом изучения в этой книге является движение твердых тел и математические инструменты, используемые для его описания.

Столетия тщательных наблюдений за планетами выявили ряд закономерностей в их движении и позволили научиться достаточно точно предсказывать такие явления, как затмения и соединения[1]. Попытка формально описать эти закономерности для предсказания движения небесных тел привела к развитию современной математики и открытию дифференциального исчисления как эффективного математического метода для описания реального физического мира. То, что математику можно использовать для описания природных явлений, уже само по себе явилось весьма примечательным фактом.

Булава, подброшенная жонглером, проходит предсказуемый путь и вращается предсказуемым образом. Само умение жонглировать в решающей степени зависит от этой предсказуемости. Самым замечательным стало открытие, что те же самые математические методы, которые используются для описания движения планет, могут быть использованы и для описания движения булавы в руках жонглера.

Классическая теоретическая механика описывает движение системы частиц под действием внешних сил. Сложные физические объекты, такие как булава жонглера, могут быть смоделированы как совокупность жестко свя-

---

[1] Соединение – в астрономии так называется расположение двух небесных тел на небесной сфере, при котором их эклиптические координаты близки или совпадают. Сами тела при этом могут быть сколь угодно далеки друг от друга в пространстве, просто для земного наблюдателя они находятся на одной линии наблюдения. – *Прим. перев.*

занных между собой мириад частиц с фиксированными пространственными связями между ними.

Можно представить себе множество возможных способов перемещения материальных тел динамической системы, которые в действительности никогда не происходят. Например, булава жонглера может зависнуть в воздухе или четырнадцать раз облететь вокруг его головы, прежде чем ее поймают, но в реальности такого не бывает. Как отличить движения системы, которые действительно происходят, от других геометрически возможных движений? Возможно, существует какая-то математическая функция, позволяющая отличить реализуемые движения от всех геометрически допустимых?

Движение системы можно описать, указав положение каждой части системы в каждый момент времени. Такое описание называется *конфигурационной траекторией* и определяет конфигурацию в виде функции от времени. Булава жонглера вращается во время полета; ее конфигурация определяется положением в пространстве и ориентацией. Движение булавы полностью определено, если ее положение и ориентация заданы в виде функции от времени.

Искомая функция, различающая траектории, принимает на входе траекторию системы и возвращает какой-то выход. Мы хотим, чтобы эта функция имела характерное поведение, когда на вход «подается» физически реализуемая траектория. Например, «выход» мог бы быть числом, и мы могли бы попытаться сделать так, чтобы это число было равно нулю только на реализуемых траекториях. Законы движения в механике имеют именно такую форму; в каждый момент времени должны выполняться дифференциальные уравнения Ньютона[2].

Однако существует альтернативная стратегия, которая обеспечивает лучшее постижение и большую предсказательную способность: мы могли бы искать функцию, различающую траектории, которая будет достигать локального минимума на реальных траекториях – на близлежащих физически невозможных траекториях значение этой функций будет большим, чем на реальной траектории. Это *вариационный метод*: для каждой физической системы мы вводим функцию различения траекторий, которая выделяет реализуемые движения системы, обладая стационарной точкой для каждой допустимой траектории[3]. В целях большей общности поиск реальных траекторий любой системы может быть описан с помощью вариационного принципа[4].

---

2 Имеется в виду, что уравнения Ньютона выполняются строго локально, т. е. в окрестности точки, при этом из самих этих уравнений нельзя извлечь никакой общей информации о поведении системы. – *Прим. перев.*

3 Стационарная точка функции – это точка, в которой вариация значения функции равна нулю при изменении входных данных. Локальные максимумы или минимумы являются стационарными точками.

4 Вариационный принцип успешно описывает всю ньютонову механику частиц и твердых тел. Вариационный метод также был с пользой применен при описании многих других систем, как то: в классической электродинамике, гидродинамике невязких жидкостей и проектировании механизмов, например в задаче о четырехзвенном шарнире. Кроме того, современные формулировки квантовой механики и квантовой теории поля основаны на вариационном принципе. Однако, по-видимому, не все динамические системы могут быть описаны вариационным методом. Например, не существует простого способа применить аппарат вариационного исчисления к диссипативным системам, хотя в некоторых частных случаях вариационные методы все еще могут использоваться.

Уравнения механики, изобретенные Ньютоном и другими людьми его эпохи, описывают движение системы в терминах положений, скоростей и ускорений каждой из частиц в системе. Вариационная формулировка, в отличие от локальной ньютоновой формулировки механики в терминах дифференциалов, описывает движение системы в терминах интегральных величин, которые связаны с движением и положением системы как целого.

В ньютоновой формулировке силы, как правило, могут быть выражены как производные от потенциальной энергии системы. Движение системы определяется действием этих сил на составляющие ее части. Ньютонова формулировка уравнений движения по своей сути является описанием взаимодействий типа частица–частица.

В вариационной формулировке уравнения движения возникают как результат математического преобразования функции, равной разности кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия – это величина, характеризующая расположение частиц в системе; кинетическая энергия определяется скоростями частиц в системе. Ни потенциальная, ни кинетическая энергия не зависят от того, каким образом заданы эти положения и скорости. Их разница описывает всю систему как единое целое и не зависит от деталей того, какими параметрами эта система определена. Таким образом, мы свободны в выборе такого способа описания системы, с которым нам было бы легко работать; нет необходимости точно описывать взаимодействия между всеми частями системы, что присуще формулировке Ньютона.

Использование вариационного принципа дает множество преимуществ по сравнению с ньютоновой формулировкой законов движения. Процедура вывода уравнений движения для тех параметров, которые описывают поведение системы, не зависит от выбора этих параметров и от выбора системы координат. Если между частями системы существуют ограничения на перемещения (связи), ньютонова формулировка динамики требует введения дополнительных сил, создающих эти ограничения, тогда как в вариационной формулировке связи могут быть встроены в координаты. Вариационная формулировка явным образом вскрывает связь законов сохранения с симметриями[5]. Она обеспечивает определение конкретного движения системы в контексте всех возможных движений системы. Мы придерживаемся вариационной формулировки из-за этих преимуществ.

1.1. Конфигурационное пространство

Рассмотрим механические системы, предполагая их состоящими из точечных частиц, имеющих массу и положение, но не имеющих внутренней структуры[6]. Протяженные тела можно рассматривать как состоящие из большо-

[5] Теорема Нётер. – *Прим. перев.*

[6] Мы часто называем частицу без внутренней структуры, имеющую массу, точечной массой.

го числа таких точечных частиц с заданными пространственными связями между ними. Протяженные тела сохраняют свою форму из-за ограничений на пространственные перемещения между составляющими их частицами. Указание положения всех составляющих частиц системы определяет ее *конфигурацию*. Наличие связей – ограничений на перемещения частей системы, подобных тем, что определяют форму протяженного тела, – означает, что составляющие ее точечные массы не могут занимать все возможные положения в пространстве. Набор всех допустимых, с учетом связей, конфигураций называется *конфигурационным пространством* системы. *Размерность* конфигурационного пространства – это наименьшее количество параметров, которые должны быть заданы для полного указания положения всех частиц системы. Размерность конфигурационного пространства также называется *числом степеней свободы* системы[7].

Положение в пространстве одной свободной частицы, на движения которой не наложены ограничения, может быть описано тремя параметрами; точечная частица имеет трехмерное конфигурационное пространство. Если мы имеем дело с системой, состоящей из большего числа точечных частиц, конфигурационное пространство становится более сложным. Если существует k независимых частиц, нам нужно $3k$ параметров для описания возможных конфигураций. Если между частями системы существуют связи, размерность конфигурационного пространства уменьшается. Например, система в трехмерном пространстве, состоящая из двух точечных частиц, связанных так, что расстояние между ними остается неизменным, имеет пятимерное конфигурационное пространство: таким образом, с помощью трех чисел мы можем определить положение одной из частиц, а с помощью двух других параметров – задать положение второй частицы относительно первой.

Рассмотрим булаву жонглера. Безусловно, мы вполне можем задать конфигурацию булавы, если определим положение всех составляющих ее атомов. Однако существуют более экономичные описания конфигурации недеформируемых физических объектов. Если принять идеализированное допущение, что булава жонглера «абсолютно жесткая», то расстояния между всеми ее атомами остаются постоянными. Таким образом, мы можем указать направление главной оси булавы, указав положение одного атома и ее ориентацию в пространстве. Используя заданные связи, на основе этой информации можно определить положение всех остальных атомов булавы. Размерность

---

[7] Строго говоря, размерность конфигурационного пространства и число степеней свободы не совпадают. Число степеней свободы – это размерность «локально доступной» области конфигурационного пространства. Для систем с интегрируемыми связями это одно и то же. Для систем с неинтегрируемыми связями размерность конфигурационного пространства может быть больше, чем число степеней свободы. Дополнительные пояснения мы приведем в разделе 1.10.3, когда будем обсуждать системы с неинтегрируемыми связями. За исключением этого раздела, во всех рассматриваемых нами системах используются только интегрируемые связи (то есть они являются «голономными»). Вот почему мы решили размыть здесь различие между числом степеней свободы и размером конфигурационного пространства.