СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 5

1. Элементы алгебры, теории матриц и анализа 8
- 1.1. Комплексные числа. Уравнения 8
- 1.2. Операции с матрицами и векторами 13
- 1.3. Решение систем линейных уравнений 23
- 1.4. Ряды Тейлора, Маклорена и Фурье 26

2. Дифференциальные и разностные уравнения 35
- 2.1. Классический метод решения дифференциальных уравнений 35
- 2.2. Решение уравнений методом преобразования Лапласа 41
- 2.3. Разности и разностные уравнения 44
- 2.4. Решение разностных уравнений методом z-преобразования 48
- 2.5. Построение переходной матрицы 51
- 2.6. Решение систем дифференциальных уравнений 56
- 2.7. Решение систем разностных уравнений 60

3. Модели элементов, систем и воздействий 68
- 3.1. Модели непрерывных элементов и систем 68
- 3.2. Модели импульсных систем 81
- 3.3. Модели регулярных воздействий 92
- 3.4. Характеристики случайных воздействий 97

4. Преобразование моделей систем управления 105
- 4.1. Преобразование моделей в переменных состояния 105
- 4.2. Определение передаточных функций 111
- 4.3. Преобразование структурных схем 117
- 4.4. Применение формулы Мэйсона 125
- 4.5. Переход от моделей вход–выход к моделям в переменных состояния 133
- 4.6. Определение уравнений систем по уравнениям в переменных состояния звеньев 141

5. Характеристики и реакции звеньев и систем 145
- 5.1. Определение временных характеристик 145
- 5.2. Построение частотных характеристик 163
- 5.3. Определение реакций непрерывных звеньев и систем 172
- 5.4. Определение реакций дискретных систем 180
- 5.5. Определение статистических характеристик выходных сигналов систем управления 183

6. Исследование свойств линейных объектов и систем управления 191
6.1. Анализ управляемости, наблюдаемости и полноты 191
6.2. Анализ устойчивости линейных непрерывных систем 200
6.3. Оценка запасов устойчивости непрерывных систем 212
6.4. Исследование устойчивости дискретных систем 217

7. Исследование качества линейных систем управления 225
7.1. Оценка качества переходных процессов 225
7.2. Оценка точности систем управления 238
7.3. Оценка точности САУ при случайных воздействиях 249
7.4. Интегральные оценки качества 255

8. Исследование нелинейных систем 260
8.1. Определение и исследование особых точек 260
8.2. Построение фазовых портретов нелинейных систем 267
8.3. Анализ устойчивости методом первого приближения 279
8.4. Анализ устойчивости методом функций Ляпунова 285
8.5. Исследование абсолютной устойчивости 295
8.6. Исследование робастной устойчивости 305
8.7. Исследование автоколебаний методом гармонической линеаризации 308

9. Синтез линейных систем управления 315
9.1. Синтез систем с двумерным устройством управления 315
9.2. Синтез наблюдателей переменных состояния 339
9.3. Синтез систем с модальным управлением 350
9.4. Синтез систем методом желаемых ЛАЧХ 362

10. Аналитический синтез нелинейных систем управления 379
10.1. Синтез систем с градиентным управлением 379
10.2. Синтез на основе квазилинейных моделей 382
10.3. Синтез на основе управляемой формы Жордана 386

Приложения 396
П.1. Преобразование Лапласа 396
П.2. Функция freqasimp 398
П.3. Функция c2taud 403
П.4. Таблица интегралов 404
П.5. Коэффициенты гармонической линеаризации 405
П.6. Стандартные передаточные функции 407
П.7. Пассивные корректирующие звенья 410

Ответы 412
Библиографический список 459
Тематический указатель задач 460

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время теория автоматического управления является одной из основных инженерных дисциплин, которые изучаются в высших учебных заведениях, ведущих подготовку специалистов большинства технических направлений. Изучение теории автоматического управления встречает известные трудности, вызванные сложностью используемого математического аппарата, необходимостью комплексного использования знаний таких курсов, как физика, химия, электротехника, электроника, информатика. Современная теория управления предполагает широкое применение ЭВМ как для анализа, так и для синтеза систем управления.

В связи с этим первые два раздела данного сборника включают задачи для повторения важнейших вопросов и методов дисциплины «Высшая математика», изучаемой на первых двух курсах. Разумеется, рассматриваются методы, наиболее часто используемые при описании и исследовании элементов и систем управления (часть из них в некоторых вузах изучается в курсе «Математические основы теории систем»). Это касается комплексных чисел, матричного исчисления, методов решения алгебраических, дифференциальных и разностных уравнений и систем, элементов теории случайных процессов и др.

В последующих разделах рассматриваются задачи собственно теории управления: составление уравнений элементов и систем управления, их функциональных и структурных схем, получение моделей внешних детерминированных и случайных воздействий, используемых при построении характеристик и исследовании качества систем управления. Большое внимание уделяется методам преобразования моделей вход–выход и вход–состояние–выход, методам перехода от моделей одного типа к моделям другого типа.

При изложении методов исследования свойств линейных непрерывных и дискретных систем автоматического управления большое внимание уделяется методам определения их основных динамических характеристик, а также методам определения реакции динамических систем на внешние воздействия с учетом начальных условий. Рассматриваются задачи на исследование управляемости, наблюдаемости и полноты объектов управления, а также устойчивости и качества систем автоматического управления.

В задачах, посвященных нелинейным системам управления, рассматриваются метод фазовой плоскости, метод первого приближения, метод функций Ляпунова, методы абсолютной и робастной устойчивости (критерии В. М. Попова, А. А. Воронова и В. Л. Харитонова), а также метод гармонической линеаризации.

Значительное внимание уделяется задачам синтеза линейных и нелинейных систем автоматического управления. Здесь рассматриваются такие аналитические методы, как: синтез линейных непрерывных и дискретных систем управления по заданным показателям качества с использованием стандартных передаточных функций; синтез систем с модальным управлением в непрерывном и дискретном случаях, а также традиционный графоаналитический метод синтеза на основе логарифмических частотных характеристик с реализацией корректирующих звеньев на RC-цепях и (или) на операционных усилителях.

Задачи синтеза систем управления нелинейными объектами также решаются аналитическими методами, такими как метод градиентного управления, полиномиальный метод на основе квазилинейного представления модели нелинейного объекта, метод приведения нелинейных моделей к управляемой форме Жордана.

Во всех задачах, включенных в сборник, используются модели реальных процессов и объектов управления, полученные при помощи обычно применяемых в инженерной практике способов идеализации. Решение практически всех задач даётся как в аналитической форме, так и с помощью ЭВМ. При этом приводятся тексты соответствующих программ или команд в среде MATLAB или Maple V. Предполагается, что студенты уже имеют первоначальные навыки работы в среде MATLAB. При наличии таких навыков приведенные в задачнике тексты программ можно непосредственно копировать в редактор MATLAB (“Editor”) и исполнять как обычные m-файлы для решения аналогичных задач с другими числовыми данными. Простые и короткие последовательности команд, приведённые в тексте, можно вставлять и исполнять непосредственно в командном окне (Command Window) MATLAB.

Подчеркнём, что только решение задач и в аналитической форме, и с помощью ЭВМ даст возможность студентам получить более полные навыки анализа и синтеза систем автоматического управления современными методами. Последнее имеет особо важное значение в настоящее время, в связи с проникновением компьютерных технологий во все сферы инженерной деятельности.

При составлении пособия авторы руководствовались рядом учебников и учебных пособий по теории автоматического управления, указанных в конце книги. Однако изложенные в пособии задачи и методы их решения наиболее полно соответствуют учебному пособию А. Р. Гайдука «Непрерывные и дискретные динамические системы» (М.: Учлитвуз, 2004); учебнику того же автора «Теория автоматического управления», вышедшему в издательстве «Высшая школа» в 2010 году, а также учебнику «Теория автоматического управления» (под ред. А. В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1976, 1984).

В сборнике принята нумерация задач по разделам. Задачи для самостоятельного решения отмечены символом «*». Ответы на эти задачи помещены в конце книги.

Работа над книгой распределена между авторами следующим образом: разд. 1– 6, 8, 10 и подразд. 9.1–9.3 написаны А. Р. Гайдуком, разд. 7 и подразд. 9.4 написаны Т. А. Пьявченко; все тексты программ или команд в системе MATLAB написаны В. Е. Беляевым. При подготовке рукописи к изданию большая помощь авторам была оказана студентами и магистрантами ТТИ ЮФУ, за что авторы выражают им свою искреннюю благодарность.

Авторы будут признательны всем читателям за замечания по данной книге, которые можно направлять по адресу: кафедра САУ, Таганрогский технологический институт ЮФУ, Некрасовский пер., 44, г. Таганрог, 347928.

Авторы

1. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ, ТЕОРИИ МАТРИЦ И АНАЛИЗА

1.1. Комплексные числа. Уравнения

1.1. Найти модуль и фазу комплексного числа $z = -4 + j3$. Показать это число, его модуль и фазу на комплексной плоскости.

Решение. Модуль и фаза комплексного числа $z = a + jb$ определяются выражениями [10]:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \tag{1.1}$$

$$\varphi(z) = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \operatorname{Re} z \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, & \operatorname{Re} z < 0, \\ \textit{или} \quad -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, & \operatorname{Re} z < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Замечание. Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — любое целое число. При этом положительные значения $\varphi(z)$ отсчитываются против часовой стрелки, а отрицательные — по часовой стрелке

В рассматриваемом случае $\operatorname{Re} z = -4$, $\operatorname{Im} z = 3$. Следовательно,

$$|z| = \sqrt{16 + 9} = 5\,; \;\; \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = 2{,}4981 \; \textit{рад} = 143{,}13^\circ.$$

Найденные величины показаны на рис. 1.1.

Решение в MATLAB:

% вводим комплексное число
```
z=-4+j*3
```
% **MATLAB** [9] выводит это число в несколько иной форме:
```
z = -4 +3i
```
% вычисляем модуль:
```
abs(z)
ans = 5
```
% вычисляем фазовый угол в радианах
```
angle(z)
ans = 2.4981
```

% вычисляем фазовый угол в градусах:
```
angle(z)*180/pi
ans = 143.13
```

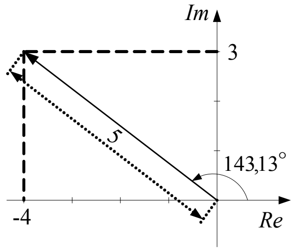

Рис. 1.1. Комплексная плоскость и число $z = -4 + j3$

1.2. Найти третью степень, натуральный и десятичный логарифмы комплексного числа $z = 2 - j3$.

Решение. Для определения степеней (целых и дробных) и логарифмов комплексных чисел удобно сначала представить заданное число z в показательной форме $z = |z| e^{j\varphi(z)}$.

В данном случае по формулам (1.1) и (1.2) имеем:

$$|z| = \sqrt{4+9} = 3{,}6056, \ \varphi(z) = -\mathrm{arctg}\frac{3}{2} = -0{,}9828 = -56{,}31^\circ,$$

т. е. $z = 3{,}6056 e^{-j0{,}9828}$. Следовательно,

$$(2 - j3)^3 = 3{,}6056^3 e^{-j3\cdot 0{,}9828} = 46{,}872 e^{-j2{,}9484} =$$

$$= 46{,}872 e^{-j168{,}93^\circ} = 46{,}872(-0{,}9814 - j0{,}192) = -46 - j9.$$

Как известно,

$$\ln z = \ln|z| + j\varphi(z), \ \lg z = \lg|z| + j\varphi(z)\lg e. \quad (1.3)$$

Поэтому, $\ln(2 - j3) = 1{,}2825 - j0{,}9828$.

$$\lg(2 - j3) = 0{,}557 - j0{,}9828 \cdot 0{,}4343 = 0{,}557 - j0{,}4268.$$

Для проверки найдем $e^{\ln z}$ и $10^{\lg z}$. Имеем

$$e^{\ln(2-j3)} = e^{1{,}2825 - j0{,}9828} = e^{1{,}2825} e^{-j0{,}9828} =$$

$$= 3{,}6056 e^{-j\,0{,}9828} = 2 - j\,3\,,$$

$$10^{\lg(2-j3)} = 10^{0{,}557 - j\,0{,}4268} = 3{,}6056 \cdot 10^{-j\,0{,}4268}\,.$$

Для вычисления второго множителя обозначим $y = 10^{-j\,0{,}4268}$ и найдем $\ln y = -j\,0{,}4268 \cdot \ln 10 = -j\,0{,}4268 \cdot 2{,}3026 = -j\,0{,}9827$. Следовательно, величина $y = 10^{-j\,0{,}4268} \approx e^{-j\,0{,}9828}$, и тогда $10^{\ln(2-j3)} = 3{,}6056\, e^{-j\,0{,}9828} = 2 - j\,3$.

Решение в MATLAB:

% вводим исходное число:
```
z=2-3*j;
```
% вычисляем третью степень:
```
z3=z^3
z3 = -46 -9i
```
% вычисляем модуль и фазу (в градусах) числа z^3
```
abs(z3)
ans = 46.872
angle(z3)*180/pi
ans = -168.93
```
% вычисляем натуральный логарифм числа z
```
ln_z=log(z)
ln_z = 1.2825 -0.98279i
```
% вычисляем модуль и фазу натурального логарифма числа z
```
abs(ln_z)
ans = 1.6157
angle(ln_z)*180/pi
ans = -37.464 .
```
%Проверка в **MATLAB** дает
```
exp(ln_z)
ans = 2 -3i
```
% вычисляем десятичный логарифм числа z
```
lg_z=log10(z)
lg_z = 0.55697 -0.42682i
```
% проверка в **MATLAB** дает
```
10^(lg_z)
ans = 2 -3i .
```
Таким образом, проверки дают исходное число.

1.3. Найти корни полинома $2x^2 + 12x + 16$ и представить его в виде произведения сомножителей.

Решение. Корни полинома — это корни уравнения, полученного приравниванием данного полинома к нулю. Следовательно, в нашем случае необходимо найти корни уравнения $2x^2+12x+16=0$. Для определения корней алгебраического уравнения (полинома) второй степени существует две формулы.

Первая относится к уравнению $ax^2+bx+c=0$ и имеет вид

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.4}$$

или

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}, \tag{1.4'}$$

где $d=b^2-4ac$ — дискриминант. Если $d\geq 0$, то корни будут вещественными, если же $d<0$, то корни будут комплексными.

Для использования второй (более простой) формулы заданный полином сначала приводится к виду $x^2+px+q=0$. В этом случае корни находятся по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{p\pm\sqrt{d}}{2}, \tag{1.5}$$

где дискриминант $d=p^2-4q$. Смысл его тот же.

Для решения уравнений 3-й степени применяются либо формулы Кардано, либо тригонометрические решения [10. С. 47, 48].

Замечание. Корни уравнений 3-й и более высоких степеней удобнее определять с помощью ЭВМ, например, используя пакет **MATLAB**.

Если полином n-й степени с действительными коэффициентами

$$A(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0 \tag{1.6}$$

имеет корни $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$, то его всегда можно представить в виде произведения:

$$A(x)=\alpha_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=\alpha_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i). \tag{1.7}$$

Если полином $A(x)$ (1.6) имеет n_1 вещественных корней и n_2 комплексных $x_i = \sigma_i + j\omega_i$, то он будет иметь и n_2 сопряженных им корней $x_{i+1} = \sigma_i - j\omega_i$. Поэтому $n_1 + 2n_2 = n$, а полином $A(x)$, заданный в виде (1.6) или в виде (1.7), можно также представить в следующем виде:

$$A(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{n_1} (x - x_i) \prod_{\nu=1}^{n_2} (x^2 + p_\nu x + q_\nu),$$

причем $p_\nu = -2\sigma_\nu$, $q_\nu = \sigma_\nu^2 + \omega_\nu^2$.

В рассматриваемом случае полинома $2x^2 + 12x + 16$ по формуле (1.4) имеем

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 2 \cdot 16}}{2 \cdot 2} = \frac{-12 \pm 4}{4},$$

т. е. $x_1 = -2$, $x_2 = -4$.

В приведенной форме соответствующее уравнение имеет вид $x^2 + 6x + 8 = 0$. Следовательно, по формуле (1.5) найдем $x_{1,2} = -3 \pm 1$. Отсюда следуют те же значения корней.

В заданном полиноме $\alpha_n = 2$, поэтому по формуле (1.7) можно записать

$$A(x) = 2(x + 2)(x + 4).$$

Решение в MATLAB:

% вводим исходный полином, начиная с коэффициента при старшей степени *p*:

```
p1=[2 12 16];
```

% вычисляем корни полинома

```
roots(p1)
ans = -4
 -2
```

% вводим полином в приведенной форме

```
p2=[1 6 8];
```

% находим корни

```
roots(p2)
ans = -4
 -2
```

Таким образом, решение в **MATLAB** дает те же значения корней.

1.4*. Представить числа в показательной форме:

1.4.1* $z = 7 + j8$;

1.4.2* $z = 16 - j7$;

1.4.3* $z = -8 - j5$;

1.4.4* $z = j10$;

1.4.5* $z = -4$;

1.4.6* $z = -8 + j8$;

1.4.7* $z = 4 - j2$;

1.4.8* $z = -1 + j10$;

1.4.9* $z = 3$;

1.4.10* $z = -5 - j20$.

1.5*. Вычислить:

1.5.1* $(5 + j8)^3$;

1.5.2* $(4 + j9)^{\frac{1}{4}}$;

1.5.3* $(-10 - j17)^5$;

1.5.4* $(-11 - j8)^n$;

1.5.5* $(-10 + j2)^m$;

1.5.6* $\ln(5 + j8)$;

1.5.7* $\log(4 - j9)$;

1.5.8* $\ln(5 + j8)^2$;

1.5.9* $\log(-120 + j40)$;

1.5.10* $\ln(-10 - j7)$;

1.5.11* $\log(-3 + j4)^3$;

1.5.12* $\ln(-3 + j4)$.

1.6*. Найти корни уравнений:

1.6.1* $4x^2 + 8x + 32 = 0$;

1.6.2* $x^2 + 10x + 16 = 0$;

1.6.3* $3x^2 + 18x + 27 = 0$;

1.6.4* $x^2 + 12x + 32 = 0$;

1.6.5* $5x^2 + 25x + 35 = 0$;

1.6.6* $x^2 + 4x + 8 = 0$.

1.2. Операции с матрицами и векторами

1.7. Сложить матрицы A и B и умножить сумму на 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрицы складываются путем сложения соответствующих элементов. Если размерность матриц не совпадает, то сложить матрицы **нельзя**. При умножении матрицы $A = [a_{ij}]$ на число α, на это число умножаются все её элементы, т. е. $\alpha A = A\alpha = [\alpha \cdot a_{ij}]$.

В заданном случае

$$3(A+B)=3\begin{bmatrix}8 & 11 & 7\\ 1 & 6 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 33 & 21\\ 3 & 18 & 6\\ 12 & 3 & 3\end{bmatrix}.$$

Решение в MATLAB:

```
% вводим заданные матрицы
A=[3 4 5; 0 2 1; 3 0 0];
B=[5 7 2; 1 4 1; 1 1 1];
% находим умноженную на три сумму матриц
3*(A+B)
ans =
 24 33 21
 3 18 6
 12 3 3 .
```

1.8. Найти скалярное произведение векторов a, b и c, если

$$a=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -5\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}4\\ 6\\ 1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Для определения скалярного произведения $a^T b$ векторов

$$a=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \text{ и } b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

необходимо транспонировать вектор a, т. е. взять его в виде вектора-строки $a^T=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]$, а затем перемножить следующим образом:

$$a^T b=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]\cdot\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ . \quad (1.8)$$

Скалярное произведение можно найти только для векторов одинаковой размерности.

В данном случае размерности векторов a и b одинаковы, поэтому по формуле (1.8) находим

$$a^T b = [3 \quad 4 \quad -5] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = 12 + 24 - 5 = 31;$$

$$b^T a = [4 \quad 6 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = 12 + 24 - 5 = 31,$$

т. е. $a^T b = b^T a$. Векторы a и c имеют разные размерности: $\dim a = 3$, $\dim b = 2$, поэтому произведение $a^T c$ не существует.

Решение в MATLAB:

% вводим заданные векторы *a, b, c*:

```
a=[3; 4; -5]
a = 3
 4
 -5
b=[4; 6; 1];
c=[2; 1]
c = 2
 1
```

% находим скалярное произведение вектора a^T на b (в **MATLAB** транспонирование вектора обозначается штрихом):

```
aTb=a'*b
aTb = 31
```

% скалярное произведение вектора b^T на a

```
bTa=b'*a
bTa = 31
```

% при вычислении в **MATLAB** скалярного произведения вектора a^{T} на c выдается ошибка из-за несоответствия размеров векторов (или внутренних размеров матриц в произведении):

```
aTc=a'*c
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree
```

% для проверки находим размеры векторов a и c

```
length(a)
ans = 3
```

```
length(c)
ans = 2 .
```

Как видно, размеры векторов действительно разные.

1.9. Найти произведение матриц A и B из примера 1.7 и векторов a и b^T, a и c^T.

Решение. Произведение матриц — это матрица, каждый ij элемент которой равен скалярному произведению i-й строки первой матрицы на j-й столбец второй матрицы.

Перемножить матрицы можно лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Сами матрицы могут иметь различную размерность.

В данном случае произведение матриц

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+4+5 & 42 & 15 \\ 3 & 9 & 3 \\ 15 & 21 & 6 \end{bmatrix},$$

а произведение векторов

$$ab^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot [4 \quad 6 \quad 1] = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 3 \\ 16 & 24 & 4 \\ -20 & -30 & -5 \end{bmatrix},$$

$$ac^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}.$$

Примечание. Здесь векторы рассматриваются как матрицы с соответствующим числом строк и столбцов. При этом каждая строка первой матрицы и каждый столбец второй матрицы состоят из одного элемента.

Решение в MATLAB:

% вводим заданные матрицы и векторы

```
A=[3 4 5; 0 2 1; 3 0 0];
B=[5 7 2; 1 4 1; 1 1 1];
a=[3; 4; -5];
b=[4; 6; 1];
c=[2; 1];
```

% находим произведение матриц A и B

```
A*B
ans =
```