Посвящается моей матери
*КАТЕРИНЕ ДОРОТИ МАРКВЕЛЬДЕР*

---

и памяти моего отца
*ПОЛА ДЖИЛЬБЕРТА НАХИНА*
(1916–1990)

## Кэлвин и Хоббс

Рисунок Билла Уотерсона

*Содержание*

**Вступительное слово от издательства** ..... 10

**Обращение к читателю** ..... 12

**Предисловие ко второму изданию** ..... 13

**Предисловие** ..... 23

**Введение** ..... 28

**Глава 1. Загадки мнимых чисел** ..... 34
1.1. Кубическое уравнение ..... 34
1.2. Отрицательное отношение к отрицательным числам ..... 40
1.3. Опрометчивый вызов ..... 42
1.4. Секрет распространяется ..... 43
1.5. Как комплексные числа могут представлять вещественные решения ..... 46
1.6. Вычисление вещественных корней без мнимостей ..... 51
1.7. Курьезное переоткрытие ..... 54
1.8. Нахождение комплексных корней с помощью линейки ..... 58

**Глава 2. Первая попытка понять геометрию $\sqrt{-1}$** ..... 63
2.1. Рене Декарт ..... 63
2.2. Джон Валлис ..... 74

**Глава 3. Загадки начинают разрешаться** ..... 83
3.1. Каспар Вессель прозревает путь ..... 83
3.2. Вывод тригонометрических тождеств из формулы Муавра ..... 97
3.3. Комплексные числа и экспоненциальная функция ..... 104
3.4. Арган ..... 112
3.5. Бюэ ..... 115
3.6. И снова повторное открытие ..... 118
3.7. Гаусс ..... 123

**Глава 4. Использование комплексных чисел** ..... 126
4.1. Комплексные числа как векторы ..... 126
4.2. Применение алгебры комплексных векторов к решению геометрических задач ..... 129

4.3. Задача Гамова ... 135
4.4. Решение рекуррентного уравнения Леонардо ... 137
4.5. Мнимое время в физике пространства-времени ... 141

**Глава 5. Другие применения комплексных чисел** ... 151
5.1. Комплексные функции открывают короткий путь сквозь гиперпространство ... 151
5.2. Максимальные блуждания на комплексной плоскости ... 154
5.3. Законы Кеплера и орбиты спутников ... 157
5.4. Когда и почему кажется, что некоторые планеты движутся вспять ... 170
5.5. Комплексные числа в электротехнике ... 175
5.6. Знаменитая электронная схема, которая работает благодаря $\sqrt{-1}$ ... 190

**Глава 6. Математики-кудесники** ... 195
6.1. Леонард Эйлер ... 195
6.2. Тождество Эйлера ... 196
6.3. Эйлер делает себе имя ... 200
6.4. Нерешенная задача ... 204
6.5. Эйлер раскладывает синус в бесконечное произведение ... 212
6.6. Окружность Бернулли ... 213
6.7. Граф вычисляет $i^i$ ... 214
6.8. Роджер Котс и упущенная возможность ... 219
6.9. Многозначные функции ... 224
6.10. Гиперболические функции ... 226
6.11. Вычисление π по $\sqrt{-1}$ ... 231
6.12. Использование комплексных чисел для реальных вещей ... 234
6.13. Формула дополнения Эйлера для $\Gamma(n)$ и функциональное уравнение для $\zeta(n)$ ... 243

**Глава 7. Девятнадцатый век, Коши и начало теории функций комплексного переменного** ... 248
7.1. Введение ... 248
7.2. Огюстен Луи Коши ... 250
7.3. Аналитические функции и условия Коши–Римана ... 252
7.4. Первый результат Коши ... 258
7.5. Первая интегральная теорема Коши ... 265
7.6. Теорема Грина ... 268
7.6. Вторая интегральная теорема Коши ... 274
7.7. Третий закон Кеплера: заключительное вычисление ... 285
7.8. Эпилог: что было дальше ... 288

**Приложение A. Основная теорема алгебры** ..... 295

**Приложение B. Комплексные корни трансцендентного уравнения** ..... 299

**Приложение C. $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ с точностью до 135 десятичных знаков, и как его вычислили** ..... 304

**Приложение D. Решение загадки Клаузена** ..... 308

**Приложение E. Вывод дифференциального уравнения генератора с фазовым сдвигом** ..... 310

**Приложение F. Значение гамма-функции на критической прямой** ..... 315

**Примечания** ..... 317

**Указатель имен** ..... 334

**Предметный указатель** ..... 337

**Благодарности** ..... 341

# Вступительное слово от издательства

## Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

## Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

## Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Princeton University Press

очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

## *Обращение к читателю*

В этой книге много говорится об истории, но это не значит, что математика в ней в загоне. Впрочем, не стоит принимать это чрезмерно серьезно. Это *не* научный трактат, адресованный какой-то мифической элитарной группе, – наподобие той, о которой в 20-х годах XX века ходили слухи, будто в мире найдется всего дюжина людей, действительно понимающих идеи Эйнштейна. Про $\sqrt{-1}$ тоже долгое время бытовало аналогичное заблуждение – мол, тайна сия велика есть. Гениальный французский философ эпохи Просвещения Дени Дидро писал про математиков, что они «похожи на людей, взирающих с вершин высоких гор, чьи пики теряются в облаках. Оттуда не видно, что находится внизу, они поглощены созерцанием собственных мыслей и осознанием высоты, на которую вознеслись, куда другим не подняться и где они не смогут дышать [разреженным воздухом]». Так вот, в этой книге давление воздуха почти такое же, как на уровне моря. Большая ее часть будет понятна даже старшекласснику, который внимательно слушал учителя на уроках. И уж точно она доступна любому из того миллиона студентов, которые каждый год посещают курс математического анализа для первокурсников. Это не учебник, но мне кажется, что студентам было бы полезно прочитать эту книгу как дополнение к стандартному курсу математики. Сам я инженер-электротехник, а не математик, и это оказало влияние на стиль изложения. Я в полной мере пользовался свободой от педагогических оков, связывающих авторов учебников, – в худшем случае они выливаются в педантизм – и писал в свободном стиле, который, хочется надеяться, доставит вам удовольствие. Но уверяю вас, что когда требовалось взять интеграл, я не падал на колени в священном ужасе. И вы не должны. Мощь и красота комплексных чисел и функций и удивительная история их открытия с лихвой окупят те умственные усилия, которые придется предпринять при чтении более сложных частей книги.

## *Предисловие ко второму изданию*

Издание этой книги в твердой обложке вышло в 1998 году, и в течение долгих восьми лет я каждую ночь засыпал с мыслью о нелепых опечатках, пропущенных по невнимательности знаках минус и неудачно построенных предложениях. Все это доставляло мне такие же страдания, как заноза под ногтем. Конечно, это не угрожало ничьей жизни, но отравляло мое интеллектуальное существование. Первые шесть месяцев после выхода книги из печати я просыпался по ночам, бормоча себе под нос, как эксцентричный физик викторианской эпохи Оливер Хэвисайд, который, приближаясь к шестидесяти годам, бывало, восклицал: «Я, должно быть, глуп как пробка». То было интересное время – жизнь пожилого математика, решившего писать книги, может оказаться полной стрессов.

Но теперь это позади! На протяжении нескольких лет читатели щедро жертвовали своим временем, чтобы рассказать о моих упущениях. И вот, со списком замечаний в одной руке и с красным карандашом в другой, я с радостью исправил досадные оплошности в тексте нового издания. Быть может, что-то и осталось, но все равно я чувствую себя гораздо лучше (без сомнения, это чувство испарится, как только я получу очередное письмо – на бумаге или по электронной почте, – в котором мне укажут на незамеченные ошибки). Особенно полезны были два длинных, очень подробных письма, полученных в 1999 году от профессоров Роберта Бэркеля (математический факультет Канзасского университета) и Дэвида Вунша (факультет электротехники Массачусетского университета в Лоуэлле). Ранее в этом году издательство Принстонского университета опубликовало продолжение этой книги «Doctor Euler's Fabulous Formula»[i], так что появление исправленного издания «Сказок мнимого мира» пришлось очень кстати. Я благодарен своему редактору из Принстона, Вики Керн, за возможность вернуться к этой книге. А теперь хочу сказать о том, что еще изменилось в этом издании, помимо исправления опечаток.

---

[i] *Нахин П. Дж.* Необыкновенная формула доктора Эйлера. М.: ДМК Пресс, 2020. – *Прим. перев.*

Вообще-то, я начну – пусть это и выглядит непоследовательно – с того, что *не* изменилось. Хотя я внимательно прочел *все*, что прислали мои читатели, и признаю, что очень многое оказало заметное влияние на внесенные исправления, есть и несколько исключений. Приведу лишь два примера. Вот один читатель сурово попенял мне за высказанное мнение (стр. 35) о том, что прорывная идея дель Ферро, открывшего общий метод решения неполного кубического уравнения, была «гениальной». Нет-нет, писал читатель (назвавшийся профессиональным математиком), это была просто «хорошая идея», которая могла бы прийти в голову многим. На это я могу только ответить, что никому до дель Ферро она *не* пришла в голову. Что бы ни говорить о том, что математики *могли бы* сделать или даже *должны были бы* сделать, факт остается фактом – неполное кубическое уравнение решил *дель Ферро*. Думается мне, что мой образованный критик попросту позабыл, как был поражен, впервые узнав, как решается кубическое уравнение.

Поговорка «чем ближе знаешь, тем меньше почитаешь» точна именно потому, что *истинна*. К чему я веду? К тому, что ныне любой приличный старшеклассник умеет доказывать иррациональность $\sqrt{2}$, но это вовсе не значит, что данный факт превратился в банальность. Двадцать пять веков назад или около того открытие иррациональных чисел стало революцией в математике, и ученики до сих пор в удивлении раскрывают рты, когда видят доказательство впервые. Вот и мой критик совершенно неправ в отношении неполного кубического уравнения, поэтому я ни слова не изменил в отрывке, посвященном дель Ферро.

Второй пример «ошибки, которой не было» – замечание читателя о том, что на рис. 5.8 (схема генератора с фазовым сдвигом) напряжение $u$ находится справа от напряжения $v$, тогда как в тексте я пишу, что $u$ находится слева. Поначалу это утверждение поставило меня в тупик (я уже путаю *право* и *лево*? – Боже, я, должно быть, глуп как пробка!), но потом я понял, что он смотрел на цепь резистивно-емкостной обратной связи, хотя в тексте я ясно написал, что речь идет о напряжениях на клеммах входа-выхода *усилителя*, подключенного к этой цепи. (Слава Богу, я все-таки не глуп как пробка! Такие вот мелочи – отрада для престарелого писателя-математика в полуночные часы.) Я еще вернусь к этой схеме чуть позже. Тот

же читатель (кстати, профессор математики) пожаловался, что совершенно сбит с толку моим употреблением символа $\angle$, например когда я пишу $r \angle \theta$ вместо $re^{i\theta}$ для обозначения вектора длины $r$, составляющего *угол* $\theta$ с положительным направлением вещественной оси. Думаю, он немного преувеличил. Согласен, что эта нотация для математика выглядит нестандартной (хотя инженеры-электротехники пользуются ей постоянно), но считаю, что и математикам стоило бы всерьез задуматься о ее принятии, ведь она совершенно естественна, поскольку наводит на мысль о понятии угла, которое, собственно, и представляет.

Самую интересную корреспонденцию с читателем вызвала врезка 3.3 («Безумные экспоненты») на стр. 120, где «выводится» тождество $1 = e^{-4\pi^2 n^2}$ для любого целого $n$: загадка, разумеется, в том, что это утверждение верно только для $n = 0$. Включая эту врезку, я хотел просто предложить «парадокс», который читатель смог бы разрешить самостоятельно, поразмыслив о написанном на предыдущей странице (врезка 3.2 «Возведение комплексного числа в комплексную степень»), а если не получится, то дочитав до раздела 6.9 («Многозначные функции»). В «выводе» во врезке 3.3 содержалась и подсказка – фраза о математических «операциях, которые, *на первый взгляд* (курсив мой), кажутся корректными». Но *действительно* ли операции во врезке 3.3 корректны?

Например, из школьного курса алгебры мы знаем, что если $z$ *вещественное*, то

$$e^{\ln z} = z \tag{a}$$

и

$$\ln(e^z) = z. \tag{b}$$

Однако если $z$ *комплексное*, то (a) по-прежнему верно (и я таки использую этот факт во врезке 3.2 при вычислении $(1 + i)^{(1+i)}$), но для (b) это не так. Для иллюстрации проблем, к которым может привести утверждение (b), начнем со знаменитой формулы Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$, или $e^{i\pi} = -1$. Возведя обе части в квадрат, получим $e^{2\pi i} = 1$, а затем применение (b) дает $\ln(e^{2\pi i}) = \ln(1)$, т. е. $2\pi i = 0$. Полагаю, все согласятся, что это неверно! Разумеется, корень зла здесь тот же, что во врезке 3.3. Просветление приходит с осознанием того, 1 – не просто $e^{2\pi i}$, а *бесконечное*

множество значений $e^{2\pi in}$, где $n$ – *произвольное* положительное или отрицательное целое число, в т. ч. 0 и 1. Поэтому мы должны были бы написать не $e^{2\pi i} = 1$, а $e^{2\pi in} = 1$, и тогда из (b) вытекало бы, что $\ln(e^{2\pi in}) = \ln(1) = i2\pi n$. То есть на самом деле мы получили, что $\ln(1)$ – *комплексная* величина, а точнее *чисто мнимая*, т. е. имеющая нулевую вещественную часть. Из школьного курса алгебры мы знаем про нулевую вещественную часть ($\ln(1) = 0$), но полный ответ заключается в том, что у $\ln(1)$ есть и мнимая часть, которая может быть равна нулю, но может быть и ненулевой (при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Объяснение загадки из врезки 3.3 вы найдете в новом приложении D в конце книги, но если вы читаете книгу впервые, попробуйте разгадать ее самостоятельно, не заглядывая в решение.

Обсуждение проблемы Каснера в разделе 5.1 также вызвало ряд писем от недоумевающих читателей. Один из них, профессор МТИ, писал, что «пример Каснера в пух и прах разбил мою интуицию» и что «я решил, что пример Каснера – липа». Действительно, Каснер пользовался репутацией человека с извращенным чувством юмора (к примеру, он придумал названия *googol* и *googolplex* для чисел $10^{100}$ и $10^{googol}$ соответственно), но в математике он был вполне серьезен. Помимо статьи 1914 года, которую я цитирую в книге (примечание 2 к главе 5 на стр. 326), вы можете найти дополнительные результаты о длинах пути и хорды комплекснозначных функций во второй статье самого Каснера («Complex Geometry and Relativity: Theory of the 'Rac' Curvature», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, March 15, 1932, стр. 267–274), а также в статье, вышедшей десятью годами позже (George Comenetz «The Limit of the Ratio of Arc to Chord», *American Journal of Mathematics* 64 (1942): 695–713).

В разделе 5.6 я утверждал, что схема генератора с фазовым сдвигом на рис. 5.8 легла в основу первого изделия, выпущенного компанией Hewlett-Packard, которая сегодня является гигантской корпорацией с многомиллиардными оборотами. Профессор электротехники из Стэнфордского университета Джин Франклин в 2004 году поправил меня, написав, что это так, но не совсем. Первое изделие HP (звуковой генератор HP-200A) на самом деле было основано на так называемом *мосте Вина*, о котором (если интересно) можно прочитать

в любом учебнике по электронике для вузов. Или, если вы предпочитаете информацию из первоисточника, загляните в дипломную работу на получение звания инженера, в которой выпускник Стэнфорда 1939 года Уильям Хьюлетт (1913–2001) описывает свою схему. Спасибо, профессор Франклин, – будучи сам выпускником факультета электротехники Стэнфорда, я должен был бы проверять информацию более тщательно. Но заверяю вас, что вся комплексная *математика*, примененная для анализа генератора с фазовым сдвигом в разделе 5.6, правильна! И как уже было сказано выше, с обозначениями напряжений на рис. 5.8 тоже все в порядке.

Я, правда, получил несколько писем от читателей, буквально *умолявших* привести вывод дифференциального уравнения третьего порядка, которое, по моим словам (на стр. 192), описывает цепь резистивно-емкостной обратной связи этого генератора. Этот вывод включен в новое приложение E. Признаюсь, что для этого мне пришлось прибегнуть к чудесной силе *преобразования Лапласа* (иначе я бы безнадежно запутался в алгебраических выкладках), но в приложении E имеется краткое введение в это преобразование, так что даже те, кто никогда не слыхал о нем прежде, смогут разобраться в вычислениях. Включение преобразования Лапласа в это издание книги оправдано, потому что его математическое обоснование относится к теории комплексных функций. Его элементарное применение в приложении E обошлось без «комплексных» деталей, но вообще-то я должен был рассказать о нем подробнее в эпилоге первого издания (разделе 7.8). Приложение E исправляет эту недоработку. И математики, и инженеры постоянно пользуются преобразованием Лапласа для решения многих важных дифференциальных уравнений.

В разделе 6.3 я проглядел важную работу, появившуюся за год до публикации первого издания книги: Mark McKinzie и Curtis Tuckey «Hidden Lemmas in Euler's Summation of the Reciprocals of the Squares», *Archive for History of Exact Sciences* 51 (1997): 29–57.

Пришлось отредактировать приведенное в разделе 6.4. обсуждение гипотезы Римана, одной из самых знаменитых нерешенных задач в математике (и почти наверняка одной из самых глубоких проблем во *всей* истории математики). На стр. 210 я писал, что все *без исключения* первые комплексные

нули дзета-функции в количестве $1.5 \times 10^9$ лежат на так называемой критической прямой $z = ½ + ib$, что было подтверждено вычислениями на компьютере. В октябре 2004 года это героическое достижение было превзойдено, теперь известно, что первые $10^{13}$ (да, *десять триллионов*) комплексных нулей $\zeta(z)$ лежат на критической прямой. Сам Риман вычислил только первые три нуля (допустив небольшую ошибку в значении $b$ для третьего), после чего предположил, что *все* комплексные нули лежат на критической прямой. Современные компьютеры способны обработать миллионы нулей за день. Для иллюстрации взрывного роста за последние пятьдесят лет скажу, что еще в 1958 году, когда я окончил школу, было проверено меньше чем 36 000 нулей. Даже мой маленький и не очень новый ноутбук может за несколько минут сделать то, для чего Риману пришлось приложить гигантские усилия. Так, взглянув на график на рис. P.1, где показана абсолютная величина $\zeta(z)$ для

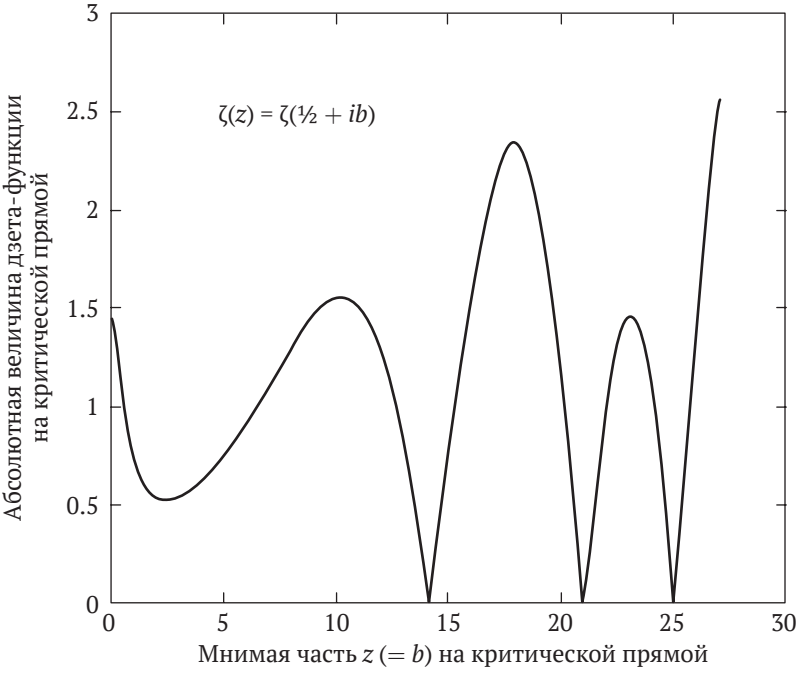


Рис. P.1. Первые три нетривиальных нуля дзета-функции, найденных Риманом

$z = ½ + ib$ при изменении $b$ от 0 до 27, мы увидим, что $|\zeta(z)| = 0$ (и, следовательно, $\zeta(z) = 0$) в трех точках ($b = 14.13$, 21.02 и 25.01, являющихся мнимыми частями первых трех нулей, найденных Риманом).

Должен признать, что мой личный вклад в создание рис. P.1 свелся к написанию нескольких строчек кода в MATLAB, и пока я изнурял себя приготовлением чашечки кофе (и даже эту элементарную задачу за меня решила микроволновка!), мой ноутбук вычислил $|\zeta(z)|$ при 2000 значениях $b$, равномерно распределенных в интервале от 0 до 27, и построил показанный выше график – на все про все ушло около одной минуты. (Как вы думаете, что смог бы сделать Риман, имей он такое устройство?) Конечно, для чистого математика все эти компьютерные вычисления не значат ровным счетом *ничего*. Открытие хотя бы одного комплексного корня, не лежащего на критической прямой, стало бы смертельным ударом по гипотезе Римана. И *ничто* из известного математикам не препятствует такой возможности. Х. М. Эдвардс, изучавший дзета-функцию, писал: «...если только нет какой-то глубинной причины, не дающейся математикам на протяжении 110 лет (уже 142 на момент написания этого текста), то вполне возможны [комплексные] корни, не лежащие на критической прямой»[1]. Так что, несмотря на триллионы известных последовательных нулей на критической прямой, все-таки может оказаться, что Риман был неправ. Дальше Эдвардс пишет: «Озарение Римана удивительно, но не сверхъестественно, и то, что казалось “вероятным” ему в 1859 году, возможно, не так уж вероятно сегодня»[2].

Кстати, раз уж речь зашла о критической прямой, вот еще одно занятное вычисление, в котором вы можете попробовать свои силы (один читатель жаловался, что в книге мало задач, над которыми он мог бы поломать голову, – хотя это не учебник и не задачник). После того как прочитаете материал о гамма-функции и знаменитой формуле дополнения Эйлера (разделы 6.12 и 6.13), попробуйте доказать, что абсолютная величина гамма-функции на критической прямой равна

$$|\Gamma(z)|_{z=1/2+ib} = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi b)}}.$$

Доказательство приведено в новом приложении F в самом конце книги, но не подглядывайте, пока не попробуете сами. (Подсказка: вспомните, что такое комплексно-сопряженное число.) Вычислить значение $\zeta(z)$ на критической прямой гораздо труднее; до сих пор известна только верхняя граница величины $|\zeta(½ + ib)|$ как функция от $b^3$.

До сих пор я не упоминал о своих мелких математических ошибках, а просто молча исправлял то неправильный знак, то неверный показатель степени и, не афишируя, двигался дальше. Но в разделе 6.7 письма профессоров Бэркеля и Вунша уличили меня в излишней хитрости – для моего (и вашего) блага. В этом случае я решил не скрывать свои досадные промахи и процитировать их письма. Это позволит вам и получить исправленный текст, и заодно посмеяться надо мной. (Вот книга по математике от издательства Princeton и окупится!) Проблема заключается в некоторых моих манипуляциях с $i = \sqrt{-1}$, например когда на стр. 217 я писал «Ошибка произошла, когда мы заменили $-1$ на $i^2$», а на стр. 218 – «Например, не следует заменять $-i/i$ на $-1$, а затем подставлять $i^2$ вместо $-1$». В первом случае профессор Вунш написал «в этом [замене $-1$ на $i^2$] нет ничего дурного. Ошибка же таится вот где:

$$\frac{i}{2}\ln i^2 = 2\ln i.$$

Проблема в том, что множество значений функции $\log z^2$ не совпадает с множеством значений $2\log z$. Рассмотрим равенство

$$\ln i^2 = 2\ln i.$$

Предположим, что вместо левой части мы напишем $-\pi i$. Множество значений правой части имеет вид

$$2\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = i[\pi + 4k\pi].$$

Не существует ни одного целого $k$, при котором это равенство выполнялось бы». Что же касается второго случая, то профессор Бэркель написал: «я думаю, что если нельзя заменить $-1$ на $-i/i$, а $i^2$ – на $-1$, то математика превращается в мистику. Все это объясняется отсутствием общеизвестного свойства го-

моморфности комплексного логарифма... log(*ab*) необязательно равно log(*a*) + log(*b*)». Что на это сказать? Оба профессора правы. Я пытался выразить свои мысли, не употребляя таких слов, как *гомоморфизм*, а в результате только все запутал. Автор сокрушенно посыпает главу пеплом.

В письме профессора Бэркеля исправлено также мое утверждение на стр. 289 о том, что до работы Лорана «Коши не знал о разложении аналитических функций в степенной ряд». Профессор Бэркель написал: «Это не так. Коши вывел представление в виде степенного ряда в знаменитом Туринском мемуаре 1831 года. Вклад Лорана – разложение в *двусторонний* степенной ряд в окрестности особой точки».

И последнее замечание. Закончив читать книгу, вы будете иметь полное право исполнить приведенную ниже песенку (лучше в одиночестве, в душе). Это разрешение действует бессрочно – или, по крайней мере, до тех пор, пока ваша половинка не попросит вас заткнуться (моя так и поступила). Установить, кто автор, я не сумел, но он или она, несомненно, обладал(а) недюжинным чувством юмора:

**Песня о комплексных числах**

(*на мотив «Боевого гимна Республики»*)[i]

Mine eyes have seen the glory of the Argand diagram,
They have seen the i's and thetas of De Moivre's mighty plan.
Now I can find the complex roots with consummate elan,
With the root of minus one.

(*Хор*)
*Complex numbers are so easy;*
*Complex numbers are so easy;*
*Complex numbers are so easy;*
*With the root of minus one.*

In Cartesian co-ordinates the complex plane is fine,
But the grandeur of the polar form this beauty doth outshine.
You'll be raising i + 40 to the power of 99,
With the root of minus one.

*Хор*

---

[i] Американская патриотическая песня. Хорошо известен ее рефрен «Glory, glory, hallelujah!». – *Прим. перев.*

You'll realize your understanding was just second rate,
When you see the power and magic of the complex conjugate.
Drawing vectors corresponding to the roots of minus eight,
With the root of minus one.

*Хор*

Искренне надеюсь, что книга вам понравится!

paul.nahin@unh.edu
Ли, Нью-Гэмпшир,
июль 2006

# *Предисловие*

Давным-давно, так давно (в 1954 году), что тогдашняя моя бытность учеником старшего класса школы кажется далеким сном, отец подарил мне подписку на новый тогда журнал *Popular Electronics*. Он это сделал, потому что сам был ученым, а его старший сын, похоже, проявлял способности к наукам и к математике[i], но была опасность, что его затянет в греховный мир научной фантастики. Вообще-то я давал ему достаточно оснований так думать. В те дни я жадно поглощал научную фантастику, зачастую засиживаясь в кухне до одиннадцати часов в компании огромного сэндвича и читая роман, действие которого разворачивалось на Марсе через миллион лет. Папа, конечно, предпочел бы, чтобы я читал книгу по алгебре или физике. Но, будучи умным человеком, он не стал запрещать мне научную фантастику, а зашел с фланга, решив пристрастить меня к чтению *технических* рассказов, например из рубрики «Карл и Джерри», которая каждый месяц печаталась в *Popular Electronics*. Карл и Джерри – два школьника-вундеркинда (сейчас их назвали бы ботанами или гиками), увлекающиеся электроникой и то и дело влипающие в разные истории, из которых выбираются благодаря своим техническим познаниям. План отца состоял в том, чтобы я отождествлял себя с Карлом и Джерри, а не с неврастениками, путешествующими по времени в романах Роберта Хайнлайна.

Что ж, дьявольский папин план сработал (хотя до конца я так и не забросил научную фантастику), и я подсел не только на Карла и Джерри, но и на проекты конструирования электронных устройств, представленные в каждом номере журнала. Я научился читать электрические схемы по журналу, редакторы которого пользовались такими же наглядными монтажными схемами, какие хорошо известны всем, кто заказывал электронный конструктор по почте. Я оборудовал мастерскую

---

[i] В англосаксонской традиции математика не относится к числу естественных наук (натурфилософии), а стоит особняком. – *Прим. перев.*

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru