ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ» адресовано старшеклассникам с целью повторения, закрепления, систематизации, проверки знаний по алгебре и началам математического анализа и геометрии. В пособии представлены задания с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровня сложности второй части единого государственного экзамена по математике. Эти задания предназначены, прежде всего, для будущих студентов технических, экономических, математических и других вузов, предъявляющих повышенные требования к уровню математической подготовки абитуриентов.

Содержание заданий с развёрнутым ответом контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена соответствует спецификации экзамена по математике, опубликованной на сайте Федерального института педагогических измерений (https://fipi.ru) в разделе «ЕГЭ: демоверсии, спецификации, кодификаторы». В рамках спецификации экзамена по математике профильного уровня продолжается расширение тематики задач. Указанные изменения нашли свое отражения в книге, которую вы держите в руках.

В пособии даны не только задания, которые были на экзаменах и в диагностических работах в прошлые годы, а есть задания подготовительного характера. Каждому заданию КИМ ЕГЭ посвящена отдельная глава (по количеству заданий второй части экзамена по математике профильного уровня). По тематике каждая глава разбита на параграфы. В конце каждого параграфа есть раздел «Задания для самостоятельного решения». В некоторых параграфах раздел «Задания для самостоятельного решения» усилен дополнительным разделом «Тренировочная работа», который тематически охватывает задания параграфа.

В книге семь глав. Уравнениям повышенного уровня сложности (показательным, логарифмическим, тригонометрическим) посвящена первая глава. Вторая глава содержит задания по неравенствам (рациональным, показательным, логарифмическим, системам этих неравенств). В третьей главе собраны текстовые задачи с экономическим содержанием (кредиты, вклады, оптимальный выбор). В четвёртой главе собраны задания высокого уровня – задания с параметром. Планиметрические геометрические задания повышенного уровня собраны в пятой главе. Стереометрическим геометрическим заданиям посвящена шестая глава. В геометрических задачах обратите внимание на пункты, связанные с доказательством какого-либо геометрического факта. Арифметические и алгебраические задания повышенного и высокого уровня сложности собраны в седьмой главе.

В каждой главе задания распределены по параграфам. В каждом параграфе сначала даются задания с решениями (краткими), а потом задания для самостоятельной работы, к которым также даны краткие ответы. Ни в коем случае приведённые решения не претендуют на роль эталона – эти решения даны в очень сжатом виде. Очень часто приведённые решения придётся читателю «расшифровывать», дополняя промежуточными преобразованиями, вычислениями и логическими обоснованиями, в этих решениях часто лишь обозначены основные этапы решения задачи. Математические задания могут быть решены с использованием разных подходов и методов. На экзамене проверяется математическая грамотность решения участника экзамена. При подготовке к экзамену с использованием этого пособия авторы рекомендуют сначала попробовать решить задачу, к которой написано решение, самостоятельно, а потом уже знакомиться с решением, данным в книге. После рассмотрения заданий с решениями параграфа обязательно нужно решать задания для самостоятельной работы.

При решении заданий повышенного уровня сложности нужно учитывать, что решение обязательно должно быть доведено до ответа – только в этом случае можно рассчитывать на какие-то баллы. В заданиях высокого уровня сложности баллы могут быть выставлены лишь за законченный фрагмент решения. При решении заданий нужно учитывать, что на экзамене нет калькулятора, поэтому в подготовительной работе особо нужно уделять внимание вычислениям без калькулятора.

Пособие соответствует содержанию курса математики профильного уровня средней школы и может помочь выпускникам школ в подготовке к Единому государственному экзамену. Гарантией успешной сдачи экзамена является систематическое изучение математики в школе и самостоятельная работа, включающую в себя вдумчивое решение математических задач.

В пособии использованы задачи, предложенные А.Р. Рязановским, П.В. Семёновым, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым, И.Р. Высоцким, М.Я. Пратусевичем, С.А. Шестаковым, О.Н. Косухиным, А.В. Семеновым, В.А. Смирновым, А.В. Хачатуряном, Р.К. Гординым, А.И. Суздальцевым, Д.А. Фёдоровых, М.А. Волчкевичем.

Авторы благодарны Д.Б. Житницкому, Ю.О. Пукасу, Л.А. Титовой, В.Ю. Шапариной за помощь при подготовке книги к печати.

1. УРАВНЕНИЯ

1.1. Тригонометрические уравнения

1. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

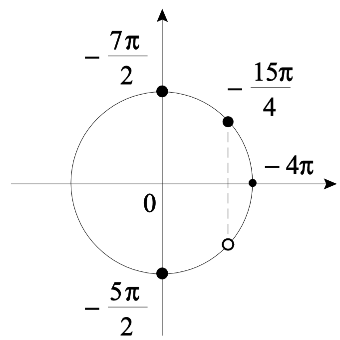
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\cos x + 1 = 0;\ \ 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0;\ \ \cos x\cdot\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0,$ откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ или $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$ или $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right].$

Получим числа: $-\dfrac{15\pi}{4}, -\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{5\pi}{2}.$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$

б) $-\dfrac{15\pi}{4}, -\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{5\pi}{2}.$

2. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\sin^2\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin 2x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

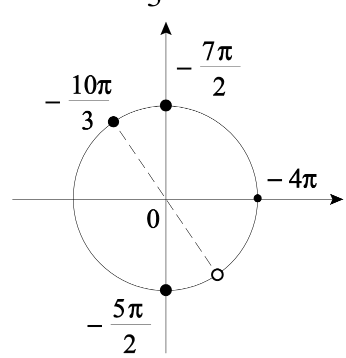
$$2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x = 0;\ \ \cos x\cdot\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0.$$

Значит,

$$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k\in\mathbb{Z},\ \text{или}\ \sin x = -\sqrt{3}\cos x;\ \ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3};\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right].$

Получим числа: $-\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{10\pi}{3}, -\dfrac{5\pi}{2}.$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $-\dfrac{7\pi}{2}, -\dfrac{10\pi}{3}, -\dfrac{5\pi}{2}.$

3. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 2x = 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$

Решение.

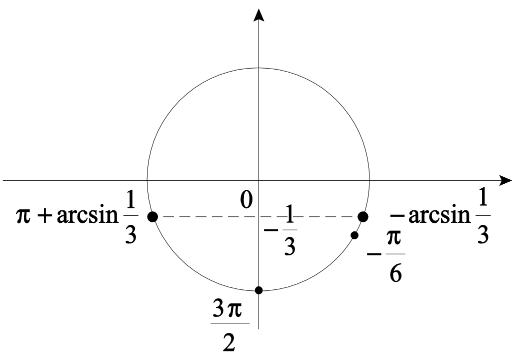
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\sin^2 x - 5\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 1;\ \ 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Пусть $\sin x = t,$ где t принадлежит $[-1; 1],$ тогда уравнение принимает вид $3t^2 - 5t - 2 = 0.$ Получаем, что либо $t = -\frac{1}{3},$ либо $t = 2$ – противоречит тому, что $t \in [-1; 1].$

Получаем: $\sin x = -\frac{1}{3}$, откуда $x = -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$ или $x = \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\arcsin\frac{1}{3},\ \pi + \arcsin\frac{1}{3}.$

Ответ: а) $-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z};$

$\pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$

б) $-\arcsin\frac{1}{3}, \pi + \arcsin\frac{1}{3}.$

4. а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi].$

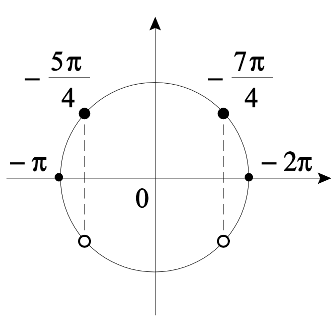
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0; 2\cos^2 x = 1; \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

откуда $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi].$



Получим числа: $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$

5. а) Решите уравнение $4\sin^4 x - 3\cos^2 x + 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$

Решение.

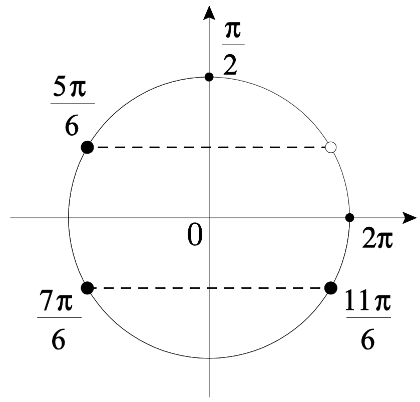
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4\sin^4 x-3\left(1-\sin^2 x\right)+2=0;\ \ 4\sin^4 x+3\sin^2 x-1=0.$$

Пусть $\sin^2 x=t$, где $t\geq 0$, тогда уравнение принимает вид $4t^2+3t-1=0$. Получаем, что либо $t=\frac{1}{4}$, либо $t=-1$ – противоречит тому, что $t\geq 0$.

Получаем: $\sin^2 x=\frac{1}{4}$, $\sin x=\pm\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение $\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение:

$$\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0;\quad \begin{cases}\cos x=-\frac{4}{5},\\ \operatorname{tg} x\neq\frac{3}{4}.\end{cases}$$

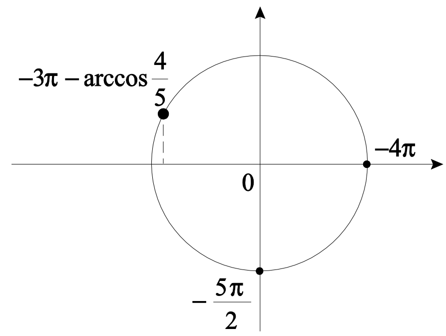
Из уравнения $\cos x=-\frac{4}{5}$ получаем, что $x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$, или $x=\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi=\arccos\frac{4}{5}$, тогда $\cos\varphi=\frac{4}{5}$ и $\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, значит, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, то есть $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi k\right)=\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$, чего быть не должно.

$$\operatorname{tg}\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n\right)=\operatorname{tg}\left(-\arccos\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}\neq\frac{3}{4}.$$

Получаем решение исходного уравнения: $x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим число $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$.

Ответ: а) $\pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$.

7. а) Решите уравнение $\dfrac{5}{\cos^2\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)} + \dfrac{7}{\sin x} - 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $\dfrac{5}{\sin^2 x} + \dfrac{7}{\sin x} - 6 = 0$.

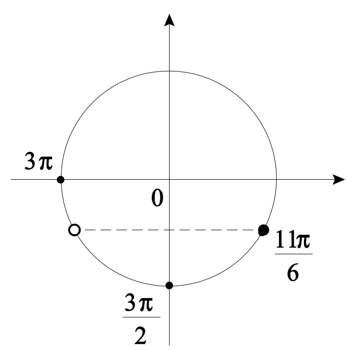
Пусть $t = \dfrac{1}{\sin x}$, тогда уравнение примет вид:

$$5t^2 + 7t - 6 = 0;\ (5t-3)(t+2) = 0,\ \text{откуда}\ t = \frac{3}{5}\ \text{или}\ t = -2.$$

При $t = \frac{3}{5}$ получаем, что $\sin x = \frac{5}{3}$ – нет корней.

При $t = -2$ получаем, что $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим число $\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{6}$.

8. а) Решите уравнение $2\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{5}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение

$$2\operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0;\ \frac{2 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0.$$

Пусть $t=\cos x,$ тогда уравнение примет вид:

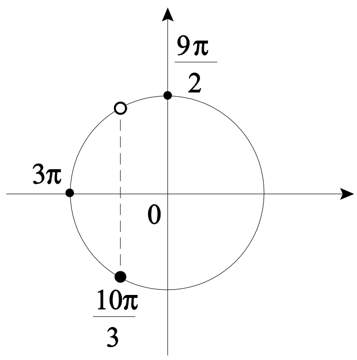
$$\frac{2-2t^2}{t^2}+\frac{5}{t}+4=0;\ \frac{2t^2+5t+2}{t^2}=0;\ \frac{(2t+1)(t+2)}{t^2}=0,$$

откуда $t=-\frac{1}{2}$ или $t=-2.$

При $t=-2$ получаем, что $\cos x=-2$ – нет корней.

При $t=-\frac{1}{2}$ получаем, что $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right].$



Получим число $\frac{10\pi}{3}.$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $\frac{10\pi}{3}.$

9. а) Решите уравнение $\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right].$

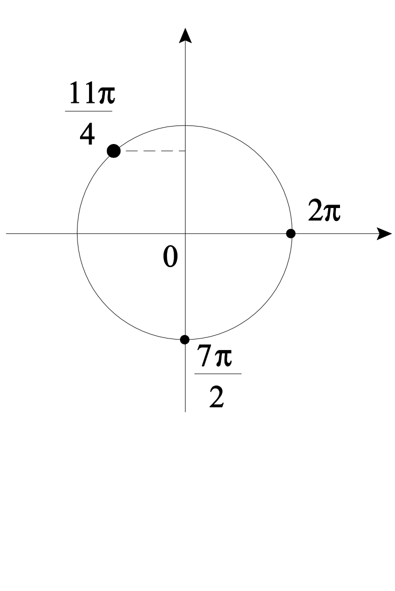
Решение.

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{-\cos x}=-1,\end{array}\right.\\ \cos x\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\le 0,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right].$



Получим число $\frac{11\pi}{4}.$

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

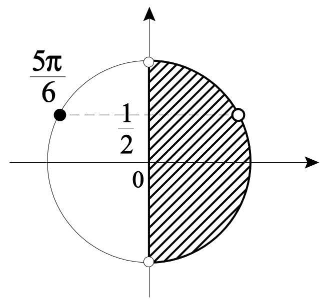
б) $\frac{11\pi}{4}.$

10. а) Решите уравнение $\dfrac{8\sin^2 x - 14\sin x + 5}{\sqrt{-6\cos x}} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -3\pi\right].$

Решение.

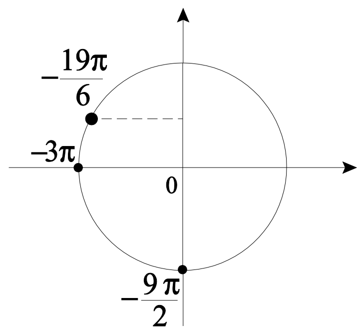
а) $\dfrac{8\sin^2 x - 14\sin x + 5}{\sqrt{-6\cos x}} = 0;$ $\begin{cases} 8\sin^2 x - 14\sin x + 5 = 0, \\ \cos x < 0; \end{cases}$



$\begin{cases} (4\sin x - 5)(2\sin x - 1) = 0, \\ \cos x < 0, \end{cases}$ откуда или $\begin{cases} \sin x = \dfrac{5}{4}, \\ \cos x < 0, \end{cases}$ нет корней,

или $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos x < 0, \end{cases}$ $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2}; -3\pi\right].$



Получим число $-\dfrac{19\pi}{6}.$

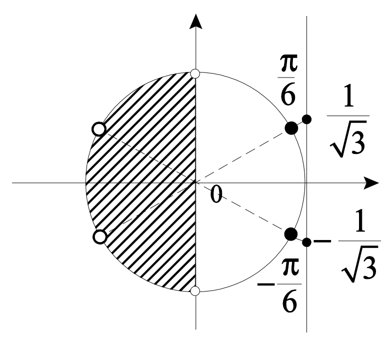
Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

б) $-\dfrac{19\pi}{6}.$

11. а) Решите уравнение $\dfrac{3\mathrm{tg}^2\, x - 1}{\sqrt{7\cos x}} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right].$

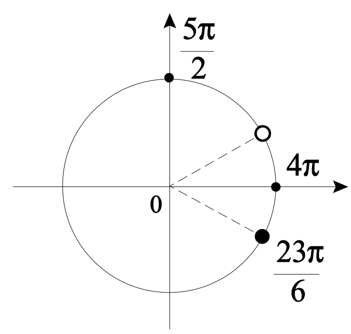
Решение.



а) $\dfrac{3\mathrm{tg}^2\, x - 1}{\sqrt{7\cos x}} = 0;$ $\begin{cases} 3\mathrm{tg}^2\, x - 1 = 0, \\ \cos x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \mathrm{tg}\, x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \cos x > 0, \end{cases}$

откуда $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right].$



Получим число $\dfrac{23\pi}{6}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$ $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

б) $\dfrac{23\pi}{6}.$

12. а) Решите уравнение $5\sin^2 x-3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};1\right].$

Решение.

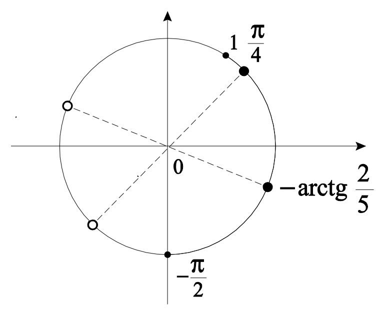
а) Если $\cos x=0,$ то тогда и $\sin x=0,$ что одновременно невозможно.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0.$ Получаем:

$$5\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-3\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-2=0;\ \ 5\mathrm{tg}^2\, x-3\mathrm{tg}\, x-2=0.$$

Пусть $\mathrm{tg}\, x=t,$ тогда уравнение принимает вид $5t^2-3t-2=0,$ получаем: $t=-\frac{2}{5},$ $\mathrm{tg}\, x=-\frac{2}{5},$ откуда $x=-\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+\pi k,$ $k\in\mathbb{Z},$ или $t=1,$ $\mathrm{tg}\, x=1,$ откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};1\right],$ учитывая, что $\frac{\pi}{4}<\frac{4}{4}=1.$



Получим числа: $-\mathrm{arctg}\frac{2}{5},$ $\frac{\pi}{4}.$

Ответ: а) $-\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+\pi k,$ $k\in\mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$

б) $-\mathrm{arctg}\frac{2}{5},\frac{\pi}{4}.$

13. а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin^2 3x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right].$

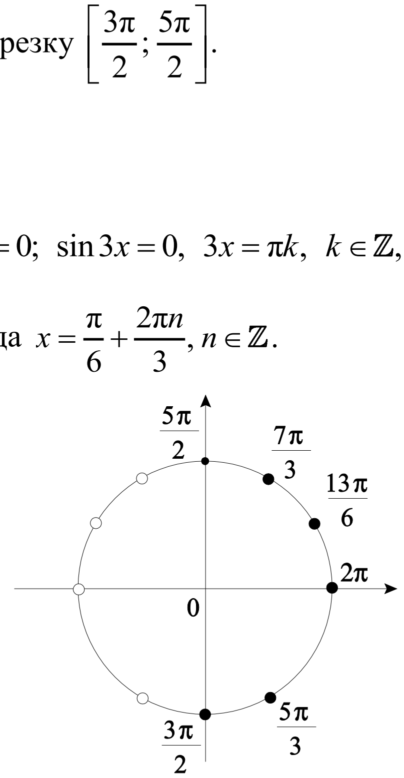
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\sin\left(\frac{7x}{2}-\frac{x}{2}\right)=\sin^2 3x;\ \ \sin^2 3x-\sin 3x=0;\ \ \sin 3x\left(\sin 3x-1\right)=0;\ \ \sin 3x=0,\ \ 3x=\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z},$$

откуда $x=\frac{\pi k}{3},$ $k\in\mathbb{Z},$ или $\sin 3x=1,$ $3x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z},$ откуда $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right].$



Получим числа: $\frac{3\pi}{2},$ $\frac{5\pi}{3},$ $2\pi,$ $\frac{13\pi}{6},$ $\frac{7\pi}{3}.$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{3},$ $k\in\mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},$ $n\in\mathbb{Z};$

б) $\frac{3\pi}{2},$ $\frac{5\pi}{3},$ $2\pi,$ $\frac{13\pi}{6},$ $\frac{7\pi}{3}.$

14. а) Решите уравнение $\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos^3 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\left(\cos 2x-4\cos^3 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0;\ \ \cos 2x\left(1-4\cos^2 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0;$$

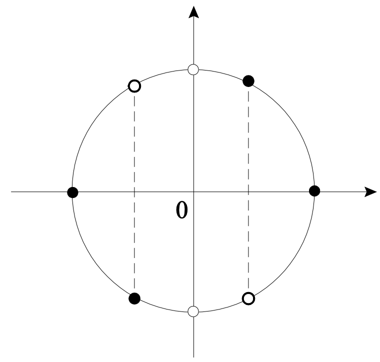
$$\cos 2x\left(1-2\cos 2x\right)\left(1+2\cos 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0.$$

Пусть $t=2x,$ тогда уравнение принимает вид

$$\cos t\left(1-2\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)\sqrt{\operatorname{tg} t}=0.$$

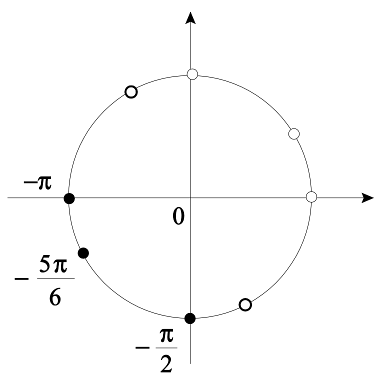
Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos t=0,\\ \cos t=\pm\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg} t=0,\end{array}\right.\\ \operatorname{tg} t\ge 0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}t=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ t=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ 2x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\pi,\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}.$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};$

б) $-\pi,\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}.$

Задания для самостоятельного решения

1. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

2. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin 2x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$

3. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 9\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 3\cos 2x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right].$

4. а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi].$

5. а) Решите уравнение $12\cos^4 x + 5\sin^2 x - 8 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$

6. а) Решите уравнение $\frac{5\operatorname{tg} x - 12}{13\cos x - 5} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right].$

7. а) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{9}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)} + 4 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right].$

8. а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

9. а) Решите уравнение $(2\cos x + 1)\left(\sqrt{-\sin x} + 1\right) = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right].$

10. а) Решите уравнение $\dfrac{6\sin^2 x-5\sin x-4}{\sqrt{-2\cos x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. а) Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\sqrt{3\sin x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

12. а) Решите уравнение $4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

13. а) Решите уравнение $\sin\dfrac{5x}{2}\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\cos^2 3x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi]$.

14. а) Решите уравнение $\left(\sin\left(4x-\dfrac{5\pi}{2}\right)+2\cos^3 4x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 4x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

1.2. Показательные уравнения

В этом разделе при отборе корней часто приходится пользоваться не только приближёнными значениями логарифмических выражений, но и свойствами логарифмов.

Далее приведём примеры оценки и сравнения чисел.

1. $\log_7 48 < \log_7 49 = 2$.

2. $\log_7 \sqrt{50} > \log_7 \sqrt{49} = 1$.

3. $\log_{30} 3 = \dfrac{1}{\log_3 30}$. Поскольку $30 > 27$, $\log_3 30 > \log_3 27$ (основание логарифма больше 1), следовательно, $\dfrac{1}{\log_3 30} < \dfrac{1}{\log_3 27} = \dfrac{1}{3}$, а значит, $\log_{30} 3 < \dfrac{1}{3}$.

С другой стороны, $30 < 81$, откуда $\log_3 30 < \log_3 81 = 4$, а значит, $\log_{30} 3 > \dfrac{1}{4}$.

4. Сравним $\log_{0,3} 10$ и -2 несколькими способами.

Первый способ:

$$\log_{0,3} 10 = \log_{\frac{3}{10}} 10 = \frac{1}{\lg \frac{3}{10}} = \frac{1}{\lg 3 - \lg 10} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 10} - 1} = -\frac{\log_3 10}{\log_3 10 - 1}.$$

Далее будем преобразовывать неравенство по классическим правилам, при этом левую и правую часть при необходимости будем менять местами так, чтобы знак неравенства (изначально обозначим его «$\vee$») оставался неизменным. Когда сравнение левой и правой станет очевидным, вместо «$\vee$» подставим нужный знак и, пройдя цепочку преобразований в обратном порядке, получим необходимое сравнение чисел.

$$\log_{0,3} 10 \vee -2$$

$$-\frac{\log_3 10}{\log_3 10 - 1} \vee -2$$

$$2 \vee \frac{\log_3 10}{\log_3 10 - 1}$$

$$2\log_3 10 - 2 \vee \log_3 10$$

$$\log_3 10 \vee 2$$

$$\log_3 10 \vee \log_3 9$$

Поскольку $10 > 9$ и $3 > 1$, значение выражения слева больше, значит, вместо «$\vee$» везде теперь можно поставить знак «$>$», и получим ответ: $\log_{0,3} 10 > -2$.

Второй способ. Преобразуем число -2:

$$-2 \cdot (\log_{0,3} 0{,}3) = \log_{0,3}(0{,}3)^{-2} = \log_{0,3}\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \log_{0,3}\frac{100}{9} = \log_{0,3}\left(11\frac{1}{9}\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_{0,3} x$: она убывающая (т.к. $0{,}3 < 1$), следовательно, если $x_1 > x_2$, то $\log_{0,3} x_1 < \log_{0,3} x_2$. Таким образом, поскольку $11\frac{1}{9} > 10$, получим:

$$\log_{0,3}\left(11\frac{1}{9}\right) < \log_{0,3} 10, \text{ откуда } \log_{0,3} 10 > -2.$$

Рассуждение, использованное при решении вторым способом, можно использовать более широко для любых монотонных непрерывных функций.

5. Оценим значение $\log_2 \sqrt[5]{7} = \frac{1}{5}\log_2 7$ и $\log_{0,5} \sqrt[7]{5} = \frac{1}{7}\log_{0,5} 5$.

$$4 < 7 < 8$$
$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$$
$$\frac{2}{5} < \frac{1}{5}\log_2 7 < \frac{3}{5}$$

$$4 < 5 < 8$$
$$\log_{0,5} 8 < \log_{0,5} 5 < \log_{0,5} 4$$
$$-\frac{\log_2 8}{7} < \frac{1}{7}\log_{0,5} 5 < -\frac{\log_2 4}{7}$$
$$-\frac{3}{7} < \frac{1}{7}\log_{0,5} 5 < -\frac{2}{7}$$

Во втором столбце при переходе ко второй строчке все знаки поменялись (мы записали двойное неравенство в классическом виде, поэтому знаки-то остались, но «края» неравенства поменялись местами), потому что $f(x) = \log_{0,5} x$ – убывающая функция (основание логарифма меньше 1).

1. а) Решите уравнение $7^{2x^2+x} = 49^{\frac{2x+1}{x+1}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{0,2}\left(\sqrt{5}+1\right); \frac{4\sqrt{3}}{7}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$7^{2x^2+x} = 7^{2\cdot\frac{2x+1}{x+1}};\ \ 2x^2 + x = 2\cdot\frac{2x+1}{x+1};\ \ x(2x+1) - 2\cdot\frac{2x+1}{x+1} = 0;$$
$$\frac{(2x+1)(x^2+x-2)}{x+1} = 0;\ \ \frac{(2x+1)(x+2)(x-1)}{x+1} = 0,$$

откуда $x = -2,\ x = -\frac{1}{2},\ x = 1.$

б) Поскольку

$$-2 = \log_{0,2} 25 < \log_{0,2}\left(\sqrt{5}+1\right) < \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} = -\frac{1}{2} < \frac{4\sqrt{3}}{7} < 1,$$

отрезку $\left[\log_{0,2}\left(\sqrt{5}+1\right); \frac{4\sqrt{3}}{7}\right]$ принадлежит только корень $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $-2,\ -\frac{1}{2},\ 1$; б) $-\frac{1}{2}$.

2. а) Решите уравнение $4^{x-\frac{1}{2}} - 5\cdot 2^{x-1} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие интервалу $\left(1; \frac{5}{3}\right)$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2^{2x-1} - 5\cdot 2^{x-1} + 3 = 0;\ \ 2\cdot 2^{2x-2} - 5\cdot 2^{x-1} + 3 = 0.$$

Пусть $2^{x-1} = t$, тогда уравнение принимает вид $2t^2 - 5t + 3 = 0$, откуда либо $t = 1$, либо $t = \frac{3}{2}$.

При $t = 1$ получаем: $2^{x-1} = 1;\ x = 1$.

При $t = \frac{3}{2}$ получаем: $2^{x-1} = \frac{3}{2};\ x = \log_2 \frac{3}{2} + 1 = \log_2 3$.

б) Корень $x=1$ не принадлежит интервалу $\left(1;\frac{5}{3}\right)$.

Поскольку $1=\log_2 2<\log_2 3=\frac{1}{3}\cdot\log_2 27<\frac{1}{3}\cdot\log_2 32=\frac{5}{3}$, то корень $x=\log_2 3$ принадлежит интервалу $\left(1;\frac{5}{3}\right)$.

Ответ: а) 1, $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

3. а) Решите уравнение $0,5^{2x^2-10x+12}+0,5^{-2x^2+10x-12}=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 20;\log_5 40]$.

Решение.

а) Пусть $0,5^{2x^2-10x+12}=t$, тогда уравнение примет вид:

$$t+t^{-1}=2;\ t+\frac{1}{t}=2;\ \frac{t^2-2t+1}{t}=0,$$

откуда $t=1$.

При $t=1$ получаем: $0,5^{2x^2-10x+12}=1$; $2x^2-10x+12=0$; $2(x-3)(x-2)=0$, откуда $x=2$ или $x=3$.

б) Поскольку $\log_5 20<2<\log_5 40<3$, отрезку $[\log_5 20;\log_5 40]$ принадлежит только корень $x=2$.

Ответ: а) 2, 3; б) 2.

4. а) Решите уравнение $\frac{44-4^{-x}}{8-2^{-x}}=7$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\log_4 11;0]$.

Решение.

а) Пусть $t=2^{-x}$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{44-t^2}{8-t}=7;\ \frac{44-t^2-56+7t}{8-t}=0;\ \frac{t^2-7t+12}{t-8}=0;\ \frac{(t-3)(t-4)}{t-8}=0,$$

откуда $t=3$ или $t=4$.

При $t=3$ получаем: $2^{-x}=3$, откуда $x=-\log_2 3$.

При $t=4$ получаем: $2^{-x}=4$, откуда $x=-2$.

б) Поскольку $-2=-\log_4 16<-\log_4 11<-\log_4 9=-\log_2 3<0$, отрезку $[-\log_4 11;0]$ принадлежит только корень $x=-\log_2 3$.

Ответ: а) $-2,-\log_2 3$; б) $-\log_2 3$.

5. а) Решите уравнение $\frac{16^x-8^{x+\frac{2}{3}}+5}{2^x-3}=5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{2}{3};1\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=2^x$, тогда уравнение примет вид:

$$\frac{t^4-4t^3+5}{t-3}=5;\ \frac{t^4-4t^3+5-5t+15}{t-3}=0;\ \frac{t^3(t-4)-5(t-4)}{t-3}=0;\ \frac{(t^3-5)(t-4)}{t-3}=0,$$

откуда $t=\sqrt[3]{5}$ или $t=4$.

При $t=\sqrt[3]{5}$ получаем: $2^x=\sqrt[3]{5}$, откуда $x=\frac{1}{3}\log_2 5$.

При $t=4$ получаем: $2^x=4$, откуда $x=2$.

б) Поскольку $\frac{2}{3}<\frac{1}{3}\log_2 5<1<2$, отрезку $\left[\frac{2}{3};1\right]$ принадлежит только корень $x=\frac{1}{3}\log_2 5$.

Ответ: а) $\frac{1}{3}\log_2 5,\ 2$; б) $\frac{1}{3}\log_2 5$.

6. а) Решите уравнение $27^x-7\cdot 9^x-3^{x+3}+189=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1;\log_3 6]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{3x}-7\cdot 3^{2x}-27\cdot 3^x+189=0.$$

Пусть $3^x=t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^3-7t^2-27t+189=0;\ t^2(t-7)-27(t-7)=0;\ (t^2-27)(t-7)=0,$$

откуда $t=-\sqrt{27},\ t=\sqrt{27},\ t=7$.

При $t=-\sqrt{27}$ получаем: $3^x=-\sqrt{27}$ – нет корней.

При $t=\sqrt{27}$ получаем: $3^x=3^{\frac{3}{2}};\ x=\frac{3}{2}$.

При $t=7$ получаем: $3^x=7;\ x=\log_3 7$.

б) Поскольку $1<\frac{3}{2}=\log_3\sqrt{27}<\log_3\sqrt{36}=\log_3 6<\log_3 7$, отрезку $[1;\log_3 6]$ принадлежит только корень $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: а) $\frac{3}{2}, \log_3 7$; б) $\frac{3}{2}$.

7. а) Решите уравнение $5\cdot 25^{x+1}-8\cdot 15^{x+1}+3^{2x+3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$5\cdot 5^{2(x+1)}-8\cdot 5^{x+1}\cdot 3^{x+1}+3\cdot 3^{2(x+1)}=0.$$

Разделим обе части уравнения на $3^{2(x+1)}$:

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2(x+1)}-8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}+3=0.$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}=t$, тогда уравнение принимает вид $5t^2-8t+3=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{3}{5}$.

При $t=1$ получаем: $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}=1;\ \ x=-1.$

При $t=\frac{3}{5}$ получаем: $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}=\frac{3}{5};\ \ x+1=-1;\ \ x=-2.$

б) Так как $-4<-\pi<-2,$ то $-2<-\frac{\pi}{2}<-1<\pi.$ Отсюда следует, что отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ принадлежит только корень $x=-1.$

Ответ: а) $-2,-1;$ б) $-1.$

8. а) Решите уравнение $\left(\sqrt[5]{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[5]{4-\sqrt{15}}\right)^x=8.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt[4]{500};\sqrt{30}\right].$

Решение.

а) Воспользуемся равенством $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}.$

Пусть $t=\left(\sqrt[5]{4+\sqrt{15}}\right)^x$, тогда $\left(\sqrt[5]{4-\sqrt{15}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt[5]{4+\sqrt{15}}\right)^x}=\frac{1}{t}.$

Исходное уравнение принимает вид: $t+\frac{1}{t}=8;\ \ t^2-8t+1=0,$ откуда $t=4+\sqrt{15}$ или $t=4-\sqrt{15}.$

При $t=4+\sqrt{15}$ получаем: $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{5}}=4+\sqrt{15};\ \ x=5.$

При $t=4-\sqrt{15}$ получаем: $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{5}}=4-\sqrt{15};\ \ x=-5.$

б) Поскольку $-5=-\sqrt[4]{625}<-\sqrt[4]{500}<0<5=\sqrt{25}<\sqrt{30},$ то отрезку $\left[-\sqrt[4]{500};\sqrt{30}\right]$ принадлежит только корень $x=5.$

Ответ: а) $-5,\ 5;$ б) $5.$

9. а) Решите уравнение $9^x-49^x=58\left(3^x-7^x\right).$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}3;\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:
$\left(3^x-7^x\right)\left(3^x+7^x\right)=58\left(3^x-7^x\right);\ \left(3^x-7^x\right)\left(3^x+7^x-58\right)=0,$ откуда $3^x-7^x=0$ или $3^x+7^x-58=0.$

В первом случае $3^x=7^x;\ \left(\frac{3}{7}\right)^x=1;\ \ x=0.$

Во втором случае $3^x+7^x=58.$ Нетрудно заметить, что число 2 является корнем этого уравнения. Покажем, что это уравнение не имеет других корней. Так как каждая из функций $y=3^x$ и $y=7^x$ является возрастающей, то и $f\left(x\right)=3^x+7^x$ – также возрастающая функция. Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента, поэтому уравнение $f\left(x\right)=58$ не имеет других корней, кроме $x=2.$

Таким образом, исходное уравнение имеет два корня: $x=0$, $x=2$.

б) $\sqrt{6}-\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{25}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$, поэтому корень $x=2$ не принадлежит отрезку $\left[\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}3;\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right]$.

$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}3=\log_{2^{-\frac{1}{2}}}3=-2\cdot\log_2 3<0<1{,}5=\sqrt{4}-\frac{1}{2}<\sqrt{6}-\frac{1}{2}$, поэтому корень $x=0$ принадлежит отрезку $\left[\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}3;\sqrt{6}-\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: а) 0, 2; б) 0.

10. а) Решите уравнение $20^{\sqrt{2x^2-5x+1}-2}=2^{\sqrt{2x^2-5x+1}-2}\cdot 5^{2\sqrt{2x^2-5x+1}-4}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{49}\frac{1}{3};\log_3 49\right]$.

Решение.

а) Пусть $t=\sqrt{2x^2-5x+1}-2$, тогда уравнение примет вид:

$$20^t=2^t\cdot 5^{2t};\;\; 2^{2t}\cdot 5^t=2^t\cdot 5^{2t};\;\; \left(\frac{2}{5}\right)^t=1,$$

откуда $t=0$.

При $t=0$ получаем, что

$$\sqrt{2x^2-5x+1}-2=0;\;\; 2x^2-5x+1=4;\;\; (2x+1)(x-3)=0,$$

откуда $x=-\frac{1}{2}$ или $x=3$.

б) Поскольку $-\frac{1}{2}<-\log_{49}3=\log_{49}\frac{1}{3}<3<\log_3 49$, отрезку $\left[\log_{49}\frac{1}{3};\log_3 49\right]$ принадлежит только корень $x=3$.

Ответ: а) $-\frac{1}{2}$, 3; б) 3.

11. а) Решите уравнение $3^{x+\frac{1}{x}}-2\cdot 3^{3-x-\frac{1}{x}}=25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $3^{x+\frac{1}{x}}-2\cdot 3^3\cdot 3^{-x-\frac{1}{x}}=25$; $3^{x+\frac{1}{x}}-\frac{54}{3^{x+\frac{1}{x}}}=25$. Пусть $3^{x+\frac{1}{x}}=t$, тогда уравнение примет вид:

$$t-\frac{54}{t}=25;\;\; \frac{t^2-25t-54}{t}=0;\;\; \frac{(t-27)(t+2)}{t}=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=27$.

При $t=-2$ получаем: $3^{x+\frac{1}{x}}=-2$ – нет корней.