ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход на двухуровневую систему образования сопровождается перестройкой курса высшей математики с целью более экономного и эффективного его преподавания. Для этого нужно более четко представлять структуру курса, уметь выделять в каждом разделе основное, чтобы сосредоточить на нем внимание, как преподавателей, так и студентов.

Основу любого курса составляют понятия, среди которых есть базисные (основные, фундаментальные). Эти понятия выделены, показаны в развитии, показана их связь с приложениями, чтобы студент усваивал курс не фрагментарно, не формально. Поставленные цели преподавания сопровождаются конкретным перечнем знаний и умений, наличие которых у студентов можно проверить и оценить с помощью соответствующего контроля.

Учебная дисциплина отличается от науки, прежде всего, тем, что в ней имеется технология преподавания. Поэтому базис дисциплины состоит из технологической части (технология изучения дисциплины по разделам, контроль усвоения курса, методическое обеспечение) и теоретической части (методология дисциплины, цели курса, базисные понятия разделов, основные задачи, решаемые в разделах, базисные методы решения основных задач, перечень теоретических знаний, умений и навыков в решении задач).

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

1. Комплексные числа, действия с ними

1.1. Вводные соображения

Хорошо известно, что в области вещественных чисел извлечение корня не всегда выполнимо (квадратный корень из отрицательного числа среди вещественных чисел не существует).

Однако потребности самой алгебры и её приложений требует такого расширения понятия числа, при котором действие извлечения квадратного корня из отрицательного числа стало бы осуществимым.

С расширением понятия числа мы уже неоднократно встречались. Для того чтобы сделать возможным деление одного числа на другое, пришлось ввести дробные числа, для возможности вычитания из меньшего числа большего вводятся отрицательные числа, для того чтобы иметь возможность описать результат измерения длины в случае, когда отрезок несоизмерим с выбранной единицей длины, понадобились иррациональные числа.

Присоединение каждого последующего класса чисел к предыдущему расширяет понятие числа и вместе с тем расширяет сферу применения этого понятия. Естественно при этом потребовать, чтобы вновь введенные числа удовлетворяли всем основным законам действий вещественных чисел.

Такое расширение возможно

- либо за счет введения "***мнимой***" единицы i, являющейся корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$,
- либо из геометрических соотношений. Символ i введен Эйлером.

Леонард Эйлер нем. *Leonhard Euler*; 4 (15) апреля 1707, Базель, Швейцария − 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя .

Швейцарский, немецкий и российский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

Эйлер − автор более чем 800 работ: по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки. В 1726 году он был приглашён работать в Санкт-Петербург, куда переехал годом позже. С 1731 по 1741, а также с 1766 года был академиком Петербургской академии наук (в 1741 − 1766 годах работал в Берлине, оставаясь одновременно почётным членом Петербургской Академии). Хорошо знал русский язык и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском.

1.2. Основные определения

Сначала рассмотрим ***первый путь***. Вводим ***новое число*** i − ***мнимую единицу***, такое, что $i^2 = -1$.

Взаимодействие i с вещественными числами состоит в том, что

- можно умножать i на число $y \in \mathbf{R}$, т.е. необходимо появляются числа вида iy,
- и складывать такие числа с вещественными числами, т.е. появляются числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$.

Определение. Множество объектов (выражений) вида $x + iy$ называются ***комплексными числами***,

- где x и y – вещественные числа,
- i – Формальный символ (буква).

Если мы хотим, чтобы на множестве ***комплексных чисел*** были определены привычные простейшие операции, то необходимо положить по определению, что:

1. $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ в том и только в том случае, если

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

2. Сложение определяется правилом

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

3. Умножение определяется правилом

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

4. $x + 0 \cdot i = x$.

Правило 1 показывает, что два ***комплексных числа*** считаются равными, если они неразличимы по записи.

Правило 2 означает, что сложение производится по обычному правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

Правило 3 означает, что умножение ***комплексных чисел*** осуществляется по обычному правилу умножения многочленов, только произведение $i \cdot i$ меняется на число -1.

Правило 4 позволяет считать вещественные числа частным случаем ***комплексных чисел***, когда коэффициент при i равен *нулю*.

Вещественные числа x и y, из которых составляется ***комплексное число*** $x + iy$, называются *компонентами* этого числа.

- Первая *компонента* x называется вещественной частью числа $x + iy$,
- вторая *компонента* y – ***мнимой*** частью.

Обозначения $x = \mathrm{Re}(x + iy)$ (*Realis*),

$y = \mathrm{Im}(x + iy)$ (*Imaginairius*).

Комплексное число $0 + iy$ с вещественной частью, равной *нулю*, носит название ***чисто мнимого*** числа.

Квадрат ***чисто мнимого*** числа, т.е. произведение его на себя, равен вещественному отрицательному числу $(iy)^2 = iy \cdot iy = -y^2$.

- Роль *нуля* во множестве ***комплексных чисел***, как видно из **правила 2**, играет число $0 + i \cdot 0 = 0 \in \mathbf{R}$,
- роль *единицы*, как видно из **правила 3**, − число $1 + i \cdot 0 = 1 \in \mathbf{R}$.

Из свойств вещественных чисел и определений (**правил 1-4**) следует, что множество ***комплексных чисел*** является множеством, содержащим **R** в качестве подмножества.

Множество ***комплексных чисел*** будем обозначать символом **C**, а его элементы чаще всего буквами z и w.

Рассмотрим ***второй путь***.

Правила 1-4, входящие в содержание **определения *комплексного числа***, фактически связаны с вещественными числами – *компонентами* ***комплексного числа***.

Их можно изложить, не пользуясь символом i.

Для этого достаточно писать вместо $x + iy$ просто пару вещественных чисел $(x; y)$, и в этой записи **правила 1-4** имеют следующий вид:

1. $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ в том и только в том случае, если
$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$
2. $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.
3. $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$.
4. $(x; 0) = x$.

В такой форме записи ***комплексных чисел*** и правил действий над ними не может возникнуть сомнений в непротиворечивости этого понятия – речь идет просто о парах упорядоченных вещественных чисел, над которыми совершаются действия по **правилам 1-4**.

От записи ***комплексных чисел*** в виде упорядоченной пары легко перейти к обычной записи. Именно, согласно **правилам 1-4**

$$(x; y) = \{\text{по правилу } 2\} = (x; 0) + (0; y) = \{\text{по правилу } 3\} =$$
$$= (x; 0) + (y; 0) \cdot (0; 1) = \{\text{по правилу } 4\} = x + y \cdot (0; 1).$$

Обозначим пару $(0; 1)$ буквой i.

Получим $(x; y) = x + iy$, причем $i^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1$.

1.3. *Действия над комплексными числами*

Действия над ***комплексными числами*** обладают известными свойствами, которыми обладают одноименные действия над вещественными числами. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1;\ z_2 = x_2 + iy_2;\ z_3 = x_3 + iy_3; z = x + iy.$$

Сложение. Непосредственно проверяются (из **правил 1-4**) основные законы сложения –

коммутативный (*перестановочный*) закон

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

ассоциативный (*сочетательный*) закон

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$

Сложение допускает обратную операцию – вычитание: для любых двух ***комплексных чисел*** z_1 и z_2 можно найти такое число z что

$$z_2 + z = z_1.$$

Это ***комплексное число*** z называется разностью ***комплексных чисел*** z_1 и z_2 и **обозначается** символом $z_1 - z_2$.

Покажем, что вычитание ***комплексных чисел***, как и сложение, проводится *покомпонентно*

$$(x_2 + iy_2) + (x + iy) = x_1 + iy_1 \Leftrightarrow \{\text{по правилу } 2\}$$

$$(x_2 + x) + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1 \Leftrightarrow$$

$$\{\text{по правилу } 1\}\ x_2 + x = x_1,\ \ y_2 + y = y_1 \Leftrightarrow x = x_1 - x_2,\ \ y = y_1 - y_2.$$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (3.1)$$

Произведение любого ***комплексного числа*** на *нуль*

$$0 = 0 + i \cdot 0$$

равно, очевидно, *нулю*.

Умножение ***комплексного числа*** $x + iy$ на вещественное ло $m = m + i \cdot 0$ равно, согласно **правилу 3** $mx + imy$, т.е. умножение ***комплексного числа*** на вещественное производится *покомпонентно*.

Отсюда немедленно следует, что деление на вещественное ло $m \neq 0$ осуществляется тоже *покомпонентно*, ибо деление на m равносильно умножению на $1/m$.

Покажем, что для любого ***комплексного числа*** z существует противоположное ему число $(-z)$, т.е. такое число, что

$$z + (\text{-}z) = 0.$$

Действительно, по **правилам 2 и 4** имеем

$$(x + iy) + (\text{-}x - iy) = (x - x) + i(y - y) = 0 + i \cdot 0 = 0,$$

так что $-x - iy = (-z)$.

Заметим, что $(-z)$ можно воспринимать как $(-1) \cdot z$. Действительно, по правилу умножения имеем

$$(\text{-}1) \cdot (x + iy) = \text{-}x - iy.$$

<u>Умножение</u>. Несложно проверить, что сохраняются основные законы умножения –

- *коммутативный* (*перестановочный*) закон

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

ассоциативный (*сочетательный*) закон

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3,$$

- *дистрибутивный* закон (*распределительный* закон относительно сложения)

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Умножение допускает обратную операцию – деление: для любых двух ***комплексных чисел*** z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ можно найти такое ***комплексное число*** z, что

$$z_1 = z_2 z.$$

Комплексное число z называется <u>частным</u> от деления z_1 на z_2 и **обозначается** через $\frac{z_1}{z_2}$.

Укажем формулу для вычисления частного. Из **правила 3** вытекает, что $x_1 + iy_1 = x_2 x - y_2 y + i(x_2 y + x y_2)$.

Далее согласно **правилу 1** имеем

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ y_2 x + x_2 y = y_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Полученная система (3.2) при $z_2 \neq 0$ всегда разрешима относительно x и y, так как её определитель $x^2 + y^2 > 0$.

Решая систему, получим

$$z = \frac{z_1}{z} = x + iy = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (3.3)$$

Комплексное число $x - iy$ называется сопряженным ***комплексному числу*** $z = x + iy$ и **обозначается** символом $\bar{z}$. Если $z \neq 0$, то

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)\cdot(x - iy) = (x^2 + y^2) + i \cdot 0 = x^2 + y^2 \neq 0$$

есть положительное вещественное число.

Укажем некоторые свойства операции сопряжения.

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2}, \overline{(z_1 z_2)} = \bar{z_1}\bar{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}, \qquad (3.4)$$

Замечание. Вместо того чтобы запоминать формулу (3.3), следует запомнить, что результат для частного

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2},$$

получается, посредством умножения числителя и знаменателя на ***комплексное число*** $x_2 - iy_2$, сопряженное со знаменателем.

Для любого ***комплексного числа*** $z \neq 0$ существует обратное ***комплексное число*** z^{-1}, т.е. такое, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

Легко видеть, что для ***комплексного числа*** $z = x + iy$ обратным является $(x - iy) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

Действительно,

$$(x + iy)\cdot(x - iy)\frac{1}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)\frac{1}{x^2 + y^2} = 1.$$

Возведение в целую степень. Произведение n равных ***комплексных чисел*** z называется n-ой степенью ***комплексного числа*** z и **обозначается** z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{ раз}}.$$

Обратная операция – извлечение корня – определяется следующим образом: ***комплексное число*** w называется корнем n-ой степени из ***комплексного числа*** z, если $w^n = z$.

Обозначение $w = \sqrt[n]{z}$ (причем для $n = 2$ пишут просто $\sqrt{z}$).

Понятие неравенства для ***комплексных чисел*** существует лишь в смысле отрицания равенства.

Так, запись $z_1 \neq z_2$ означает, что ***комплексное число*** z_1 не равно ***комплексному числу*** z_2.

Понятий же «меньше» и «больше» для ***комплексных чисел*** не существует.

1.4. Геометрическая интерпретация

Так как ***комплексное число*** $z = x + iy$ мы можем отождествлять с упорядоченной парой $(x; y)$ вещественного числа, то, считая ру $(x; y)$ декартовыми координатами точки плоскости Oxy, можно отождествлять ***комплексное число*** с точкой этой плоскости.

Легко видеть, что и обратно, каждой точке плоскости Oxy с координатами $(x; y)$ будет, таким образом, поставлено в соответствие вполне определенное ***комплексное число*** $z = x + iy$, так что это соответствие между множеством всех ***комплексных чисел*** и всех точек плоскости *взаимно однозначное*.

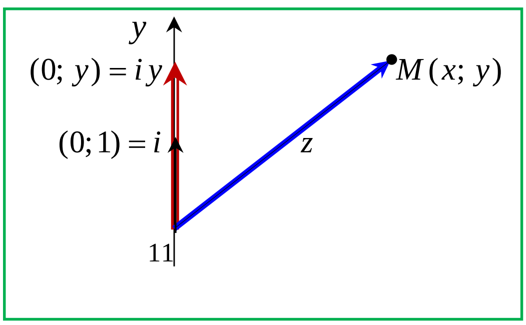
Далее, каждой точке $(x; y)$ соответствует вполне определенный вектор – радиус-вектор этой точки, а каждому радиус-вектору, лежащему в плоскости, соответствует вполне определенная точка – его конец. Поэтому мы будем в дальнейшем представлять ***комплексные числа*** в виде радиус-векторов на плоскости.

Будем употреблять как синонимы понятия

- «***комплексное число*** $x + iy$»,
- «точка $x + iy$» и
- «вектор $x + iy$».

Множество ***комплексных чисел*** обозначается символом **C**, подобно тому, как множество вещественных чисел обозначается символом **R**.

Условимся при этом, что началу координат соответствует число 0 (то есть $(0; 0) = 0$). Вектору длины 1 и, имеющему направление положительной оси Ox, ставится в соответствие вещественное число 1 (то есть $(1; 0) = 1$). Вектору длины 1, направление которого совпадает с положительным направлением оси Oy, сопоставим символ i (то есть $(0; 1) = i$).



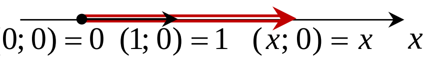


Рис. 4.1

Условимся также, что каждому вектору Ox на вещественной оси, т.е. ***комплексному числу*** $(x; 0)$, соответствует вещественное число x $(x; 0) = x$ (рис. 4.1).

При этом множество всех вещественных чисел изобразится осью абсцисс, которая поэтому называется вещественной осью, а множество всех ***мнимых чисел*** изобразится множеством точек, не лежащих на оси абсцисс, в частности, множество всех ***чисто мнимых*** чисел изобразится осью ординат, которая называется ***мнимой*** осью.

Плоскость Oxy, точки которой изображают ***комплексные числа*** $z = x + iy$, называют ***комплексной плоскостью***.

Сопряженные ***комплексные числа*** z и $\overline{z}$ изображаются точками ***комплексной плоскости***, симметричными относительно вещественной оси (см.рис. 4.2).

Противоположные ***комплексные числа*** z и $(-z)$ изображаются точками ***комплексной плоскости***, симметричными относительно начала координат (см. рис. 4.2).

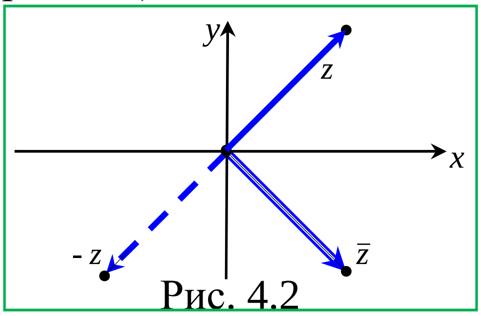
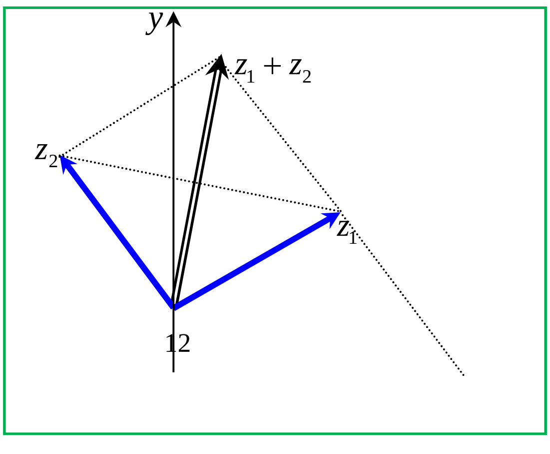


Рис. 4.2

Отмеченное выше соответствие между ***комплексными числами*** и векторами на плоскости придает естественный геометрический смысл операциям сложения и вычитания ***комплексных чисел*** (см. рис. 4.3, где сумма и разность ***комплексных чисел*** z_1 и z_2 изображаются соответственно векторами, равными направленным диагоналям параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2).



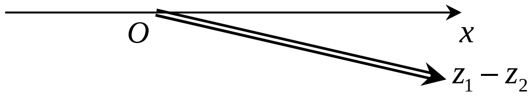


Рис. 4.3

1.5. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

В дальнейшем, наряду с представлением ***комплексных чисел*** в декартовых координатах, полезно иметь их представление в полярных координатах.

Для этого, как обычно, совмещаем полярную ось с положительной полуосью x, а полюс – с началом координат.

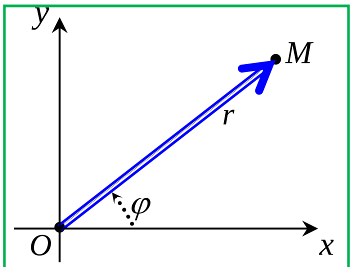


Рис. 4.4

Тогда если обозначить через r полярный радиус (длина вектора **OM**) и через φ полярный угол (угол между вектором **OM** и осью Ox) точки z (см. рис. 4.4), то, переходя в алгебраической форме записи ***комплексного числа*** $z = x + iy$ к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

получим тригонометрическую форму записи ***комплексного числа***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ z \neq 0 \qquad (5.1)$$

Полярный радиус r (или длина вектора $x + iy$) называется модулем ***комплексного числа*** $z = x + iy$.

Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением вещественной оси и вектором z (полярный угол) называется аргументом ***комплексного числа*** z.

Обозначение$r = |z|, \varphi = \mathrm{Arg}\, z$.

В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ аргумент ***комплексного числа*** определен с точностью до величины, кратной 2π, и символом Arg$z$

Arg z обозначают множество углов вида $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Если желают, чтобы ***комплексное число*** однозначно определяло некоторый угол $\varphi \in \mathrm{Arg}z$, то договариваются заранее о диапазоне, в котором его выбирают. Чаще всего это бывает

- полуинтервал $0 \le \varphi < 2\pi$ или
- полуинтервал $-\pi < \varphi \le \pi$.

Если такой выбор сделан, то говорят, что выбрано *главное значение* аргумента, которое обычно обозначают символом $\arg z$.

Итак, модуль ***комплексного числа*** определяется однозначно:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \ge 0. \quad (5.2)$$

Аргумент ***комплексного числа*** $z \ne 0$ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}, \quad (5.3)$$

где $\arg z$ – *главное значение* аргумента, задаваемое следующими условиями

$$-\pi < \arg z \le \pi \ (\text{или } 0 \le \arg z < 2\pi) \quad (5.4)$$

$$\text{и } \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x < 0,\ y \ge 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & \text{если } x = 0,\ y > 0; \\ -\pi/2, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Положительным направлением отсчета аргумента ***комплексного числа*** считается направление от положительной полуоси вещественной оси к положительному направлению ***мнимой*** оси, т.е. против часовой стрелки для правой системы координат. Ясно, что

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \sin\varphi = \frac{y}{|z|}. \quad (5.6)$$

Как уже отмечалось, для определения аргумента можно пользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \text{ при } x \ne 0.$$

Однако, эта формула задает φ лишь с точностью до кратного π (т.е. полуоборота), а не до кратного 2π. Это заставляет дополнительно выбирать из двух значений φ в противоположных четвертях одно, по знаку $\cos\varphi$ (или $\sin\varphi$).

Аргумент ***комплексного числа*** $z = 0$ вообще не определён, а модуль этого числа равен *нулю*.

Два отличных от *нуля* ***комплексных числа*** z_1 и z_2 равны между собой ***в том и только в том случае***, когда их модули равны, а аргументы либо равны, либо отличаются на слагаемое, кратное 2π

$$|z_1| = |z_2|,\ \ \mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{Arg}\, z_2 + 2n\pi, \qquad (5.7)$$

где n – целое число.

Пример 5.1. Изобразить на ***комплексной плоскости*** числа:

$$1)\ z_1 = -8,\ 2)\ z_2 = 2\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right).$$

Записать число z_1 в тригонометрической форме, а число z_2 – в алгебраической форме.

▲ Для числа z_1 имеем $x_1 = \mathrm{Re}\, z_1 = -8, y_1 = \mathrm{Im}\, z_1 = 0$.

Откладывая по оси Ox $x_1 = -8$, а по оси Oy $y_1 = 0$, получаем точку ***комплексной плоскости***, соответствующую числу z_1. Модуль этого числа находим по формуле (5.2) $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$.

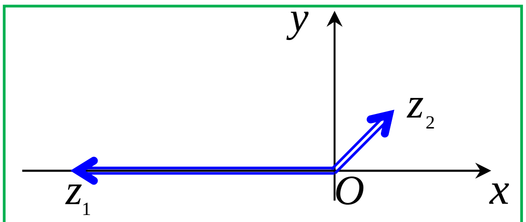


Рис. 5.1

Аргумент определяем из равенства $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y_1}{x_1} = \frac{0}{-8} = 0$.

Так как число z_1 находится в левой полуплоскости $(x_1 < 0, y_1 = 0)$, его аргумент $\varphi_1 = \pi$ (см. также формулы (5.5)).

Тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид (см. формулу (5.1))

$$z_1 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Согласно (5.1), модуль числа z_2 равен $r_2 = |z_2| = 2$, а аргумент

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \pi/4 .$$

Для его изображения на ***комплексной плоскости*** проводим луч под углом $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ к полярной оси (оси Ox) и откладываем на нём отрезок длиной r_2 (см. рис. 5.1). Полученная точка соответствует ***комплексному числу*** z_2. Его вещественная часть

$$\operatorname{Re} z_2 = x_2 = r_2 \cos\varphi_2 = 2\cos(\pi/4) = \sqrt{2} ,$$

а ***мнимая*** $\operatorname{Im} z_2 = y_2 = r_2 \sin\varphi_2 = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}=.$

Таким образом, алгебраическая форма числа z_2 имеет вид

$$z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} .$$ ▼

Пример 5.2. Найти модуль и аргумент ***комплексного числа***

$$z =- \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

▲ Имеем$x =- \sin\frac{\pi}{8} < 0, y =- \cos\frac{\pi}{8} < 0.$

Главным значением аргумента, согласно (5.5) будет

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi/8)) = -\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/2 - \pi/8)) =$$
$$= -\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3\pi/8)) = -\pi + 3\pi/8 = -5\pi/8.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arg} z = -5\pi/8 + 2k\pi,\ k \in Z,\ |z| = \sqrt{\sin^2(\pi/8) + \cos^2(\pi/8)} = 1.$$ ▼

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Тригонометрическая форма записи ***комплексных чисел*** удобна при выполнении операции умножения ***комплексных чисел***. Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \text{ то}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (5.8)$$

▲ В самом деле

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 ((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$ ▼

Таким образом, при умножении ***комплексных чисел***
❖ их модули ***перемножаются***,

❖ а аргументы **складываются**.

В буквенной записи

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 . \qquad (5.9)$$

Отсюда следует, что при умножении ***комплексного числа*** z_1 на ***комплексное число*** z_2 вектор z_1

- растягивается (сжимается) в $|z_2|$ раз и, кроме того,
- поворачивается (против часовой стрелки) на угол $\arg z_2$.

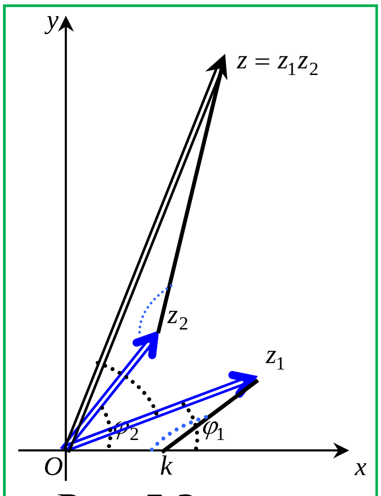


Рис. 5.2.

В частности, умножение ***комплексного числа*** z на i сводится к повороту (без растяжения) вектора z на прямой угол против часовой стрелки (см. рис. 5.2).

$$\left(\varphi_1 = (Ox,\hat{\ } z_1);\ \varphi_2 = (Ox,\hat{\ } z_2);\ \text{треугольники}\ Okz_1\ \text{и}\ Ozz_2\ \text{подобны}\right)$$

Замечание. Введенное действие умножения существенно отличается и от скалярного и от векторного умножения векторов.

Правила умножения распространяются на произведение любого числа сомножителей

$$|z_1 z_2 \cdots z_k| = |z_1||z_2|\cdots|z_k|,$$

$$\arg(z_1 z_2 \cdots z_k) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_k .$$

Эти формулы доказываются по индукции.

Положим в формуле

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot \cdots \cdot r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_k \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k)),$$

что все сомножители равны, так что

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k = r, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k = \varphi.$$

Получим $$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Из последнего соотношения при $r = 1$ получается знаменитая ***формула Муавра***

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi. \qquad (5.10)$$

Мы вывели эту формулу в предположении, что k − целое положительное число. Покажем, что она остается верной и при $k = 0$ и при целом отрицательном k, считая для ***комплексного числа***, также как для вещественного,

$$z^0 = 1 \text{ и } z^{-m} = \frac{1}{z^m}.$$

▲ При $k = 0$ формула превращается в верное равенство:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

Положим теперь $k = -m$, считая m целым положительным числом.

Тогда

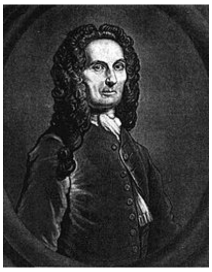
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i\sin m\varphi} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = \cos\left((-m)\varphi\right) + i\sin\left((-m)\varphi\right) =$$

$$= \cos k\varphi + i\sin k\varphi.$$

Таким образом, формула Муавра верна для любых целых значений k. ▼

	*Абрахам де Муавр* (фр. и англ. Abraham de Moivre; 26 мая 1667, Витри-ле-Франсуа − 27 ноября 1754, Лондон) − английский математик французского происхождения. Член Лондонского королевского общества (1697), Парижской (1754) и Берлинской (1735) академий наук.

Частное от деления ***комплексного числа*** $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на ***комплексное число*** $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ определяется равенством

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big). \qquad (5.11)$$

Таким образом, при делении ***комплексных чисел***

- модуль числителя делится на модуль знаменателя и
- из аргумента числителя вычитается аргумент знаменателя

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

Напомним, что каждое ***комплексное число*** w такое, что $w^n = z$, называется корнем n-ой степени из ***комплексного числа*** z и **обозначается** $w = \sqrt[n]{z}$.

Ясно, что если $z = 0$, то единственным значением $\sqrt[n]{z}$ является число 0, поэтому сосредоточим внимание на случае $z \neq 0$.

Запишем z в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Будем искать w тоже в тригонометрической записи

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

▲ Равенство $w^n = z$ запишется в виде

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Напомним, что из равенства ***комплексных чисел*** вытекает равенство их модулей, а аргументы либо совпадают, либо различаются на слагаемое, кратное 2π. Приравнивая модули и аргументы, получим, что последнее равенство равносильно равенствам

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Данное число r положительно (ибо $z \neq 0$), и искомое число ρ должно быть тоже положительным. Известно, что для любого положительного числа существует положительное единственное значение корня n-ой степени, называемое арифметическим значением корня.

Аргумент же θ находится просто делением. Итак,

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbf{Z}. \ ▼ \tag{5.13}$$

Первое из равенств (5.13) показывает, что модули всех корней n-ой степени из числа z одинаковы.

Второе – что их аргументы различаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда вытекает, что точки на ***комплексной плоскости***, соответствующие различным значениям корня n-ой степени из ***комплексного числа*** $z \neq 0$, расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке $w = 0$ (рис. 5.3). Придавая в формуле (5.13) числу k значения $0, 1, 2, \cdots, n-1$, получим n различных ***комплексных чисел***

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), 0 \le k \le n-1, \tag{5.14}$$

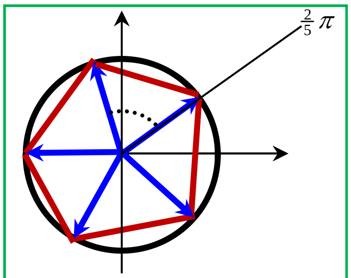


Рис. 5.3 $(n = 5)$

Пример 5.3. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2i}$.

▲ Найдем модуль и аргумент данного ***комплексного числа***

$$z = -2 + 2i:$$

$$r = |-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$x = \mathrm{Re}(-2+2i) = -2; \quad y = \mathrm{Im}(-2+2i) = 2.$$

Так как $x < 0, y > 0$, число $-2+2i$ находится во 2-ой четверти ***комплексной плоскости***.

$$\cos\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \varphi = \arg(-2+2i) = \frac{3\pi}{4}.$$

По формуле (5.14)

$$w_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), 0 \le k \le 2,$$

откуда

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i;$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{2} + i\sin\frac{11\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx$$

$$\approx -1.366 + 0.116i;$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{2} + i\sin\frac{19\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right) \approx$$

$$\approx 0.116 - 1.366i.$$

w_2

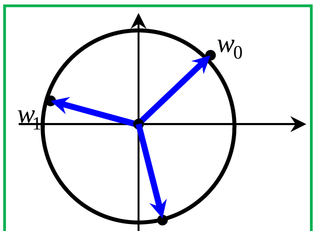


Рис. 5.4 ▼

1.6. *Показательная форма записи комплексного числа*

Формулы Эйлера

Установим две формулы, которые имеют широкое применение. Используя разложение функции e^x по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

если вещественную переменную x заменить комплексной переменной z, то получим разложение по степеням z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + o(z^n). \qquad (6.1)$$

Аналогично определяются тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексной переменной z:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{(2n-1)!} + o(z^{2n}), \qquad (6.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n+1}). \qquad (6.3)$$

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ существует простая связь.

Подставим в (6.1) iz вместо z и сгруппируем все слагаемые, содержащие множитель i и не содержащие этот множитель:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} \dots =$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right).$$

Сравнивая полученный результат с формулами (6.2) и (6.3), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \qquad (6.4)$$

Далее, подставляя в (6.1) $-iz$ вместо z, имеем

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \qquad (6.5)$$

Формулы (6.4) и (6.5) называются формулами Эйлера. Они устанавливают связь между показательной и тригонометрическими функциями комплексной переменной z.

Если почленно сложить и вычесть равенства (6.4) и (6.5), то получим другую запись формул Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}. \qquad (6.6)$$

Таким образом, функции $e^z, \sin z, \cos z$ связаны соотношениями (6.4) – (6.6). При $z = x$ (x – вещественная переменная) эти функции комплексной переменной совпадают соответственно с ми $e^x, \sin x, \cos x$ вещественной переменной.

Пользуясь формулой Эйлера (для $z = \varphi$),

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можно тригонометрическую форму ***комплексного числа*** записать иначе

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (6.7)$$

Эта форма записи ***комплексного числа*** называется показательной формой записи ***комплексного числа***.

Показательная форма записи ***комплексного числа***, как и тригонометрическая удобна для выполнения операции умножения и деления ***комплексных чисел***. Если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (6.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \text{ (при } r_2 \neq 0). \qquad (6.9)$$

Корни n-ой степени из ***комплексного числа*** даются формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \; 0 \le k \le n-1. \qquad (6.10)$$

Для ***комплексной*** степени ***числа*** e, e^z сохраняются свойства степени

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Из последних равенств при $k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1, \; e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z,$$

т.е. степень e^z не меняется от добавления к показателю целого кратного $2\pi i$.

Пример 6.1. Найти все значения $\sqrt[3]{i}$.

▲ Запишем ***комплексное число*** $z = i$ в показательной форме

$$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

В соответствии с формулами (6.10) **получаем**

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \; 0 \le k \le 2.$$

Отсюда