Оглавление

Дорогие старшеклассники!

Пособие, которое вы держите в руках, будет полезно вам на протяжении двух лет (начиная с 10-го класса). С его помощью вы систематизируете изученный материал, ликвидируете пробелы в знаниях основных разделов курса, успешно справитесь с текущими контрольными работами и домашними заданиями, а также качественно подготовитесь к ЕГЭ по математике и получите высокий балл на экзамене.

Независимо от того, какой уровень ЕГЭ по математике выберете вы — базовый или профильный, эта книга для вас: рассчитывать на высокий балл, не научившись выполнять задания базового уровня, не приходится, а когда вы освоите базовый уровень, вам будет легче справиться с заданиями профильного уровня.

Как работать с книгой

Каждый из вас самостоятельно определяет последовательность работы с нашим пособием. Однако мы рекомендуем придерживаться предложенного в книге порядка.

Для вашего удобства в начале каждого параграфа в доступной форме изложены краткие теоретические сведения, даны примеры выполнения заданий, рекомендации по решению типовых задач. Каждый параграф содержит тренировочные и контрольные задания, составленные в соответствии с принципами парного подобия и повышения уровня сложности. Принцип парного подобия (первое задание похоже на второе, третье — на четвёртое и т. д.) позволяет эффективно организовать усвоение и закрепление материала.

К каждому четвёртому из тренировочных заданий (его номер взят в рамку) даётся подробный образец выполнения с необходимыми пояснениями. Ко всем заданиям в книге даны ответы, которые помогут вам проверить правильность решений.

Если какое-то задание вы не смогли выполнить или получили другой ответ при решении, обратитесь к учебнику. Ещё раз прочитайте условие задачи, приведённое в данном пособии, и разберите решение этой или подобной задачи. В случае необходимости обратитесь за помощью к учителю.

Необязательно выполнять все задания. Определите сами количество заданий, которые вам необходимо решить для успешного освоения темы и закрепления материала. В конце каждого параграфа дано 4 варианта тематических контрольных заданий. Обратите внимание на то, что первый вариант похож на второй, а третий — на четвёртый. Постарайтесь выполнить хотя бы два непохожих варианта каждого параграфа. Чем меньше ошибок вы допустите, тем больше у вас шансов сдать ЕГЭ на высокий балл.

Уважаемые учителя!

Вам хорошо известно, что самая эффективная методика подготовки по математике заключается в систематической и планомерной работе с учащимися. Наше пособие поможет вам в организации такой работы на протяжении двух лет обучения (начиная с 10-го класса) и позволит теоретически, практически и психологически подготовить выпускников к сдаче ЕГЭ по математике **базового** уровня.

Тренировочные и контрольные задания в формате ЕГЭ, предложенные в пособии, могут быть использованы как на уроке, так и дома.

Краткие теоретические сведения, приведённые в начале каждого параграфа (они отмечены жирной вертикальной чертой слева от текста), включают примеры выполнения типовых заданий и рекомендации по их выполнению.

Обращаем ваше внимание на то, что задания, к которым даны образцы выполнения (их номер взят в рамку), можно использовать для ознакомления учащихся с различными приёмами и методами решения задач.

Контрольные задания по каждой теме (шесть заданий в четырёх вариантах) будут полезны для диагностики, самоконтроля и закрепления практических навыков решения.

Надеемся, что использование этого тематического тренинга поможет вам в организации процесса обучения математике и в подготовке учащихся к ЕГЭ.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты legionrus@legionrus.com.

§ 1. Значения арифметических выражений

Рассмотрим хорошо известные способы представления чисел в виде обыкновенной дроби, смешанного числа и десятичной дроби.

Напомним, что **обыкновенная дробь** — выражение, имеющее вид $\frac{a}{b}$, где $a, b \in Z$, $b \neq 0$.

Число a, расположенное выше дробной черты, — числитель дроби, а число b, расположенное ниже дробной черты, — знаменатель дроби:

$\frac{27}{6}$; $\frac{-13}{15}$; $\frac{8}{-14}$; $\frac{-55}{-35}$; $\frac{24}{1}$; $\frac{0}{5}$.

По правилу знаков при делении чисел и определению делимости получаем:

$\frac{-13}{15} = -\frac{13}{15}$; $\frac{8}{-14} = -\frac{8}{14}$; $\frac{-55}{-35} = \frac{55}{35}$; $\frac{24}{1} = 24$; $\frac{0}{5} = 0$.

Обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ называется **правильной**, если $a < b$: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{8}$.

Далее, если не оговорено другое, обыкновенную дробь будем называть просто дробью.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на некоторое число, отличное от нуля, то значение дроби не изменится.

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$, где $x \neq 0$.

Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, отличное от нуля, называют **сокращением дроби**:

$\frac{27}{6} = \frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{9}{2}$; $\frac{172}{129} = \frac{43 \cdot 4}{43 \cdot 3} = \frac{\cancel{43} \cdot 4}{\cancel{43} \cdot 3} = \frac{4}{3}$.

Пусть $\frac{a}{b}$ $(a, b \in N)$ — произвольная дробь. Разделим её числитель a на знаменатель b с остатком. Получим:

$\boldsymbol{a = b \cdot Q + r}$**, где** $\boldsymbol{Q,\ r \in N \cup \{0\},\ 0 \leqslant r < b}$.

Отсюда $\frac{a}{b} = Q + \frac{r}{b}$. Сумма целого числа Q и правильной дроби $\frac{r}{b}$ называется **смешанным числом** и обозначается $Q\frac{r}{b}$. Число Q называют целой частью дроби $\frac{a}{b}$, а правильная дробь $\frac{r}{b}$ — её дробной частью:

$\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$, так как $27 = 4 \cdot 6 + 3$; $\frac{52}{35} = 1\frac{17}{35}$, так как $52 = 1 \cdot 35 + 17$.

Для обращения смешанного числа в обыкновенную дробь надо знаменатель дробной части смешанного числа умножить на его целую часть. К этому произведению прибавить числитель дробной части. Полученная сумма будет числителем искомой дроби, а её знаменателем будет знаменатель дробной части смешанного числа.

$$3\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 3 + 4}{7} = \frac{25}{7}, \quad 2\frac{11}{13} = \frac{13 \cdot 2 + 11}{13} = \frac{37}{13}.$$

Известно, что всякое целое число записывают в виде конечной последовательности цифр десятичной системы счисления 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 со знаком «+» или «−» перед этой последовательностью (если нет необходимости, то знак «+» не пишут): 347; 2507; -95; -40265.

Вспоминая представление натуральных чисел в виде суммы разрядных единиц, получаем, что на самом деле каждая такая последовательность обозначает сумму **неотрицательных целых степеней числа** 10, расположенных в порядке убывания показателей степеней числа 10:

$$347 = 300 + 40 + 7 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0;$$

$$2507 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0;$$

$$-40265 = -(4 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0).$$

Рассматривая конечные или бесконечные последовательности цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 со знаком «+» или «−» перед этой последовательностью и **запятой**, расположенной между некоторыми двумя цифрами, получаем выражения, которые называются **десятичными** дробями (если нет необходимости, то знак «+» не пишут):

37,806; 401,57; −45,702 — конечные десятичные дроби;

3,575757 ... — бесконечная десятичная периодическая дробь, в которой пара цифр 57 бесконечно повторяется. Эту дробь сокращённо записывают в виде 3,(57) и читают: три целых 57 в периоде.

На самом деле каждая десятичная дробь обозначает **сумму целых степеней числа** 10, расположенных в порядке убывания показателей степеней числа числа 10:

$37{,}806 = 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$; $250{,}7 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}$;

$3{,}575757... = 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + ...$

Конечная последовательность цифр до запятой задаёт целое число, называемое целой частью десятичной дроби, а последовательность цифр после запятой задаёт число, называемое дробной частью десятичной дроби.

Целая часть дроби 37,806 равна 37, а дробная часть равна $8 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$.

Вспомним, что $10^n = 1\underbrace{00...0}$, а $10^{-n} = \dfrac{1}{1\underbrace{00...0}}$, где после 1 следует n нулей при любом $n \in N \cup \{0\}$.

Из определения десятичной дроби как суммы степеней 10 следует, что приписывание нулей перед первой ненулевой цифрой десятичной дроби и за последней её ненулевой цифрой (если она есть) не изменяет значения дроби. $-45{,}67 = -045{,}6700$.

При умножении десятичной дроби на число 10^n $(n \in N)$ запятая переносится на n знаков вправо, а при делении — влево: $5{,}87 \cdot 10^2 = 587$; $1{,}02 \cdot 10^4 = 10200$; $3{,}8 : 10^3 = 0{,}0038$; $102 : 10^2 = 1{,}02$.

Задача 1. Запишите в виде десятичной дроби выражение

$8 + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10$.

Решение. Запишем заданную сумму по убыванию степеней 10.

$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} =$

$= 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 2048,53.$

Ответ: $2048,53$.

Задача 2. Запишите обыкновенную дробь $\dfrac{307}{200}$ в виде десятичной.

Решение. $\dfrac{307}{200} = \dfrac{307 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \dfrac{1535}{1000} = 1,535.$

Ответ: $1,535$.

Задача 3. Запишите десятичную дробь 25,46 в виде обыкновенной.

Решение. $25{,}46 = 25 + \dfrac{46}{100} = \dfrac{100 \cdot 25 + 46}{100} = \dfrac{2546}{100} = \dfrac{1273}{50}$.

Ответ: $\dfrac{1273}{50}$.

Всякую обыкновенную дробь $\dfrac{a}{b}$ можно представить в виде десятичной (конечной или бесконечной периодической) по следующему алгоритму. Сначала делим a на b с остатком. Полученное частное (полное или неполное) является целой частью искомой десятичной дроби. Затем остаток (если он не равен нулю) умножаем на 10 и делим на b и так далее.

Например, представим дробь $\dfrac{133}{8}$ в виде десятичной дроби.

$$\begin{array}{l|l}
-\,133 & 8 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{8} & 16{,}625 \\
\;-\,53 & \\
\;\;\;\underline{48} & \\
\;\;-\,50 & \\
\;\;\;\;\underline{48} & \\
\;\;\;-\,20 & \\
\;\;\;\;\;\underline{16} & \\
\;\;\;\;-\,40 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{40} & \\
\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Напомним ещё один способ обращения обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь. Известно, что несократимая обыкновенная дробь $\dfrac{a}{b}$ обращается в конечную десятичную дробь только в том случае, когда в разложение знаменателя дроби b на простые множители входят только числа 2 и 5.

Покажем на примерах, как можно такие дроби представлять в виде конечных десятичных дробей.

1) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{75}{10 \cdot 10} = \dfrac{75}{100} = 0{,}75.$

2) $\dfrac{7}{20} = \dfrac{7}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{7 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{35}{10 \cdot 10} = \dfrac{35}{100} = 0{,}35.$

3) $\dfrac{6}{125} = \dfrac{6}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{48}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{48}{1000} = 0{,}048.$

Вспомним ещё, как выполняются действия умножения, деления, сложения и вычитания обыкновенных дробей.

Чтобы **перемножить** обыкновенные дроби, надо перемножить их числители и записать результат в числитель, затем перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5\cdot 10}{7\cdot 11}=\frac{50}{77};$$

$$3\frac{4}{7}\cdot 1\frac{2}{5}=\frac{25}{7}\cdot\frac{7}{5}=\frac{25\cdot 7}{7\cdot 5}=\frac{5\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 5}=\frac{5}{1}=5;$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Чтобы **разделить** одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на дробь, обратную второй дроби:

$$\frac{25}{7}:\frac{7}{5}=\frac{25}{7}\cdot\frac{5}{7}=\frac{25\cdot 5}{7\cdot 7}=\frac{125}{49};$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями складывают числители этих дробей и результат записывают в числитель, а в знаменатель записывают знаменатель этих дробей.

Сложить дроби с разными знаменателями можно двумя способами.

1. Приведением дробей к наименьшему общему знаменателю, равному наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей дробей. Для этого умножаем числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующие числа так, чтобы знаменатели у всех полученных дробей были одинаковыми. Затем складываем полученные числители и результат записываем в числитель, а знаменатель дроби оставляем равным знаменателю полученных дробей:

$$\frac{29}{8}+\frac{67}{12}=\frac{29\cdot 3}{8\cdot 3}+\frac{67\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{29\cdot 3+67\cdot 2}{24}=\frac{87+134}{24}=\frac{221}{24}.$$

2. Приведением дробей к общему знаменателю, равному произведению знаменателей. Числитель и знаменатель первой дроби умножаем на знаменатель второй дроби, а числитель и знаменатель второй дроби умножаем на знаменатель первой дроби. Получим дроби с одинаковыми знаменателями, которые складываем по указанному правилу:

$$\frac{29}{8}+\frac{67}{12}=\frac{29\cdot 12}{8\cdot 12}+\frac{67\cdot 8}{12\cdot 8}=\frac{29\cdot 12+67\cdot 8}{8\cdot 12}=\frac{348+536}{96}=$$

$$= \frac{884}{96} = \frac{221}{24};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Чтобы **вычесть** из одной обыкновенной дроби другую, надо к первой дроби прибавить дробь, противоположную второй дроби:

$$\frac{29}{8} - \frac{67}{12} = \frac{29}{8} + \frac{(-67)}{12} = \frac{29 \cdot 12 + (-67) \cdot 8}{8 \cdot 12} = \frac{348 + (-536)}{96} =$$

$$= \frac{-188}{96} = -\frac{47}{24}.$$

Впрочем, разность дробей $\frac{29}{8} - \frac{67}{12}$ можно было найти приведением к наименьшему общему знаменателю, равному 24:

$$\frac{29}{8}^{\diagdown 3} - \frac{67}{12}^{\diagdown 2} = \frac{29 \cdot 3 - 67 \cdot 2}{24} = \frac{87 - 134}{24} = -\frac{47}{24}.$$

Вспомним также, что выполнение действий над десятичными дробями сводится к выполнению действий над некоторыми соответствующими им целыми числами.

Для нахождения суммы $7{,}23 + 15{,}8$ запишем число 15,8 под числом 7,23 (сотни под сотнями, десятки под десятками, единицы под единицами, десятые доли под десятыми, сотые доли под сотыми, запятую под запятой) следующим образом:

$$\begin{array}{r@{,}l} 7 & 23 \\ 15 & 8 \end{array}$$

Далее пользуемся известным алгоритмом нахождения суммы целых чисел в столбик, не обращая внимания на запятую. Получим: $7{,}23 + 15{,}8 = 23{,}03$.

Для нахождения произведения $7{,}23 \cdot 15{,}8$ умножим целое число 723 на целое число 158 в столбик по известному алгоритму. В полученном целом числе 114 234 нужно поставить запятую так, чтобы после неё осталось 3 цифры (у исходных множителей после запятой в сумме стоят 3 цифры). Получим: $7{,}23 \cdot 15{,}8 = 114{,}234$.

Так как частное не изменяется при умножении делимого и делителя на одно и то же число, то деление одной десятичной дроби на другую сводится к делению десятичной дроби на целое число:

$$40{,}592 : 17{,}2 = \frac{40{,}592}{17{,}2} = \frac{40{,}592 \cdot 10}{17{,}2 \cdot 10} = \frac{405{,}92}{172}.$$

Далее деление десятичной дроби на целое число осуществляется известным способом («уголком»):

$$
\begin{array}{r|l}
-\,405{,}92 & 172 \\
\cline{2-2}
\underline{344} & 2{,}36 \\
-\,619 & \\
\underline{516} & \\
-\,1032 & \\
\underline{1032} & \\
0 &
\end{array}
$$

Вспомним также, что для обращения десятичной дроби в обыкновенную (это нередко приходится делать) представляем сначала десятичную дробь в виде смешанного числа, а затем смешанное число представляем в виде обыкновенной дроби:

$$4{,}12 = 4\frac{12}{100} = \frac{4 \cdot 100 + 12}{100} = \frac{412}{100} = \frac{103}{25}.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$[1] Найдите значение выражения $1\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$.

2. Найдите значение выражения $1\frac{3}{5} - \frac{3}{4}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{5}{7} + 1\frac{3}{5} - \frac{11}{35}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{3}{7} - 2\frac{4}{5} + \frac{13}{35}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Найдите значение выражения $7\frac{3}{4} : \frac{31}{2}$.

6. Найдите значение выражения $5\frac{1}{2} : \frac{11}{8}$.

7. Найдите значение выражения $5\frac{1}{4} : 7$.

8. Найдите значение выражения $6 : \frac{15}{14}$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Найдите значение выражения $\left(-5\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) \cdot 16$.

10. Найдите значение выражения $\left(3\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) \cdot 16$.

[1] В рамку взяты номера заданий, к которым приведены образцы решений.