Оглавление

Введение 9
История • Цели издания • Литература • Структура книги • Обратная связь

Глава 1 Свободное падение тел 13
Модель • Горизонтальное движение • Вертикальное движение • Общий случай

Глава 2 Вращение жидкости 21
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение и анализ уравнения • Приложения в астрономии

Глава 3 Закон Вебера—Фехнера 27
Модель • Дифференциальное уравнение • Децибелы

Глава 4 Муравей на ленте 31
Задача • Дифференциальное уравнение • Решение задачи • Равноускоренное удлинение

Глава 5 Водяные часы 35
Модель • Круговой цилиндр • Равномерная шкала

Глава 6 Брахистохрона 41
Задача • Принцип Ферма • Дифференциальное уравнение • Циклоида

Глава 7 Элементарные химические реакции 47
Закон действующих масс • Реакции первого порядка • Реакции второго порядка

Глава 8 Реактивное движение 53
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение • Ракета Фау-2

Глава 9 Квадратные колеса 57
Задача • Дифференциальное уравнение • Квадратное колесо • Зубчатая дорога • Приложения

Глава 10 Задача о четырех жуках . . . 63
Кривые погони • Задача • Дифференциальное уравнение • Решение и его анализ • Общий случай

Глава 11 Охота на подводную лодку . . . 69
Задача • План решения • Дифференциальное уравнение

Глава 12 Трактриса . . . 73
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения

Глава 13 Круговая трактриса . . . 77
Модель • Дифференциальное уравнение • Упрощение уравнения • Критический случай • Подкритический случай • Надкритический случай

Глава 14 Задача о пловце . . . 83
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения

Глава 15 Кривая погони . . . 87
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения

Глава 16 Барометрическая формула . . . 93
Задача • Дифференциальное уравнение • Изотермический случай

Глава 17 Радиоуглеродный метод . . . 99
Радиоактивный распад • Дифференциальное уравнение • Период полураспада • Радиоуглеродный метод

Глава 18 Температурные волны . . . 103
Закон Ньютона—Рихмана • Переменная температура среды • Решение уравнения • Анализ решения

Глава 19 Задачи на растворы . . . 109
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение • Анализ решения • Пример

Глава 20 Модель естественного роста . . . 113
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение и анализ • Пример

Глава 21 Модель Ферхюльста . . . 117
Модель • Решение уравнения

Глава 22 Модель со сбором урожая . . . 121
Модель • Решение уравнения • Бифуркационная диаграмма

Глава 23 Кошки-мышки . . . 127
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения • Анализ решения

Глава 24 Общая трактриса . . . 131
Модель • Уравнение Риккати • Метод Эйлера

Глава 25 Игра в прятки . . . 137
Модель • Дифференциальное уравнение • Частный случай • Общий случай

Глава 26 Табулирование функций . . . 143
Математические таблицы • Задача • Методы Рунге—Кутты • Численный эксперимент

Глава 27 Свободное падение тел в жидкости . . . 149
Силы сопротивления • Модель • Решение уравнения • Анализ решения

Глава 28 Свободное падение тел в воздухе . . . 153
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения

Глава 29 Ортогональные траектории . . . 157
Ортогональные семейства кривых • Дифференциальное уравнение семейства кривых • Ортогональные кривые • Пример

Глава 30 Эллиптическая система координат . . . 163
Конфокальные эллипсы • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения

Глава 31 Биполярные координаты . . . 169
Биполярные системы координат • Окружности Аполлония • Ортогональные траектории

Глава 32 Изогональные траектории . . . 173
Изогональные траектории • Модельная задача навигации • Дифференциальное уравнение • Локсодромы

Глава 33 Каустики . . . 177
Каустики и огибающие • Модель • Дифференциальное уравнение

Глава 34 Математическая вышивка . . . 181
Задача • Вышивка на круге

Глава 35 Шуховская башня . . . 185
Башни Шухова • Задача • Огибающая

Глава 36 Криволинейные зеркала . . . 189
Задача • Параллельные лучи • Уравнения в полных дифференциалах • Расходящиеся лучи • Сходящиеся лучи • Приложения

Глава 37 Линзы . . . 197
Преломление света • Задача • Решение уравнения и его анализ • Линзы

Глава 38 Переходная кривая . . . 201
Кривизна плоских кривых • Кинематический смысл кривизны • Переходная кривая • Дифференциальное уравнение

Глава 39 Клотоида . . . 205
Задача • Система уравнений • Приближение степенными рядами

Глава 40 Цепная линия . . . 209
Задача • Построение дифференциального уравнения • Решение уравнения

Глава 41 Кривая скакалки . . . 213
Задача • Построение уравнения • Понижение порядка • Эллиптический интеграл

Глава 42 Вторая космическая скорость . . . 219
Гравитационные задачи • Задача • Дифференциальное уравнение • Решение • Гравитационный радиус

Глава 43 Из пушки на луну . . . 225
Задача • Построение уравнения • Решение уравнения • Из пушки на Луну

Глава 44 Законы Кеплера . . . 229
Задача одного тела • Система уравнений • Второй закон Кеплера • Первый закон Кеплера • Третий закон Кеплера

Глава 45 Задача двух тел . . . 235
Постановка задачи • Движение центра масс • Движение вектора смещения

Глава 46 Задача трех тел . . . 239
Постановка задачи • Частные случаи • Дифференциальное уравнение • Численное решение

Глава 47 Гравитационный лифт . . . 243
Постановка задачи • Дифференциальное уравнение • Решение уравнения

Глава 48 **Пружинный маятник** 247
Модель • Дифференциальное уравнение • Решение

Глава 49 **Банджи-джампинг** 251
Задача • Дифференциальное уравнение • Решение • Анализ решения

Глава 50 **Метроном** 255
Математический маятник • Дифференциальное уравнение • Малые колебания • Модель метронома

Глава 51 **Нелинейный маятник** 259
Проблемы линейной модели • Аналитическое решение • Период колебаний • Фазовый портрет

Глава 52 **Таутохронная кривая** 265
Задача • Дифференциальное уравнение • Решение и его анализ • Изохронный маятник

Глава 53 **Затухающие колебания** 269
Модель • Подкритический случай • Надкритический случай • Критический случай • Приложения

Глава 54 **Вынужденные колебания** 275
Задача • Решение • Математический резонанс • Примеры резонансных явлений

Глава 55 **Резонанс в электрических цепях** 281
Последовательная RLC-цепь • Решение • Колебательный контур • Детекторный радиоприемник

Глава 56 **Осциллятор Ван дер Поля** 287
Туннельный диод • Модель • Фазовый портрет • Автоколебания

Глава 57 **Модели Осипова—Ланчестера** 293
Модель боевых действий • Модель открытого боя • Модель закрытого боя • Модель смешанного боя

Глава 58 **Двумерная модель Мальтуса** 299
Модель • Общее решение • Устойчивость • Фазовый портрет

Глава 59 **Модель Лотки–Вольтерры** 305
Модель • Фазовый портрет • Экспериментальные подтверждения

Глава 60 **Принцип Гаузе** 309
Модель • Приближенное решение • Метод линеаризации • Фазовый портрет

Глава 61 Моделирование эпидемий 315
Модель SIR • Приближенное решение • Фазовый портрет • Анализ

Глава 62 Системы реакций первого порядка 321
Модельная реакция • Преобразование Лапласа • Решение системы уравнений

Глава 63 Цепная полимеризация 327
Модель • Система уравнений • Решение

Глава 64 Брюсселятор 333
Колебания в химических системах • Модель • Фазовый портрет • Предельный цикл

Глава 65 Связанные маятники 339
Степени свободы • Модель • Решение • Вынужденные колебания • Сейсмоустойчивость зданий

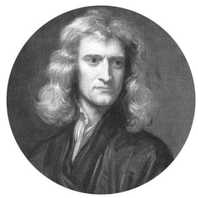
Глава 66 Геодезические линии 345
Проблема • Формальная постановка задачи • Уравнение Эйлера—Лагранжа • Геодезические на цилиндре

Глава 67 Задача Дидоны 353
Проблема • Множители Лагранжа • Тождество Бельтрами • Решение задачи Дидоны

Введение

История • Понятие дифференциального уравнения возникло практически одновременно с созданием во второй половине XVII века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчисления, как естественное обобщение обычных алгебраических уравнений. В дифференциальном уравнении неизвестной является *функция*, а само уравнение должно содержать в себе хотя бы одну *производную* искомой функции.

Первоначально дифференциальные уравнения появились в физических задачах. Например, *второй закон Ньютона*, связывающий ускорение тела (т.е. производную скорости тела или вторую производную его положения) с действующей на это тело силой, автоматически превращается в дифференциальное уравнение, если рассматриваемая сила зависит либо от скорости тела, либо от его местоположения.



Исаак Ньютон

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Другим важным источником дифференциальных уравнений на первых порах оказались геометрические задачи, в которых по известному свойству касательных к некоторой кривой требовалось найти кривую, удовлетворяющую заданному свойству. Классической задачей этого типа является *задача о трактрисе*, в которой нужно найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между точкой касания и осью координат, имел бы постоянную длину.

Цели издания • На протяжении своей уже более чем трехсотлетней истории дифференциальные уравнения исправно служат для решения разнообразных практических задач и являются стандартным средством построения и анализа непрерывных математических моделей[1]. Область их применения в настоящее время является чрезвычайно широкой и включает в

[1] Близким аналогом в дискретном моделировании служат *клеточные автоматы*.

себя практически все разделы современной науки — от физики, математики и даже информатики до химии, биологии и социологии.

Целью настоящего издания было собрать под одной обложкой примеры разнообразных практических задач из различных прикладных областей, решение которых связано тем или иным образом с построением, решением и анализом какого-нибудь обыкновенного[2] дифференциального уравнения или системы таких уравнений.

[2] То есть уравнения относительно функции, зависящей ровно от одной переменной.

Литература ● Первую группу изданий, среди которых автором выполнялся поиск подходящих задач и моделей, образуют классические учебники по теории дифференциальных уравнений, в которых изложение теоретического материала сопровождается относительно многочисленными примерами решенения прикладных задач[3].

[3] Первым в этом списке идет труд, написанный примерно 150 лет назад известным английским математиком и логиком Джорджем Булем. Очень познавательно сравнить структуру изложения материала в этом учебнике с современными учебниками по дифференциальным уравнениям — они чрезвычайно близки друг к другу.


Джордж Буль

1. Boole G. *A Treatise on Differential Equations*, 1859.
2. Сикорский Ю. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения: с приложениями их к некоторым техническим задачам*, 1940.
3. Tenenbaum M., Pollard H. *Ordinary differential equations: An elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences*, 1963.
4. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, 1965.
5. Simmons G. *Differential Equations: With Applications and Historical Notes*, 1991.
6. Zill D. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 2013.
7. Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. *Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple*, 2016.
8. Smith C., Campbell S. *A First Course in Differential Equations, Modeling, and Simulation*, 2016.

Во второй (весьма малочисленной) группе находятся издания, посвященные исключительно применению дифференциальных уравнений к построению и анализу математических моделей, возникающих в различных областях современного естествознания. В этих работах уже рассмотрение моделей сопровождается минимальным описанием теории, достаточной для понимания работы того или иного метода решения дифференциальных уравнений.

9. Пономарев К. К. *Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач*, 1962.
10. Burghes D., Borrie M. *Modelling with differential equations*, 1981.
11. Амелькин В. В. *Дифференциальные уравнения в приложениях*, 1987.

Наконец, последняя группа, являющаяся самой многочисленной (список ниже далеко не полон), содержит учебники, монографии и научные статьи, посвященные моделированию в каких-то уже конкретных прикладных областях — механике, оптике, биологии, химии и т.д. Большинство из этих моделей, к сожалению, не имеют практически никаких шансов попасть в какой-нибудь учебник по теории дифференциальных уравнений, например, по той простой причине, что получаемые из них уравнения решаются долго и сложно либо вообще не решаются аналитически[4].

12. Nahin P. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, 2007.
13. Мюррей Дж. *Математическая биология*. В 2 томах, 2009-2011.
14. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*, 2010.
15. Banerjee S. *Mathematical Modeling: Models, Analysis and Applications*, 2014.
16. Козко А.И., Чирский В. Г. *Дифференциальные уравнения и математические модели химических задач*, 2019.

Структура книги • Структура настоящего издания проста и прямолинейна. Каждая его глава посвящена рассмотрению ровно одной модели (задачи) или нескольких близких вариаций одной модели. Первым шагом идет формализация модели, выражающаяся в построении некоторого дифференциального уравнения или системы таких уравнений, описывающих поведение рассматриваемой модели. Затем описывается процесс решения построенного ранее уравнения.

[4] — Голубчики, — сказал Фёдор Симеонович озабоченно, разобравшись в почерках. — Это же проблема Бен Бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.
— Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. — Мы хотим знать, как её решать.
— Как-то странно ты рассуждаешь, Кристо... Как же искать решение, когда его нет? Бессмыслица какая-то...
— Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идёт о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос...

Аркадий и Борис Стругацкие
Понедельник начинается в субботу

При этом для каждого нового метода решения приводится некоторый минимальный теоретический материал[5], достаточный для понимания того, как этот метод устроен и как он работает. Последним шагом рассмотрения модели следует анализ полученного решения и обсуждение его свойств с точки зрения поставленной в начале главы задачи.

[5] Если читатель желает получить более строгое или более полное теоретическое обоснование используемых в настоящем издании понятий и методов, ему следует обратиться к какому-нибудь классическому учебнику по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например из списка на стр. 10.

Каждая глава сопровождается упражнениями для самостоятельной работы для более глубокого понимания читателем рассматриваемой в главе темы.

Так как перекрестные ссылки (между главами) на формулы и рисунки в книге практически не встречаются, то в каждой главе используется своя собственная нумерация всех типов объектов — формул, рисунков, сносок и таблиц. В случае использования перекрестных ссылок указывается либо страница, либо глава, где и располагается нужный объект.

Обратная связь • Автор с благодарностью примет все конструктивные отзывы и комментарии относительно структуры и содержания настоящего издания, а также пожелания о включении в последующие переиздания каких-либо новых практических задач. Свои отзывы и пожелания просьба отправлять по следующему адресу: ersovnm@gmail.com.

ГЛАВА 1

Свободное падение тел

Модель • В качестве первой модельной задачи рассмотрим классическую динамическую задачу моделирования движения свободно падающего тела. Пусть тело массы m бросается под углом α к горизонту с начальной скоростью w_0 (рис. 1). Требуется определить, по какой траектории будет двигаться данное тело после броска. Введем систему координат: ось Ox направим вдоль поверхности Земли, ось Oy — перпендикулярно вверх. Начало координат поместим (для простоты выкладок) в точку броска, т.е. в начальный момент времени

$$x(0) = y(0) = 0.$$

В данной модели тело совершает движение в двух направлениях — в горизонтальном и в вертикальном. Разложим скорость тела на две соответствующие компоненты: $v(t)$ — горизонтальная компонента скорости, а $u(t)$ — вертикальная (рис. 2). Дальше рассмотрим движение в каждом направлении по отдельности.

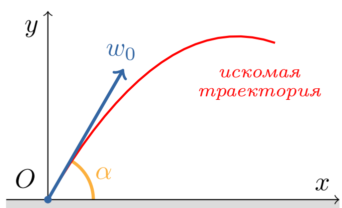


РИС. 1 Начальные условия в модели движения тела под углом к горизонту

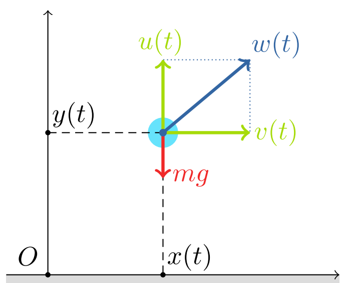


РИС. 2 Состояние модели в момент времени t

Горизонтальное движение • Особенностью горизонтального движения является то, что в этом случае на тело не действуют внешние силы. Единственная сила в нашей модели — это сила тяжести, но она направлена вертикально и на горизонтальное движение не влияет. Другими словами можно сказать, что на тело в горизонтальном направлении действует нулевая сила: $F = 0$. Требуется определить, как будет изменяться со временем положение тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$, если в начальный момент времени тело располагается в точке с координатой x_0 и имеет начальную скорость v_0 (рис. 3). Попытаемся ответить на эти простые кинематические вопросы с точки зрения дифференциальных уравнений.

Мы знаем, что физическим смыслом производной является скорость изменения одной величины относительно другой величины. Отсюда, в частности, следует, что в нашей модели скорость тела $v(t)$ будет равна производной от его положения $x(t)$ по времени t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

По аналогичным соображениям мгновенное ускорение тела $a(t)$, т.е. скорость изменения скорости, является производной уже скорости v по времени t:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Согласно второму закону Ньютона мгновенное ускорение a тела пропорционально действующей на него силе F и обратно пропорционально массе m этого тела:

$$a = \frac{F}{m} \text{ или } ma = F. \tag{3}$$

Так как в нашей модели сила $F = 0$, то ускорение оказывается также нулевым: $a = 0$. Подставляя в это равенство вместо ускорения производную скорости, получим соотношение

$$\frac{dv}{dt} = 0. \tag{4}$$

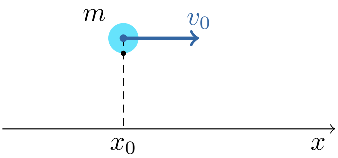


РИС. 3 Горизонтальное движение тела

Данное соотношение, несмотря на всю свою тривиальность, является самым настоящим *дифференциальным уравнением* первого порядка.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и хотя бы одну ее производную, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***[1]. ***Порядком*** дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Наше уравнение (4) относится к классу *простейших* дифференциальных уравнений.

[1] Дифференциальные уравнения для функций *многих переменных* называются уравнениями *в частных производных*.

Дифференциальное уравнение вида $y'(x) = f(x)$, в котором правая часть не зависит от y, называется ***простейшим*** дифференциальным уравнением.

Решением простейшего уравнения $y' = f(x)$ является любая первообразная (неопределенный интеграл) правой части $f(x)$:

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

В нашей модели уравнение решается совсем элементарно: производная функции $x(t)$ равна нулю, значит, эта функция является постоянной:

$$v(t) = C, \tag{5}$$

где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Найденное нами решение демонстрирует важнейшее свойство дифференциальных уравнений: как правило, они имеют бесконечно много решений, описываемых некоторым числом произвольных постоянных (констант). Решения такого вида называются *общими*[2]. При подстановке вместо констант каких-то конкретных значений мы будем получать *частные* решения.

[2] Обычно число констант в общем решении равно порядку дифференциального уравнения.

Заметим, что согласно найденному решению скорость тела оказывается фиксированной и равной C. Однако чему конкретно равна эта константа C, наше дифференциальное уравнение сказать не может. Для ответа на этот вопрос нам понадобится дополнительное, так называемое *начальное*, условие: мы знаем, что начальная скорость тела равна $v(0) = v_0$.

Огюстен Луи Коши

Задача, состоящая из дифференциального уравнения и начального условия для неизвестной функции:

$$\begin{aligned} &F(x, y, y') = 0, \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

— называется ***задачей Коши*** для данного дифференциального уравнения[3].

[3] При соблюдении некоторых достаточно простых условий на функции, входящие в уравнение, задача Коши имеет *единственное* решение.

Подставляя начальное условие $v(0) = v_0$ в решение (5), находим, что $v_0 = C$. Окончательное решение принимает, таким образом, следующий вид:

$$v(t) = v_0. \tag{6}$$

Интегральной кривой дифференциального уравнения называется график любого его частного решения. Общему решению уравнения тогда соответствует семейство интегральных кривых — по одной кривой на каждое значение параметра C. Для нашего уравнения (4) интегральными кривыми будут горизонтальные прямые линии, определяемые формулой (5), каждому значению константы C соответствует своя интегральная кривая. В совокупности данное семейство кривых заполняет всю координатную плоскость. На рис. 4 показаны несколько интегральных кривых (голубого цвета) уравнения (4) и одна интегральная кривая (красного цвета), соответствующая решению (6) задачи Коши с начальным условием $v(0) = 0.5$.

Теперь, зная закон изменения скорости $v(t)$, можно найти, как меняется расстояние x со временем. Для этого подставим найденное выражение $v(t) = v_0$ в формулу (1):

$$\frac{dx}{dt} = v_0. \tag{7}$$

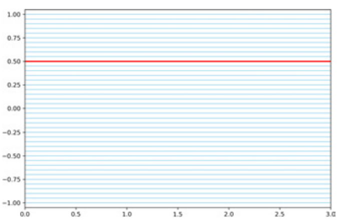


РИС. 4 Интегральные кривые $v(t)$ уравнения (4)

Это еще одно простейшее дифференциальное уравнение, его общее решение находится непосредственным интегрированием правой части:

$$x(t) = \int v_0 dt = v_0 t + C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

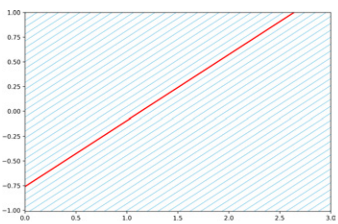


РИС. 5 Интегральные кривые $x(t)$ уравнения (7)

Для данного уравнения у нас также имеется начальное условие: $x(0) = x_0$. Подставляя его в общее решение, определяем константу C: $C = x_0$, откуда находим уже решение соответствующей задачи Коши:

$$x(t) = x_0 + v_0 t. \tag{9}$$

Интегральные кривые общего решения и решения задачи Коши для $x(0) = -0.75$ показаны на рис. 5. В данном случае интегральные кривые также являются прямыми линиями, угол наклона которых определяется значением v_0.

Вертикальное движение • Рассмотрим теперь случай движения тела массы m в вертикальном направлении в предположении, что на тело действует только сила тяжести, которая около поверхности Земли примерно равна $F = mg$, где $g \approx 9.8\,\text{м}/\text{с}^2$ — ускорение свободного падения. Направим ось y вертикально вверх, начало координат $y = 0$ привяжем к поверхности Земли. Обозначим скорость тела $u(t)$, т.е. согласно физическому смыслу производной

$$u(t) = \frac{dy}{dt}. \tag{10}$$

Пусть в начальный момент времени высота $y(0) = y_0$, скорость $u(0) = u_0$ (рис. 6). Заметим, что при $u_0 > 0$ начальная скорость направлена вверх (в положительном направлении оси Oy), что соответствует, например, броску тела вверх, а при $u_0 < 0$ начальная скорость направлена вниз.

Дальше действуем по рассмотренной выше схеме. Записываем второй закон Ньютона для вертикального направления:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{F}{m} = -\frac{mg}{m} = -g, \tag{11}$$

сила тяжести действует против положительного направления оси Oy, поэтому она в данном уравнении записывается со знаком минус. Это простейшее дифференциальное уравнение, его общее решение:

$$u(t) = -\int g dt = -gt + C. \tag{12}$$

Из начального условия $u(0) = u_0$ определяем константу $C = u_0$, следовательно, вертикальная скорость свободно падающего тела меняется со временем по закону

$$u(t) = u_0 - gt. \tag{13}$$

Подставляем найденную скорость в (10) и получаем простейшее уравнение для неизвестной функции $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = u_0 - gt. \tag{14}$$

Общее решение этого уравнения находим также непосредственным интегрированием:

$$y(t) = \int (u_0 - gt)dt = u_0 t - \frac{gt^2}{2} + C. \tag{15}$$

Согласно начальному условию $y(0) = y_0$, поэтому константа $C = y_0$, следовательно,

$$y(t) = y_0 + u_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{16}$$

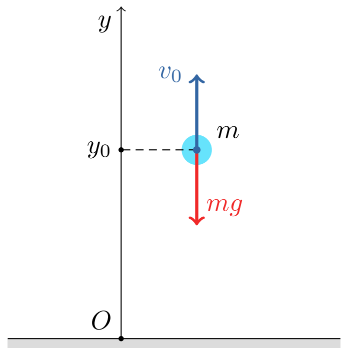


РИС. 6 Вертикальное движение тела под действием силы тяжести

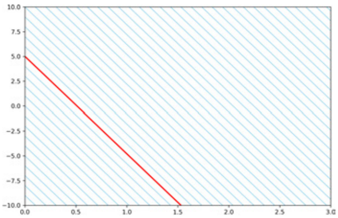


РИС. 7 Интегральные кривые уравнения (11)

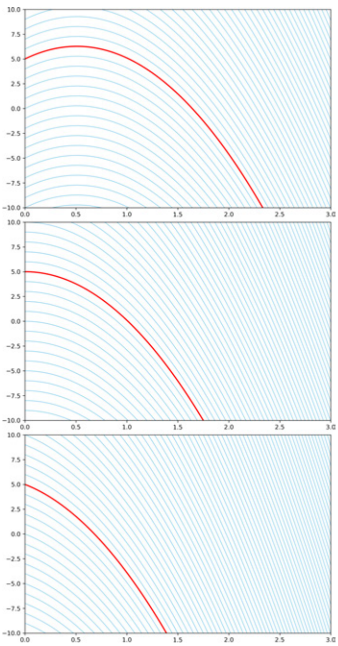


РИС. 8 Интегральные кривые уравнения (16) для трех случаев (сверху вниз): $u_0 > 0$, $u_0 = 0$ и $u_0 < 0$

Заметим, что формулы (13) и (16) определяют закон *равноускоренного* движения (с постоянным ускорением, равным $-g$).

Интегральные кривые уравнения (11) показаны на рис. 7, ими являются параллельные прямые с углом наклона к оси Ot, равным $\alpha = -\operatorname{arctg} g$.

На рис. 8 построены интегральные кривые уравнения (16) для трех случаев: начальный бросок вверх ($u_0 > 0$), свободное падение с нулевой начальной скоростью ($u_0 = 0$) и бросок вниз ($u_0 < 0$). Очевидно, что во всех случаях интегральные кривые являются параболами, положение вершины каждой параболы определяется значением начальной скорости u_0.

Общий случай ● Вернемся теперь к общему случаю, когда тело бросается под некоторым углом к горизонту. Заметим сначала, что горизонтальное движение тела описывается уже найденными выше формулами (6) и (9). С учетом начальных условий в данной модели

$$x_0 = 0,\ v_0 = w_0 \cos\alpha,$$

— получаем следующие формулы:

$$v(t) = w_0 \cos\alpha,\ x(t) = w_0 \cos\alpha t. \tag{17}$$

Вертикальное движение, определяемое силой тяжести, описывается второй рассмотренной выше моделью, т.е. формулами (13) и (16). Подставляя в эти формулы начальные условия

$$u(0) = w_0 \sin\alpha,\ y(0) = 0,$$

получаем, что

$$u(t) = w_0 \sin\alpha - gt,\ y(t) = w_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \tag{18}$$

Таким образом, траектория движения тела описывается системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} x(t) &= w_0 \cos\alpha t, \\ y(t) &= w_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что мы можем исключить параметр t из системы. Для этого выразим t из первого уравнения:

$$t = \frac{x}{w_0 \cos\alpha}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$y = w_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{w_0 \cos\alpha} - \frac{g\left(\frac{x}{w_0\cos\alpha}\right)^2}{2}.$$

После очевидных упрощений получаем явную формулу, описывающую траекторию движения тела в виде функции $y(x)$:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2w_0^2\cos^2\alpha}. \tag{20}$$

Полученная зависимость является квадратичной, следовательно, траектория полета тела оказывается параболой[4]. На рис. 9 показано несколько траекторий для разных значений угла α при фиксированной начальной скорости, а на рис. 10 — несколько траекторий для разных начальных скоростей при фиксированном угле броска $\alpha = 67°$.

[4] Фотографии, иллюстрирующие этот факт, можно найти в сети Интернет по ключевым словам *projectile motion*.

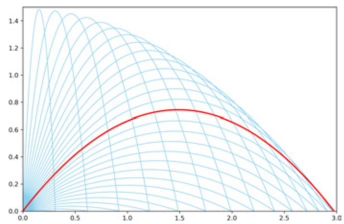


РИС. 9 Траектории полета тела для разных значений угла α, красным цветом выделен случай $\alpha = 45°$

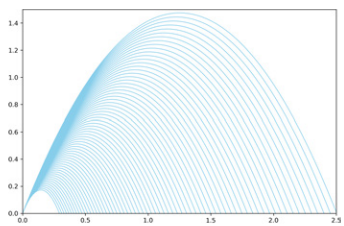


РИС. 10 Траектории полета тела для разных значений начальной скорости w_0 и угла $\alpha = 67°$

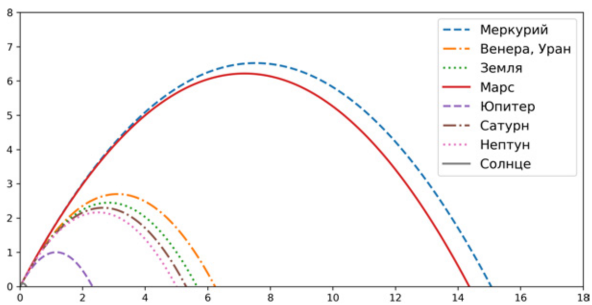


РИС. 11 Траектории полета одного и того же тела для разных небесных тел, $w_0 = 8$ м/с, $\alpha = 60°$

На рис. 11 показано, как бы двигалось тело, брошенное с одной и той же скоростью под одним и тем же углом, на разных небесных телах Солнечной системы. Различие траекторий обусловлено разными значениями ускорения свободного падения на поверхности того или иного тела, которое зависит от массы M тела и его радиуса R:

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

где $G \approx 6.67 \cdot 10^{11}$ $\text{м}^3\cdot\text{с}^2\cdot\text{кг}^{-1}$ — гравитационная постоянная.

Стоит еще раз отметить тот факт, что параболической траектория полета тела будет только в идеальном

Жозеф Луи Лагранж

случае: постоянная сила тяжести и отсутствие сопротивления воздуха. Первое условие почти выполняется для малых высот, второе — для тяжелых небольших тел и малых скоростей. Если учесть, что сила тяжести зависит от высоты полета, то траектория согласно законам Кеплера (которые мы рассмотрим позже) окажется на самом деле *эллипсом*, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Если же учесть сопротивление воздуха (эту модель мы также рассмотрим позже), то траектория полета станет совсем неправильной.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАМЕЧАНИЯ

1 Решите следующие дифференциальные уравнения[5]:

1) $y' = x \ln x$;

2) $y' = x \operatorname{arctg} x$;

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$;

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$;

5) $(x^2+1)dx + (x+1)dy = 0$[6];

6) $xdx - (x^2+1)dy = 0$.

2 Найдите решение следующих задач Коши для простейших дифференциальных уравнений:

1) $xdy = dx$; $y(-e) = 2$;

2) $\cos^6 x dy = \sin^3 x dx$; $y(\pi) = 1$;

3) $y' = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$; $y(3) = 0$;

4) $y' = x \sin x$; $y(\pi) = \pi$.

3 Ответьте на следующие два «баллистических» вопроса, используя формулу (20) и условие, что начальная скорость w_0 фиксирована.

1) Каким должен быть угол α, чтобы расстояние до места падения тела было максимальным?

2) На какую максимальную высоту можно забросить тело на расстоянии l (по горизонтали) от точки броска?

5 Для обозначения производных традиционно используются нотации Лагранжа и Лейбница:

$$y'(x) \text{ и } \frac{dy}{dx}.$$

Если независимой переменной является время t, то для обозначения производной функции $x(t)$ мы будем применять нотацию Ньютона:

$$\dot{x}(t).$$

6 Нотация Лейбница позволяет записывать дифференциальные уравнения в форме дифференциалов:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Чтобы выразить из такого уравнения производную y', надо поделить его на dx и заменить dy/dx на y'.

ГЛАВА 2

Вращение жидкости

Модель • В сосуд, имеющий форму прямого кругового цилиндра, налита жидкость, например вода. Сосуд вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси цилиндра (рис. 1).

Требуется определить, какую форму примет поверхность жидкости, если вращение продолжается достаточно долго[1]. При построении модели мы будем предполагать, что сосуд достаточно широкий и глубокий, это позволит пренебречь разными поверхностными эффектами около боковых стенок сосуда.

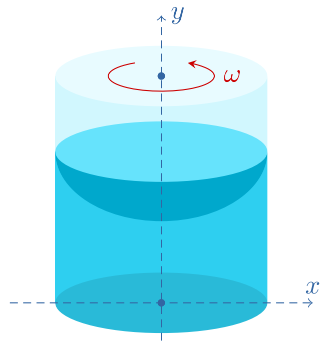


РИС. 1 Вращение сосуда с жидкостью

[1] «Достаточно долго» понимается здесь в том смысле, что вся жидкость в сосуде должна прийти в стационарное состояние относительно самого сосуда, т.е. каждый элементарный ее объем будет совершать только общее вращательное движение с заданной угловой скоростью ω.

Дифференциальное уравнение • Очевидно, что искомая поверхность должна быть поверхностью вращения. Поэтому для нахождения ее формы достаточно рассмотреть осевое сечение нашего сосуда и найти форму соответствующей *кривой*, из которой потом мы сможем сформировать и саму поверхность.

Введем в модель систему координат, как это показано на рис. 1. Ось Oy направим по оси цилиндра, ось Ox — перпендикулярно оси Oy вдоль основания цилиндра, начало координат, таким образом, оказывается в центре основания цилиндра.

Рассмотрим малый объем ν жидкости на ее поверхности (точка P на рис. 2). Пусть его масса равна m. На этот объем действуют две силы: сила тяжести $F = mg$ и сила реакции опоры N со стороны всей остальной жидкости. Сила тяжести, как обычно, действует вертикально вниз, а реакция опоры — по нормали к нашей искомой кривой, т.е. перпендикулярно касательной к этой кривой в точке P.

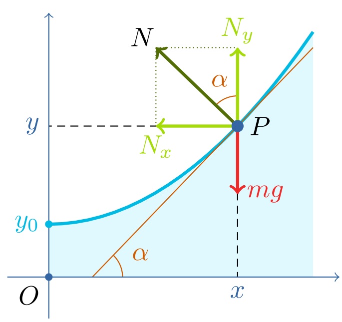


РИС. 2 Силы, действующие на малый объем жидкости ν массы m в точке $P(x, y)$

Обозначим угол наклона данной касательной к оси Ox через α и разложим силу N на горизонтальную N_x

и вертикальную N_y составляющие (рис. 2):

$$N_x = N\sin\alpha,\ N_y = N\cos\alpha.$$

Запишем теперь 2-й закон Ньютона отдельно для каждой координаты. Вдоль вертикальной оси наш объем ν находится в состоянии равновесия, поэтому суммарная сила, действующая на него в вертикальном направлении, должна быть равна нулю:

$$N\cos\alpha - mg = 0. \tag{1}$$

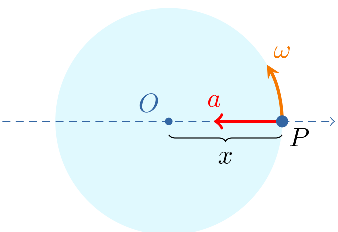


РИС. 3 Центростремительное ускорение для точки P (вид на сосуд сверху)

Единственная сила, действующая на объем ν вдоль горизонтального направления, — это проекция реакции опоры N_x. Так как данный объем совершает круговое движение с радиусом вращения x, то он испытывает центростремительное ускорение a, которое направлено горизонтально к оси вращения (рис. 3). Величина этого ускорения вычисляется по формуле (квадрат угловой скорости на радиус вращения):

$$a = \omega^2 x. \tag{2}$$

Таким образом, вдоль оси Ox второй закон Ньютона записывается в следующем виде:

$$-N\sin\alpha = -ma = -m\omega^2 x, \tag{3}$$

обе части взяты с отрицательным знаком, потому что и сила N_x, и ускорение a направлены против положительного направления оси Ox.

Запишем формулы (1) и (3) в виде системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} Ox &: N\sin\alpha = m\omega^2 x, \\ Oy &: N\cos\alpha = mg. \end{aligned} \tag{4}$$

Поделим первое уравнение системы на второе:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Теперь учтем тот факт, что согласно геометрическому смыслу производной функции $y(x)$ величина производной в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к соответствующей кривой $y(x)$ в заданной точке x_0. То есть мы можем заменить $\operatorname{tg}\alpha$ на y', что и даст нам искомое дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{\omega^2 x}{g}. \tag{5}$$