Моим коллегам и студентам

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу

I am pleased that the Russian edition of my book «Differentiable Dynamical Systems» is coming up. I thank Prof. Malkin and Dr. Safonov for their wonderful work of translation, and thank Prof. Pochinka for launching this project. I hope the Russian reader would like it. I took the Russian language class when I was a high school student. Today I can still sing in Russian a few songs like «Moscow nights». I am glad my book could go beyond the border to reach the homeland of such beautiful songs.

Lan Wen

Мне очень приятно, что моя книга «Differentiable Dynamical Systems» выходит на русском языке. Я благодарен проф. Малкину и Сафонову за их замечательную работу по переводу, а также проф. Починке, координировавшей этот проект. Я надеюсь, что русскому читателю книга понравится. Я учился русскому языку в старших классах школы. Сегодня я все еще могу спеть по-русски несколько песен, например «Подмосковные вечера». Я рад, что моя книга, не зная границ, попадет на родину таких прекрасных песен!

Лан Вен

Проект по переводу книги Лан Вена «Differentiable Dynamical Systems» был инициирован в 2018 г. нашим молодым коллегой Женей Куренковым, в то время аспирантом первого года обучения. Когда, годом ранее, он познакомился с монографией Лан Вена на английском, она ему очень понравилась и он мог часами пересказывать ее содержание студентам, коллегам, преподавателям.

В 2019 г. Жени не стало... Книгу, увы, перевели без его участия. Замечательный результат проекта вы держите в руках благодаря Михаилу Иосифовичу Малкину, редактору перевода, и Климу Сафонову: они взяли на себя этот нелегкий труд. Перечитывая главы получившийся книги, я вспоминаю Женю, вдохновенно доносящего до слушателей содержание этих глав, вспоминаю даже его интонации во время изложения на наших семинарах. Видя его увлеченность в то время этим материалом, я написала письмо Шаобо Гану, ученику Лан Вена, с просьбой прислать экземпляр книги в подарок на день рождения Жени. Спасибо китайским коллегам, они выполнили просьбу. Нужно было видеть неподдельное счастье на лице Жени, когда мы вручили ему подарок, собственноручно подписанный Лан Веном! Думаю, это был один из самых дорогих для него подарков в его столь рано оборвавшейся жизни. Но для меня Женя навсегда останется жить между строк этой книги.

Координатор проекта по переводу книги,
заведующая международной лабораторией
динамических систем и приложений
О.В. Починка

Предисловие

Истоки теории динамических систем восходят к качественной теории дифференциальных уравнений, созданной Пуанкаре в конце девятнадцатого века. Дифференцируемые динамические системы — это та часть теории динамических систем, которая включает структурную устойчивость, гиперболичность, типичность, плотность и т.п. Эти разделы теории стали активно развиваться с 60-х гг. двадцатого века. Имеется обзорная и в то же время обучающая статья одного из основателей этой теории — С. Смейла (Smale, 1967) (см. также его статью 1980 г.).

Данная книга является учебником по дифференцируемым динамическим системам, она предназначена для старшекурсников и аспирантов. Основное внимание уделяется структурной устойчивости и гиперболичности, которые занимают центральное место в этой области. Для простоты мы рассматриваем дискретные динамические системы, образованные итерациями диффеоморфизмов. Хорошо известно, что периодическая орбита структурно устойчива тогда и только тогда, когда она гиперболическая (собственные значения по модулю не равны единице). То же справедливо и для конечного числа периодических орбит. Долгое время были большие сомнения в том, что динамическая система с бесконечным множеством периодических орбит может быть структурно устойчивой. Эпохальным открытием такой системы в начале 1960-х гг. было построение отображения с подковой Смейла. Это структурно устойчивая система с бесконечным множеством периодических орбит. Вместе со знаменитым автоморфизмом Аносова и построенным вскоре соленоидальным аттрактором эти системы продемонстрировали удивительное свойство мироздания: структурная устойчивость может сочетаться с высоким уровнем сложности (иногда говорят, хаосом). Аналитическое условие, обеспечивающее структурную устойчивость такого хаотического множества, сейчас обоснованно называют «гиперболичностью». Это привело к появлению новой теории *гиперболических множеств*, в которой гиперболические периодические орбиты являются частным случаем. Теорема Смейла об Ω-устойчивости явилась одним из первых глобальных результатов гиперболической теории, она послужила толчком к ее развитию. Этой линии развития гиперболической теории мы будем придерживаться в данной книге.

Книга состоит из шести глав. В главе 1 вводятся некоторые основные понятия теории динамических систем, такие как предельное множество, неблуждающее множество, минимальное множество, транзитивное множество и т.д., а также определяется топологическая сопряженность и структурная устойчивость. Мы приводим краткое изложение классической теории гомеоморфизмов окружности, поскольку в ней наглядно иллюстрируются введенные понятия. Мы также включили в эту главу теорему Конли — фундаментальную теорему теории динамических систем.

Глава 2 посвящена гиперболичности, которая является основным понятием книги. Здесь рассматривается случай отдельной неподвижной точки. Мы изучаем устойчивость гиперболической неподвижной точки к возмущениям, теорему Гробмана–Хартмана, теорему об устойчивом многообразии и др. Этот материал является классическим, но при его изложении мы имеем в виду, что он должен подготовить читателя к пониманию гиперболичности в общем случае, который будет рассмотрен в гл. 4.

В главе 3 представлены три исторические модели: подкова Смейла, аносовский автоморфизм тора и соленоидальный аттрактор, — базовые модели в современной теории дифференцируемых динамических систем.

В главе 4 понятие гиперболичности отдельной неподвижной точки обобщается на случай любого компактного инвариантного множества. Мы изучаем устойчивость гиперболичности и структурную устойчивость, доказываем теорему об устойчивом многообразии, рассматриваем свойство отслеживания для гиперболических множеств. В этой главе разрабатывается аналитический аппарат теории структурной устойчивости, и поэтому с технической точки зрения эта глава является самой сложной частью книги. Если при ее чтении возникают трудности, то читателю рекомендуется вернуться к соответствующим местам гл. 2, которая более доступна и наглядна.

В главе 5 представлена одна из важнейших идей всей теории, которую можно выразить так: гиперболичность влечет структурную устойчивость. Зерном этой идеи является теорема Смейла об Ω-устойчивости. Мы также приводим некоторые эквивалентные описания Ньюхауса и Франке–Селгрейда.

В главе 6 представлена теория квазигиперболичности и линейной трансверсальности. Она помогает взглянуть на гиперболичность под другим углом. Мы также включили в эту главу раздел, в котором бегло освещаются гипотезы, связанные с устойчивостью.

В книге встречается довольно сложный материал, особенно теорема об устойчивом многообразии (теорема 4.16) и теорема о структурной устойчивости (теорема 4.21) для гиперболических множеств. Эти две большие теоремы вызывают обычно трудности при изучении предмета и в его преподавании. Здесь в общем случае произвольного гиперболического множества мы выбрали стратегию доказательств, которая прослеживает аналогии (копии) соответствующих доказательств для гиперболической неподвижной точки. Хорошим примером такой стратегии является доказательство леммы 4.5, которое почти полностью дублирует доказательство леммы 2.9. Читатели могут потратить несколько минут, чтобы просто формально сравнить эти доказательства. Используя данную стратегию, мы смогли дать довольно простые доказательства этих теорем. Автор считает: в отличие от искусства или литературы, в математике не нужно избегать повторений и аналогий; более того, часто таким образом различные явления раскрывают единую природу, хотя имеют непохожую оболочку. Без сомнения, теория гиперболических множеств сложна для усвоения, но мы надеемся, что предложенный нами путь поможет читателю преодолеть препятствия и добраться до самой сути теории динамических систем.

Для чтения этой книги достаточно, по существу, знания традиционного курса анализа, линейной алгебры и основ топологии. Кроме того, полезно знание некоторых основных понятий теории дифференцируемых многообразий, например таких, как касательные расслоения и касательные отображения, подмногообразия, риманова метрика, экспоненциальное отображение. Мы приводим определения менее известных, но необходимых понятий. Для облегчения понимания в книге имеются многочисленные рисунки.

В конце книги приводится список литературы по динамическим системам. Особо я хочу отметить две большие монографии — Катка и Хасселблата (Katok, Hasselblatt, 1995) и Робинсона (Robinson, 1995), в которых представлен панорамный обзор современного состояния теории динамических систем. Многие книги из этого списка я часто использовал в своей работе. Особенно я благодарен книге Занга (Zhang, 1986), которой пользовался как учебником, когда читал курс в Пекинском университете.

Эта книга небольшая, и поэтому, возможно, я сослался не на всех авторов, результаты которых имеют отношение к изложенному. Отмечу, что очень полезной для меня при написании книги была монография Робинсона (Robinson, 1995).

Я несколько раз в семестровом курсе в Пекинском университете рассказывал основную часть материала из первых пяти глав книги. Я также читал подобный курс в Тайваньском университете (весна 2003 г.) и в Университете Providence Тайваня (осень 2004 г.). Часть материала я рассказывал в виде краткого курса в Университете Нанкай (1989), в Университете Сунь Ятсен (1990), в Университете Фучжоу (1995), в Университете Наньцзин (1998), в Национальном центре теоретических наук, Тайвань (1999), в Научно-техническом университете Китая (2001), в Цзилиньском университете (2007), в Университете Чао Тунг Тайваня (2011), в Университете Чуннам в Корее (2014). Я хотел бы воспользоваться возможностью поблагодарить слушателей всех этих курсов. В частности, я хочу выразить благодарность Шаобо Ган за многолетнее сотрудничество и многочисленные обсуждения, а также за тщательную проверку рукописи всей книги. Я благодарю Сяо Вэнь и Давэй Ян за отличные рисунки и за большое число упражнений, а Сяо Вэнь — за обсуждение той части теоремы об устойчивом многообразии, которая касается гладкости C^k. И в заключение я благодарю Вэньсян Сан и участников нашего семинара за плодотворные беседы и обсуждения на протяжении многих лет.

Глава 1

ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если рассуждать неформально, то динамическую систему можно рассматривать как некий абстрактный поток или движение точек во времени. Движение отдельных точек образует орбиты (в случае потока чаще говорят — траектории. — *Примеч. ред.*). Классическим примером динамической системы является поток, определяемый обыкновенным дифференциальным уравнением (или векторным полем). Предполагается, в силу определения потока, что любое решение задано на всей оси времени $(-\infty, \infty)$, так что точки не убегают из фазового пространства. Самый специфический и простой случай орбиты — это орбита, состоящая из одной точки, которая называется особенностью векторного поля [1]. Состоянием равновесия могут быть, например: сток, источник или седло. Если близкие точки экспоненциально приближаются к состоянию равновесия или удаляются от него, то оно называется гиперболическим. Следующий тип специальной орбиты — это периодическая орбита. Если близкие к ней точки экспоненциально приближаются или удаляются, то периодическая орбита также будет называться гиперболической.

Каждая научная дисциплина имеет множество интересных историй. В 1962 г. Пейшото, по совету Лефшеца, возродил интерес к основополагающей работе Андронова и Понтрягина (Andronov, Pontryagin, 1937) о структурно устойчивых векторных полях на двумерном диске и доказал такую теорему: векторное поле на ориентируемой замкнутой поверхности структурно устойчи-

[1] Другие названия: состояние равновесия (наиболее распространенное название в русскоязычной литературе), состояние покоя, особая точка, неподвижная точка. — *Примеч. ред.*

во тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим трем условиям: 1) у него конечное число состояний равновесия и периодических орбит, все они гиперболические; 2) каждая точка стремится как в положительном, так и в отрицательном направлении к состоянию равновесия или периодической орбите; 3) отсутствуют седловые связки[2]. Более того, структурно устойчивые поля плотны в пространстве всех векторных полей.

По определению векторное поле называется *структурно устойчивым*, если все близкие векторные поля имеют топологически эквивалентные орбитные структуры. С любой точки зрения структурная устойчивость является понятием огромной важности. Однако оно довольно абстрактно: в его определении участвуют все близкие векторные поля, а это затрудняет работу с ним. В отличие от определения, в теореме Пейшото речь идет только о данном векторном поле в терминах лишь его состояний равновесия и периодических орбит. Эта замечательная глобальная теорема сразу же привлекла к себе внимание, в том числе внимание молодого математика С. Смейла. Через несколько лет в статье «О том, как я начал заниматься динамическими системами», опубликованной в издании «Математики своего времени» (Smale S. The Mathematics of Time. 1980), Смейл так описал историю своих исследований.

Читая работу Пейшото, Смейл сначала подумал, что аналогичный результат можно доказать и в более высокой размерности. Однако Левинсон написал ему, что вряд ли стоит надеяться на такой результат в общем случае. Левинсон (Levinson, 1949) привел трехмерный пример с бесконечным множеством периодических орбит, которые не исчезали при возмущениях. С некоторым недоверием к этому результату Смейл провел много времени (как он пишет, на пляже в Рио с ручкой и блокнотом), изучая работу Левинсона, и в конце концов изменил свое мнение. Фактически Смейл придумал следующий геометрический механизм, лежащий в основе аналитических результатов Левинсона и Картрайта и Литтлвуда (Cartwright, Littlewood, 1945).

На рис. 1.1 изображена площадка Q, трансверсальная направлению потока. Под действием этого потока площадка ста-

[2] То есть траектории, идущие из седла в седло. — *Примеч. ред.*

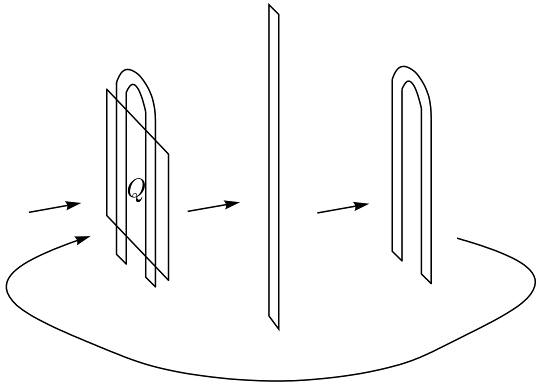

Рис. 1.1. Ключевой механизм в трехмерном потоке

новится все более длинной и узкой, при этом сгибаясь в форме подковы, и затем возвращается обратно, пересекая Q. (Здесь мы сократили описанную историю; детали см. в статье Смейла (Smale, 1980).) Смейл понял, что именно такой простой механизм является причиной постоянного присутствия бесконечного множества периодических орбит. Чтобы прояснить ситуацию, он перешел от трехмерного потока к двумерному отображению. Другими словами, он рассмотрел отображение так называемого «первого возвращения» $f : Q \to R^2$, см. рис. 1.2.

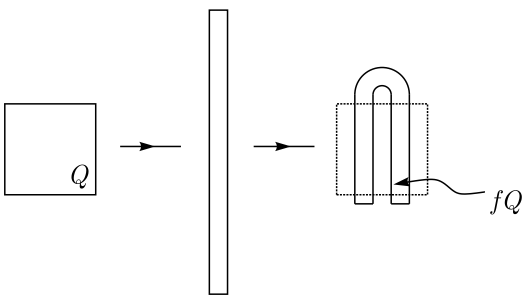

Рис. 1.2. Двумерная подкова Смейла

Тогда неподвижная точка отображения f будет соответствовать периодической траектории потока. Периодическая точка отображения f также соответствует периодической траектории потока, но совершающей при этом несколько оборотов. Смейл доказал, что f имеет бесконечное множество периодических точек, которые не исчезают при возмущениях. Это означает, что теорема Пейшото не выполняется в более высоких размерностях. Оказывается, что структурная устойчивость в больших размерностях может сосуществовать с высоким уровнем сложности (который иногда называют хаосом). Этот феномен стал неким символом современной теории дифференцируемых динамических систем. Отображение подковы мы будем изучать в гл. 3.

Вскоре Смейл понял, что обнаруженное явление уходит своими корнями к удивительному гомоклиническому феномену, открытому Пуанкаре в его исследованиях по небесной механике, а также имеет отношение к работе Биркгофа о диффеоморфизмах поверхностей. Основываясь на отображении подковы и появившейся вскоре важной работе Аносова (Anosov, 1967), Смейл пришел к понятию гиперболического множества, включающего (как частный случай) гиперболическую периодическую орбиту, а *гипотеза об устойчивости*, сформулированная им совместно с Палисом (Palis, 1970) в качестве аналога критерия Пейшото, дала толчок ко многим важным работам и расцвету теории дифференцируемых динамических систем.

Что касается проблемы плотности структурно устойчивых систем, то здесь ситуация оказалась несколько иной. Начиная со Смейла (Smale, 1966) многие авторы один за другим приходили к выводу, что в больших размерностях структурно устойчивые системы вообще не плотны. Другими словами, в пространстве всех систем существуют открытые области, подобные «странным дырам», где любая система не является структурно устойчивой. Бонатти и Диаз (Bonatti, Diaz, 2003) обнаружили даже дыру $\mathcal{U}$ с универсальной динамикой в том смысле, что (в отличие от ситуации с единственностью динамики вблизи структурно устойчивой системы) около любой системы из $\mathcal{U}$, с точностью до соответствующей итерации, может встретиться любая динамика! Динамические системы, кажется, созданы для того, чтобы удивлять нас! В 90-х гг. прошлого столетия Палис предложил ряд гипотез для выяснения общих особенностей динамики в дырах (см. Палис (Palis, 2000, 2005)) и, в частности, выдвинул *гипотезу о плотности*, утверждающую, что в дырах плотны системы со специфической неустойчивой динамикой, а именно, с гомоклиническими бифуркациями. Эти гипотезы вызвали появление большого числа замечательных работ. Так тайны природы, чудеса природы раскрываются шаг за шагом исследователями разных эпох...

Эта книга представляет собой первую (но в то же время базовую) часть этой замечательной области знаний. Для простоты мы рассматриваем системы с дискретным временем, то есть итерации диффеоморфизмов.

1.1. Основные понятия

Пусть X — компактное метрическое пространство и $f : X \to \to X$ — гомеоморфизм. Он порождает семейство гомеоморфизмов, называемых *итерациями* f, которые записываются в виде[3]

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}, \quad f^0 = id, \quad f^{-n} = (f^n)^{-1}.$$

Очевидно, что

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}$$

для любых целых чисел n и m. Мы называем семейство $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (дискретной) *динамической системой*. Для простоты изложения динамической системой мы называем и сам гомеоморфизм f.

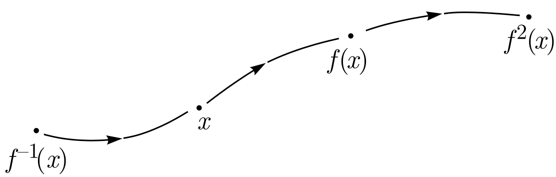

Рис. 1.3. Орбита

Для любой точки $x \in X$ множество $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называется *орбитой* x относительно f. Обозначается: орбита $\mathrm{Orb}(x, f)$ или просто $\mathrm{Orb}(x)$, см. рис. 1.3. Любые две орбиты либо

[3] Большинство понятий и результатов данного раздела имеют место и в случае непрерывного отображения f, только в этом случае итерации рассматриваются с неотрицательным целым «временем» n. Замечание относительно обозначений в книге: итерации точки x обозначаются как $f^n(x)$, так и $f^n x$; аналогично, обозначения $f^n(M)$ и $f^n M$ применяются для итераций множества M. — *Примеч. ред.*

совпадают, либо не пересекаются. Множества $\{x, fx, f^2x, \ldots\}$ и $\{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \ldots\}$ называются *положительной* и *отрицательной* орбитами точки x соответственно и обозначаются $\mathrm{Orb}^+(x)$ и $\mathrm{Orb}^-(x)$. Точка $x \in X$ называется *периодической*, если существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(x) = x$. Минимальное положительное целое число n, удовлетворяющее этому равенству, называется *периодом* точки x. Орбита периодической точки называется *периодической орбитой*. Периодические точки периода 1 являются неподвижными точками. Легко видеть, что точка $x \in X$ периодическая тогда и только тогда, когда $\mathrm{Orb}(x)$ состоит из конечного числа точек. Обозначим множество периодических точек гомеоморфизма f через $\mathrm{P}(f)$, а множество его неподвижных точек — через $\mathrm{Fix}(f)$.

Множество $\Lambda \subset X$ называется *инвариантным* относительно f, если $f(\Lambda) = \Lambda$. Любая орбита является инвариантным множеством. Множество Λ инвариантно тогда и только тогда, когда Λ есть объединение орбит.

Теорема 1.1. *Если множество Λ инвариантно, то его замыкание $\overline{\Lambda}$, граница $\partial(\Lambda)$ и внутренность $int(\Lambda)$ также инвариантны.*

Доказательство. Поскольку f — гомеоморфизм, то $f(\overline{\Lambda}) = \overline{f(\Lambda)} = \overline{\Lambda}$. Доказательство для двух других множеств аналогично. □

Множество $\mathrm{Fix}(f)$ неподвижных точек компактно и инвариантно, но может оказаться пустым. Множество $\mathrm{P}(f)$ периодических точек тоже инвариантно и может быть пустым, а может оказаться и непустым, но некомпактным.

Теперь мы определим другие инвариантные множества. Для данной точки $x \in X$ положительная орбита $x, fx, f^2x, \ldots$, вообще говоря, не образует сходящуюся последовательность (а если образует, то предел должен быть неподвижной точкой). Тем не менее у нее есть много сходящихся подпоследовательностей. Точка $y \in X$ называется *ω-предельной* для $x \in X$, если существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ натуральных чисел такая, что $f^{n_i}(x) \to y$. Множество ω-предельных точек называется *ω-предельным множеством* точки x и обозначается $\omega(x)$, см. рис. 1.4. Обратив время, получим определение *α-предельного множества* точки x, т.е. точка $y \in X$ называется *α-предельной* для x, если существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ натуральных чисел такая, что $f^{-n_i}(x) \to y$. Множество α-предельных точек для x называется *α-предельным множеством* точки x и обозначается через $\alpha(x)$. Очевидно, что $\alpha(x) = \alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$. Обычно мы формулируем результаты только для $\omega(x)$. Заметим, что если $x \in \mathrm{P}(f)$, то

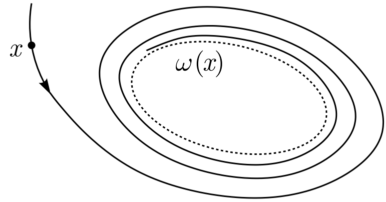

Рис. 1.4. ω-предельное множество

$$\omega(x) = \alpha(x) = \mathrm{Orb}(x).$$

Теорема 1.2. *Для любой точки $x \in X$ множество $\omega(x)$ непусто, компактно и инвариантно. Более того,*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0.$$

Доказательство. Поскольку X компактно, то $\omega(x)$ непусто и компактно. Возьмем $y \in \omega(x)$. Существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \to y$. Тогда $f^{n_i+1}(x) \to f(y)$, следовательно, $f(y) \in \omega(x)$. Таким образом, $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Аналогично, $f^{n_i-1}(x) \to f^{-1}(y)$ и поэтому $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Тогда $f(\omega(x)) \supset \omega(x)$. Это доказывает инвариантность $\omega(x)$.

Теперь предположим (от противного) что равенство

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $n_i \to +\infty$ такие, что $\mathrm{d}(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geqslant \varepsilon_0$ для всех i. Перейдя к подпоследовательности n_{i_k}, получим $f^{n_{i_k}}(x) \to z \notin \omega(x)$ — противоречие. $\square$

Когда говорят о поведении динамической системы, обычно имеют в виду предельное поведение орбит, описываемое множеством

$$\mathrm{L}(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)},$$

которое называется *предельным множеством* гомеоморфизма f. Оно непусто, компактно и инвариантно.

Кроме того, изучение поведения динамической системы подразумевает рассмотрение орбит с некоторым свойством возвращаемости (рекуррентности). У периодической орбиты самая сильная возвращаемость. Мы приведем несколько понятий возвращаемости, каждое из которых слабее предыдущего. Точка $x \in X$ называется *положительно рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$. Другими словами, точка $x \in X$ является положительно рекуррентной, если она лежит в собственном ω-предельном множестве. Аналогично, точка $x \in X$ называется *отрицательно рекуррентной*, если $x \in \alpha(x)$. Положительно или отрицательно рекуррентная точка называется *рекуррентной*. Обозначим через $R(f)$ множество рекуррентных точек гомеоморфизма f. Оно непусто, инвариантно, но может оказаться некомпактным (упражнение 1.6).

Более слабым свойством возвращаемости является неблуждаемость. Точка $x \in X$ называется *неблуждающей* относительно f, если для любой окрестности V точки x существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(V) \cap V \neq \varnothing$. Другими словами, в любой окрестности V точки x найдется точка y, орбита которой пересекает V, по меньшей мере, дважды, см. рис. 1.5. Объединение неблуждающих точек образует *неблуждающее множество*, которое обозначается $\Omega(f)$. Очевидно, что $\Omega(f)$ непусто, компактно и инвариантно.

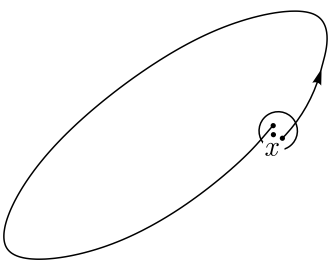

Рис. 1.5. Неблуждающая точка x

Наконец, дадим определение еще более слабой возвращаемости. Под *ε-цепью от x до y* понимается конечная последовательность $x_0, x_1, \cdots, x_k$, у которой $x_0 = x, x_k = y$ и

$$d(f(x_n),\ x_{n+1}) < \varepsilon$$

для $n = 0, 1, \cdots, k-1$. Если $x = y$, то ε-цепь называется *периодической*. Точка $x \in X$ называется *цепно-рекуррентной* относительно f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь от x до x, т.е. существует периодическая ε-цепь, проходящая через x. Множество цепно-рекуррентных точек называется *цепно-рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathrm{CR}(f)$. Конечно, цепная рекуррентность является самым слабым типом возвращаемости (см. замечание после леммы 1.15).

Условие цепной рекурентности не жесткое (см. упражнения в конце этой главы): на самом деле точка $x \in X$ является цепно-рекуррентной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая ε-цепь, проходящая через ε-окрестность точки x (упражнение 1.9). Легко видеть, что множество $\mathrm{CR}(f)$ компактно, инвариантно и

$$\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \mathrm{L}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f).$$

Непустое компактное инвариантное множество можно рассматривать как динамическую систему, ограниченную на этом множестве. Множество $\Lambda \subset X$ называется *минимальным*, если Λ непусто, компактно и инвариантно, но не содержит собственных непустых, компактных и инвариантных подмножеств[4]. Периодическая орбита очевидным образом является минимальным множеством. В то время как некоторые динамические системы могут не иметь периодических орбит, согласно следующей теореме минимальные множества всегда существуют. При доказательстве нам потребуется лемма Цорна, которую мы сейчас напомним читателю.

Рассмотрим множество S с бинарным отношением $\prec$, определенным для некоторых пар элементов из S. Мы говорим, что $\prec$ является отношением *частичного порядка*, если: (1) $x \prec x$ для каждого $x \in S$; (2) из $x \prec y$ и $y \prec x$ следует $x = y$; (3) из $x \prec y$ и $y \prec z$ следует $x \prec z$. Подчеркнем, что некоторые пары (x, y) элементов из S могут быть несравнимы, т.е. может не выполняться ни $x \prec y$, ни $y \prec x$. Типичным примером отношения частичного порядка является хорошо знакомое включение $\subset$ для множеств. Подмножество A из S называется *вполне упорядоченным* (относительно $\prec$), если для каждой пары (x, y) элементов из A имеет место либо $x \prec y$, либо $y \prec x$.

Элемент $z \in S$ называется *минимальным*, если для каждого $x \in S$ либо z и x несравнимы, либо $z \prec x$. Пусть $z \in S$ и $A \subset S$.

[4] В случае когда фазовое пространство некомпактно, в определении минимального множества условие компактности заменяется условием замкнутости. — *Примеч. ред.*

Мы говорим, что z является *нижней границей* A, если $z \prec x$ для каждого $x \in A$. Лемма Цорна утверждает, что если любое вполне упорядоченное подмножество A из S имеет нижнюю границу, то в S есть минимальный элемент.

Теорема 1.3. *Любое непустое компактное инвариантное множество содержит минимальное подмножество.*

Доказательство. Пусть Γ — непустое компактное f-инвариантное множество и $\mathcal{C}$ — семейство непустых компактных f-инвариантных подмножеств, содержащихся в Γ. Включение $\subset$ является отношением частичного порядка на $\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{A}$ — вполне упорядоченное подмножество в $\mathcal{C}$ и A — пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$. Тогда A является непустым компактным f-инвариантным множеством. Очевидно, что A будет нижней границей в $\mathcal{A}$. Согласно лемме Цорна в $\mathcal{C}$ есть минимальный элемент, и, таким образом, он представляет собой минимальное множество для f. $\square$

Следующая лемма утверждает, что точки минимального множества обладают сильной возвращаемостью.

Теорема 1.4. *Компактное инвариантное множество Λ минимально тогда и только тогда, когда орбита любой точки $x \in \Lambda$ плотна в Λ.*

Доказательство. Пусть Λ — минимальное множество. Для любой точки $x \in \Lambda$ множество $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$ непусто, компактно и инвариантно, и поэтому в силу минимальности $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = \Lambda$. Обратно: предположим (от противного), что Λ не является минимальным множеством, т.е. существует собственное подмножество $\Lambda_1 \subset \Lambda$, которое непусто, компактно и инвариантно. Тогда для любой точки $x \in \Lambda_1$ будем иметь $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$. Противоречие доказывает наше утверждение. $\square$

Напомним, что подмножество $\Lambda \subset X$ называется *нигде не плотным* в X, если его замыкание не содержит внутренних точек. Например, интервал нигде не плотен на плоскости.

Теорема 1.5. *Если пространство X связно, то любое минимальное множество либо совпадает с X, либо нигде не плотно в X.*

Доказательство. Пусть Λ — минимальное множество для f. Отметим, что граница $\partial\Lambda$ компактна и инвариантна. Если $\partial\Lambda = \varnothing$, то $\Lambda = \mathrm{int}(\Lambda)$ и, значит, Λ — открытое множество. Таким образом, Λ является одновременно открытым и замкнутым множеством, следовательно (в силу связности) совпадает с X. Если же $\partial\Lambda \neq \varnothing$, то $\partial\Lambda$ — непустое, компактное и инвариантное множество и, в силу минимальности, $\partial\Lambda = \Lambda$. Таким образом, в данном случае множество Λ не имеет внутренних точек и поэтому нигде не плотно в X. $\square$

Компактное инвариантное множество Λ называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух (непустых) компактных инвариантных множеств. Ясно, что минимальное множество неразложимо. Более общее свойство, которое гарантирует неразложимость — это топологическая транзитивность. Компактное инвариантное множество $\Lambda \in X$ называется *топологически транзитивным* или просто *транзитивным* если существует точка $x \in \Lambda$ такая, что $\omega(x) = \Lambda$. Очевидно, что транзитивное множество неразложимо.

Теорема 1.6 (*Биркгоф*). *Пусть Λ — компактное f-инвариантное множество. Следующие условия эквивалентны*:

(1) Λ — *транзитивное множество*;

(2) *для любых двух открытых*[5] *подмножеств U и V из Λ существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$*;

(3) *существует точка $x \in \Lambda$, положительная орбита которой плотна в Λ.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказывается очень просто, и доказательство мы опускаем. Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Возьмем счетную базу $V_1, V_2, \ldots$ в Λ[6]. Для любого $i \geqslant 1$ множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} V_i$ открыто в Λ. Кроме того, оно плотно в Λ, поскольку для любого открытого множества U в Λ существует,

---

[5] В индуцированной топологии подпространства Λ. — *Примеч. ред.*

[6] Счетная база существует в силу компактности Λ. Из компактности также следует полнота, которая далее в доказательстве используется при применении теоремы Бэра. В книге Катка и Хасселблата (Katok, Hasselblatt, 1995) эквивалентность условий (2) и (3) доказана для более общего случая — для непрерывных отображений сепарабельного локально компактного метрического пространства. — *Примеч. ред.*

в силу условия (2), $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(U) \cap V_i \neq \varnothing$. Поэтому $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \varnothing$. По теореме Бэра множество

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} V_i$$

плотно в Λ. Для любой точки $x \in B$ и любого $i \geqslant 1$ существует $n \geqslant 1$ такое, что $x \in f^{-n}V_i$, т.е. $f^n x \in V_i$. Это означает, что орбита $\mathrm{Orb}^+(x)$ плотна в Λ. Таким образом, импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказана.

Теперь докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Возьмем точку $x \in \Lambda$ такую, что $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. Тогда $f^{-1}(x) \in \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. Если $f^{-1}(x) \in \in \mathrm{Orb}^+(x)$, то x — периодическая точка и как следствие $\Lambda = \omega(x)$. Если $f^{-1}(x) \notin \mathrm{Orb}^+(x)$, то $f^{-1}(x) \in \omega(x)$. Отсюда $\mathrm{Orb}^+(x) \subset \omega(x)$. Тогда $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \subset \omega(x)$. Но Λ содержит x и следовательно, содержит $\omega(x)$. Поэтому $\Lambda = \omega(x)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. В условии (3) вместо положительной орбиты можно указать отрицательную. Иногда условие (3) ошибочно формулируют в виде «существует точка $x \in \Lambda$, орбита которой плотна в Λ», или просто: «есть плотная орбита», т.е. без указания «положительная» (или «отрицательная»). Рассмотрим контрпример: пусть Λ состоит из двух неподвижных точек и бесконечной (в обоих направлениях) орбиты O, которая их соединяет. Тогда в множестве Λ есть плотная орбита O, но Λ не является транзитивным. Таким образом, слово «положительная» (или «отрицательная») перед словом «орбита» необходимо.

Естественно попытаться разложить компактное инвариантное множество на попарно не пересекающиеся неразложимые компактные инвариантные подмножества (их количество может быть бесконечным). Следующее отношение эквивалентности позволит нам сделать это в случае цепно-рекуррентного множества $\mathrm{CR}(f)$.

Две точки $x, y \in \mathrm{CR}(f)$ будем называть *цепно-эквивалентными* и записывать $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепь из x в y и ε-цепь из y в x. Введенное отношение является отношением эквивалентности на $\mathrm{CR}(f)$, и каждый класс эквивалентности называется *цепно-транзитивным классом* или