СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Надежность работы механических систем предлагается рассмотреть на примере надежности работы машин. В методических указаниях изложен общий подход к оценке надежности работы машинных систем, комплексов, комплектов и отдельных машин. В указаниях определены комплексные показатели надежности: коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности, коэффициент технического использования и коэффициент сохранения эффективности. Для оценки надежности транспортно-технологического процесса предложено понятие надежности, как вероятности достижения комплексом машин и механизмов конечной цели при производстве строительно-монтажных работ. Одним из основных факторов надежности работы строительных машин является коэффициент использования их по времени. Во всех нормативных документах приводятся устаревшие (25-летней давности) данные по коэффициентам использования машин в течение рабочего времени, которые требуют обновления, так как машины постоянно совершенствуются. Для оценки надежности работы строительных машин создана база данных на основе результатов натурных испытаний гидротранспортных систем, комплектов и машин (кранов, экскаваторов, машин и трубоукладчиков). Для обоснования базы данных по результатам натурных испытаний проводились два этапа проверки: логическая и математическая. После формирования выборки в соответствии с ГОСТ Р 8.736-2011 проверялась ее принадлежность закону нормального распределения с помощью критерия согласия Пирсона. Далее рассчитывались надежность и риск завершения запланированного объема работ машинными системами, комплексами, комплектами и отдельными машинами в планируемый промежуток времени.

1 ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Исходные данные по вариантам приведены в приложении. Пример заполнения исходных данных по конкретному варианту студента приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Вариант 0

Месяц	Календарный фонд времени, ч	Время работы, ч	Технологические перерывы, ч	Простои, ч
Месяц	$T_ф$	$T_р$	$T_{тп}$	$T_п$
1	720	545	96	79
2	672	448	123	101
3	744	586	87	71
4	720	523	108	88
5	744	547	109	89
6	720	508	117	95
7	744	550	107	88
8	744	581	90	74
9	720	516	112	92
10	744	546	109	89
11	720	528	106	86
12	744	539	113	92
13	720	514	113	93
14	672	483	104	85
15	744	551	106	87
16	720	514	113	93
17	744	555	104	85
18	720	593	70	57
19	744	569	96	79
20	744	539	113	92
21	720	547	95	78
22	744	495	137	112
23	720	522	109	89
24	744	574	93	76

1.1 Вопросы для самоконтроля

1. Что такое календарный фонд времени работы машин.
2. В чем измеряется календарный фонд времени работы машин.
3. Как определяется время работы машины за месяц.
4. Случайная величина. Какие показатели в строительстве являются случайными величинами.

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ СИСТЕМ, КОМПЛЕКТОВ И ОТДЕЛЬНЫХ МАШИН

В соответствии с ГОСТ 27.002-89 основными показателями надежности машин являются:

1. Показатель надежности – количественная характеристика одного или нескольких свойств, составляющих надежность системы.
2. Единичный показатель надежности – показатель надежности, характеризующий одно из свойств, составляющих надежность системы.
3. Комплексный показатель надежности – показатель надежности, характеризующий несколько свойств, составляющих надежность системы.
4. Расчетный показатель надежности – показатель надежности, значения которого определяются расчетным методом.
5. Экспериментальный показатель надежности – показатель надежности, точечная или интервальная оценка которого определяется по данным испытаний.
6. Эксплуатационный показатель надежности – показатель надежности, точечная или интервальная оценка которого определяется по данным эксплуатации.
7. Экстраполированный показатель надежности – показатель надежности, точечная или интервальная оценка которого определяется на основании результатов расчетов, испытаний и (или) эксплуатационных данных путем экстраполирования на другую продолжительность эксплуатации и другие условия эксплуатации.

При анализе работы строительных машин рассмотрены только основные комплексные показатели надежности: коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности, коэффициент технического использования, коэффициент сохранения эффективности. При этом для приведенных коэффициентов, на наш взгляд, целесообразно провести логическую и математическую обработку статистической информации [1, 2].

Под коэффициентом готовности **($K_г$)** понимается вероятность того, что машина окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение машины по назначению не предусматривается.

Коэффициент готовности представляет собой отношение времени исправной работы к сумме времен исправной работы и вынужденных простоев объекта, взятых за один и тот же календарный срок.

Коэффициент готовности определяется по формуле

$$K_г = \frac{T_р}{T_р + T_п}, \tag{2.1}$$

где $T_р$ – суммарное время исправной работы объекта; $T_п$ – суммарное время вынужденного простоя.

Для перехода к вероятностной трактовке величины $T_р$ и $T_п$ заменяются математическими ожиданиями времени между соседними отказами и времени восстановления соответственно

$$K_г = \frac{T_н}{T_н + T_в}, \qquad (2.2)$$

где $T_н$ - средняя наработка на отказ;

$T_в$ - среднее время восстановления.

Коэффициент оперативной готовности **($K_{ог}$)** показывает вероятность того, что машина окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение машины по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени.

Коэффициент оперативной готовности характеризует надежность машины, необходимость применения которой возникает в произвольный момент времени, после которого требуется безотказная работа машины в течение заданного интервала времени. Значение коэффициента оперативной готовности $K_{ог}$ определяется по формуле

$$K_{ог} = K_г \, P, \qquad (2.3)$$

где $K_г$ – коэффициент готовности;

P – вероятность безотказной работы машины в течение заданного интервала времени.

Значения коэффициента оперативной готовности используются при выполнении работ по оценке эффективности системы, а также при оценке расчетных значений надежности по полученным из эксплуатации результатам работы системы.

Коэффициент технического использования **($K_{ти}$)** характеризует отношение математического ожидания суммарного времени пребывания машины в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания машины в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период.

Коэффициент технического использования обычно оценивается за длительный период эксплуатации (от начала эксплуатации до капитального ремонта, между капитальными ремонтами, за весь период эксплуатации):

$$K_{ти} = \frac{T_р}{T_р + T_{рем}}, \qquad (2.4)$$

где $T_р$ – суммарное время пребывания системы в работоспособном состоянии за некоторый длительный период эксплуатации;

$T_{рем}$ – суммарное время ремонтов и технического обслуживания за этот же период эксплуатации.

Коэффициент технического использования можно рассматривать как вероятность того, что в данный, произвольно взятый момент времени, объект работоспособен, а не находится в ремонте.

Авторами предлагается формула для расчета коэффициента технического использования

$$K_{\text{ти}} = \frac{K_{\text{в}}}{K_{\text{г}}}, \tag{2.5}$$

где $K_{\text{в}}$ – коэффициент использования по времени;

$K_{\text{г}}$ – коэффициент готовности.

Авторами предлагается формула для расчета коэффициента эффективности

$$K_{\text{э}} = \frac{K_{\text{в}}}{K_{\text{в}}^{\max}}, \tag{2.6}$$

где $K_{\text{в}}$ – коэффициент использования по времени;

$K_{\text{в}}^{\max}$ – максимальное значение коэффициент использования по времени за расчетный интервал времени (за месяц).

Коэффициент сохранения эффективности (**$K_{\text{сэ}}$**) – отношение значения показателя эффективности использования машины по назначению за определенную продолжительность эксплуатации к номинальному значению этого показателя, вычисленному при условии, что отказы машины в течение того же периода не возникают.

Коэффициент сохранения эффективности вычисляется по формуле

$$K_{\text{сэ}} = \frac{1}{\text{Э}_{\text{н}}} \sum_{i=1}^{n} \text{Э}_i P_i, \tag{2.7}$$

где Э_i – эффективность объекта в i-м работоспособном состоянии;

P_i – вероятность пребывания объекта в i-м работоспособном состоянии;

$\text{Э}_{\text{н}} = \max(\text{Э}_i)$ – номинальное значение показателя эффективности объекта, определенное при условии отсутствия отказов;

n – количество работоспособных состояний объекта.

Коэффициент сохранения эффективности, вычисленный по формуле (7), показывает отклонение расчетных параметров за конкретный промежуток времени от номинального значения.

По мнению авторов коэффициент сохранения эффективности системы можно выразить формулой

$$K_{\text{сэ}} = \frac{1}{nK_{\text{в}}^{\max}} \sum_{i=1}^{n} K_{\text{в}}, \tag{2.8}$$

где $K_{\text{в}}$ – коэффициент использования по времени по месяцам;

n – количество рассматриваемых месяцев;

$K_{\text{в}}^{\max}$ – максимальное значение коэффициент использования по времени.

Коэффициент сохранения эффективности работы машин за первый год равен ($K_{\text{сэ}} = \frac{1}{12 \cdot 0{,}787} 8{,}806 = 0{,}9324$) 93,24 %.

Коэффициент сохранения эффективности работы машин за второй год равен ($K_{\text{сэ}} = \frac{1}{12 \cdot 0{,}823} 8{,}865 = 0{,}8976$) 89,76 %.

Коэффициент сохранения эффективности системы можно вычислять по формуле

$$K_{сэ} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{э}\,, \tag{2.9}$$

где $K_э$ – коэффициент эффективности;

n – количество рассматриваемых месяцев.

Коэффициент сохранения эффективности, вычисленный по формуле (2.9) показывает эффективность использования системы за конкретный промежуток времени.

Следуя приведенной логике, ориентировочную оценку времени наработки на отказ можно также определить по формуле

$$T_{н} = T_{ф} K_{ти}\,, \tag{2.10}$$

где $T_ф$ – календарный фонд рабочего времени;

$K_{ти}$ – коэффициент технического использования.

Предложенные для оценки надежности систем, комплектов и отдельных машин комплексные показатели надежности не дают полной информации о работе строительных машин на конкретных объектах, так как они не учитывают технологию и организацию строительства в конкретных производственных условиях. На наш взгляд, целесообразно дополнить рассматриваемые комплексные показатели надежности показателем организационно-технологической надежности.

Задача 1. Для анализа работы машин на основе таблицы 1.1 следует создать база данных, в которую включена следующая техническая информация (таблицы 2.1).

Таблица 2.1 – Технические показатели работы машин

Месяц	Календарный фонд времени, ч	Время работы, ч	Технологические перерывы, ч	Простои, час	Коэффициент использования по времени	Коэффициент готовности	Коэффициент технического использования	Коэффициент эффективности	Время наработки на отказ
Месяц	$T_ф$	$T_р$	$Т_{тп}$	$T_п$	$K_в$	$K_г$	$K_{ти}$	$K_э$	$T_н$
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Для исходных данных, приведенных в таблице 1.1 основные показатели работы машин показаны в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Показатели работы машин

Месяц	Календарный фонд времени, ч	Время работы, ч	Технологические перерывы, ч	Простои, ч	Коэффициент использования по времени	Коэффициент готовности	Коэффициент технического использования	Коэффициент эффективности	Время наработки на отказ, ч
Месяц	$T_ф$	$T_р$	$Т_{тп}$	$T_п$	$K_в$	$K_г$	$K_{ти}$	$K_э$	$T_н$
1	720,0	545,0	96,0	79,0	0,7569	0,8734	0,8667	0,9611	624,0
2	672,0	448,0	123,0	101,0	0,6667	0,8160	0,8170	0,8465	549,0
3	744,0	586,0	87,0	71,0	0,7876	0,8919	0,8831	1,0000	657,0
4	720,0	523,0	108,0	88,0	0,7264	0,8560	0,8486	0,9223	611,0
5	744,0	547,0	109,0	89,0	0,7352	0,8601	0,8548	0,9335	636,0
6	720,0	508,0	117,0	95,0	0,7056	0,8425	0,8375	0,8958	603,0
7	744,0	550,0	107,0	88,0	0,7392	0,8621	0,8575	0,9386	638,0
8	744,0	581,0	90,0	74,0	0,7809	0,8870	0,8804	0,9915	655,0
9	720,0	516,0	112,0	92,0	0,7167	0,8487	0,8444	0,9099	608,0
10	744,0	546,0	109,0	89,0	0,7339	0,8598	0,8535	0,9318	635,0
11	720,0	528,0	106,0	86,0	0,7333	0,8599	0,8528	0,9311	614,0
12	744,0	539,0	113,0	92,0	0,7245	0,8542	0,8481	0,9198	631,0
13	720,0	514,0	113,0	93,0	0,7139	0,8468	0,8431	0,8668	607,0
14	672,0	483,0	104,0	85,0	0,7188	0,8504	0,8452	0,8727	568,0
15	744,0	551,0	106,0	87,0	0,7406	0,8636	0,8575	0,8992	638,0
16	720,0	514,0	113,0	93,0	0,7139	0,8468	0,8431	0,8668	607,0
17	744,0	555,0	104,0	85,0	0,7460	0,8672	0,8602	0,9057	640,0
18	720,0	593,0	70,0	57,0	0,8236	0,9123	0,9028	1,0000	650,0
19	744,0	569,0	96,0	79,0	0,7648	0,8781	0,8710	0,9286	648,0
20	744,0	539,0	113,0	92,0	0,7245	0,8542	0,8481	0,8796	631,0
21	720,0	547,0	95,0	78,0	0,7597	0,8752	0,8681	0,9224	625,0
22	744,0	495,0	137,0	112,0	0,6653	0,8155	0,8159	0,8078	607,0
23	720,0	522,0	109,0	89,0	0,7250	0,8543	0,8486	0,8803	611,0
24	744,0	574,0	93,0	76,0	0,7715	0,8831	0,8737	0,9367	650,0

Сумма бесконечного числа случайных величин (производительности машин, коэффициента использования по времени и других показателей работы машин), распределенных по любым законам, в итоге приобретает нормальный закон распределения. В пределе все законы стремятся к нормальным законам распределения.

Кривая нормального распределения выражается следующим уравнением

$$\rho_{П_C} = \frac{1}{\sigma_C^П \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(П_C - \overline{П_C})^2}{2\sigma_C^{П2}}}, \qquad (2.11)$$

где $\rho_{П_C}$ – плотность распределения вероятности производительности системы;

$П_C$ – значение производительности системы;

$\overline{П_C}$ – средняя арифметическая ряда;

$\sigma_C^{П}$ – среднее квадратическое отклонение производительности системы;

π – постоянное число (отношение длины окружности к длине её диаметра;

е – основание натурального логарифма.

Известно, что если площадь, ограниченную кривой нормального распределения принять за 1 или 100 %, то можно рассчитать площадь, заключенную между кривой и любыми двумя ординатами. Воспользовавшись формулой 2.11, можно рассчитать организационно-технологический риск (в процентах) не достижения машиной производительности $П_т$ по следующей формуле

$$P = \frac{100}{\sigma_C^{П}\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{П_T} e^{-\frac{(П_C - \overline{П_C})^2}{2\sigma_C^{П2}}} dП_C, \qquad (2.12)$$

Тогда организационно-технологическая надёжность достижения машиной производительности $П_т$ в процентах рассчитывается по формуле

$$H = 100 - P. \qquad (2.13)$$

Под организационно-технологической надежностью понимается способность технологических, организационных, управленческих экономических решений обеспечивать достижение заданного результата строительного производства в условиях случайных возмущений, присущих строительству как сложной вероятностной системе. В основу разработки принципа надежности в первую очередь должен быть заложен вероятностно-статистический подход. При этом методы математической теории надежности практически неприемлемы, так как, формальное применение классической теории к реальной строительной системе дает практически нулевую надежность. Выход из данной ситуации возможен лишь при детальном изучении специфики систем строительного производства, многообразных, многочисленных организационно-технологических сбоев, дестабилизирующих производство факторов, а также принципов взаимодействия этих факторов с имеющимися сбоями [3].

Авторами предлагается вероятность безотказной работы определять по формуле

$$P = 1 - \frac{1}{\sigma_н\sqrt{2\pi}} \int_0^{T_0+T_1} e^{-\frac{(T_н - \overline{T_н})^2}{2\sigma_н{}^2}} dT_н, \qquad (2.14)$$

где $T_н$ – время наработки на отказ;

$\overline{T_н}$ – среднее время наработки на отказ;

$\sigma_н$ – среднее квадратическое отклонение времени наработки на отказ;

T_0 – время с начала наработки на отказ;

T_1 – планируемый период времени безотказной работы системы.

На рисунке 2.1 (построенному с помощью формулы 2.10) показана надежность работы машины на отказ, полученная по результатам обработки натурных испытаний работы последнего.

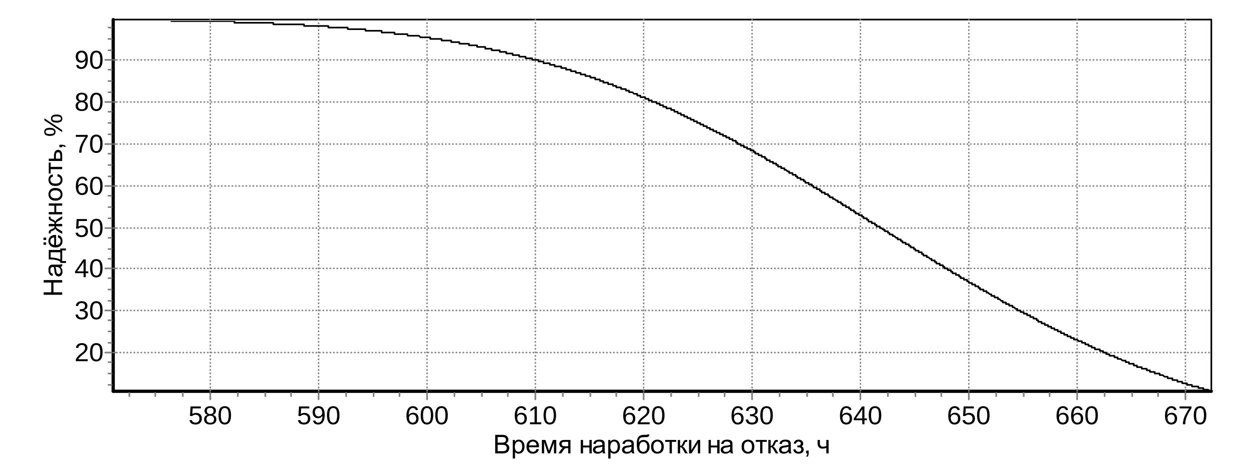

Рисунок 2.1 – Надежность работы машины

По зависимости (рисунок 2.1) можно оценить надежность работы машины в заданном диапазоне от T_0 до T_0 + T_1. Например, при T_0 = 110 ч и T_1 = 500 ч надежность работы машины равна приблизительно 90 %.

2.1 Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные показатели надежности работы машин.
2. Комплексный показатель надежности.
3. Коэффициент готовности.
4. Коэффициент оперативной готовности.
5. Коэффициент технического использования.
6. Коэффициент сохранения эффективности.
7. Время наработки на отказ.
8. Риск безотказной работы.
9. Показатель организационно-технологической надежности.
10. Экспериментальный показатель надежности.
11. Эксплуатационный показатель надежности.
12. Расчетный показатель надежности.

3 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное возможное значение, неизвестное заранее, но обязательно одно. Если увеличим число испытаний, то увеличится число отрезков и в пределе ломаная кривая перейдет в плавную кривую. Кривая распределения, выражающая общую закономерность данного типа распределения, называется *теоретической кривой распределения*. Аналитическая зависимость или формула, описывающая распределение плотностей в генеральной совокупности, называется *законом распределения*.

Основные законы:

1. Нормальный
2. Равномерный
3. Логарифмический нормальный
4. Закон Пуассона
5. Закон Вейбулла
6. Экспоненциальный
7. Закон Ерланга
8. Биномиальный

Задача определения какому закону соответствует эмпирическое распределение, называется *проверкой гипотезы согласия эмпирического распределения с теоретическим законом*.

3.1 Нормальный закон распределения

Плотность вероятности нормально распределённой случайной величины *X* выражается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.1}$$

где y – ордината кривой распределения;

x – значение изучаемого признака;

$\bar{x}$ – средняя арифметическая ряда;

σ – среднее квадратическое отклонение изучаемого признака;

π – постоянное число (отношение длины окружности к длине её диаметра;

e – основание натурального логарифма.

Кривая распределения изображена на рисунке 3.1. Она симметрична относительно точки $x = a$ (точка максимума). При уменьшении σ ордината точки максимума неограниченно возрастает, при этом кривая пропорционально сплющивается вдоль оси абсцисс, так что площадь под её графиком остаётся равной единицы (рисунок 3.1).

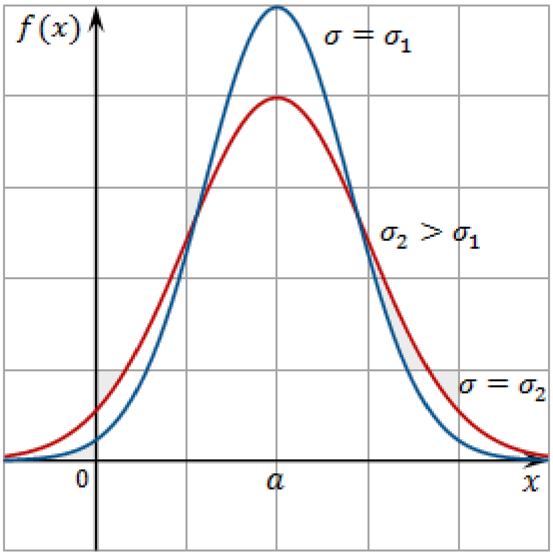

Рисунок 3.1 – Закон нормального распределения

Нормальный закон распределения широко применяется в задачах практики. Объяснить причины этого впервые удалось А.М. Ляпунову. Он показал, что если случайная величина может рассматриваться как сумма большого числа малых слагаемых, то при достаточно общих условиях закон распределения этой случайной величины близок к нормальному независимо от того, каковы законы распределения отдельных слагаемых. А так как практически случайные величины в большинстве случаев бывают результатом действия множества причин, то нормальный закон оказывается наиболее распространённым законом распределения. Укажем числовые характеристики нормально распределённой случайной величины (математическое ожидание и дисперсия):

$$M(x) = a, \tag{3.2}$$

$$D(x) = \sigma^2. \tag{3.3}$$

Таким образом, параметры a и σ в выражении (3.1) нормального закона распределения представляют собой математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины. Принимая это во внимание, формулу (3.1) можно представить следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(x)}} e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2D(x)}}, \tag{3.4}$$

Эта формула показывает, что нормальный закон распределения полностью определяется математическим ожидание и дисперсией случайной величины. Таким образом, математическое ожидание и дисперсия полностью характеризуют нормально распределённую случайную величину. Разумеется, что в общем случае, когда характер закона распределения неизвестен, знание математического ожидания и дисперсии недостаточно для определения этого закона распределения.

3.2 Равномерный закон распределения

Случайная величина X называется распределённой равномерно на отрезке $[a;b]$, если её плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} c & \text{при } x\in(a,b) \\ 0 & \text{при } x\notin(a,b) \end{cases}, \tag{3.5}$$

Из условия нормировки определим значение константы c. Площадь под кривой плотности распределения должна быть равна единице, но в нашем случае — это площадь прямоугольника с основанием (b - α) и высотой c (рисунок 3.2).

Отсюда находим значение постоянной c:

$$(b-a)\cdot c=1, \tag{3.6}$$

$$c=\frac{1}{b-a}, \tag{3.7}$$

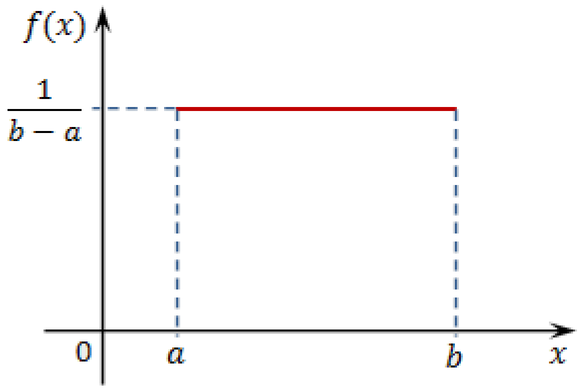

Рисунок 3.2 – Плотность равномерного распределения

Итак, плотность равномерно распределенной случайной величины равна

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x\in(a,b) \\ 0 & \text{при } x\notin(a,b) \end{cases}, \tag{3.8}$$

Найдем теперь функцию распределения по формуле:

1) для $x\le a$ $f(x)=0$ и $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0$

2) для $a<x<b$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dx+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}$

3) для $x\ge b$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int\limits_{a}^{b} f(x)dx+\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=0+1+0=1$

Таким образом

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x \le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x < b\\ 1 \text{ при } x \ge b\end{cases}, \qquad (3.9)$$

Функция распределения непрерывна и не убывает (рисунок 3.3).

Найдем *математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины* по формуле:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{x} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx+\int_{a}^{b} x\cdot 0dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{a+b}{2}. \qquad (3.10)$$

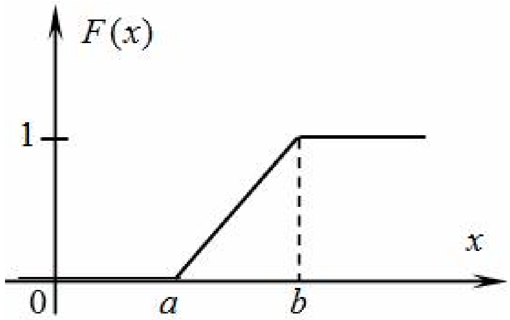

Рисунок 3.2 – Функция распределения равномерно распределенной случайной величины

Дисперсия равномерного распределения рассчитывается по формуле

$$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}, \qquad (3.11)$$

Функция плотности равномерного распределения: $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$

Математическое ожидание: $M(x)=\dfrac{a+b}{2}$

Дисперсия: $D(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Вероятность попадания случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $\lfloor a,b \rfloor$, на участке (α,β), представляющий собой часть отрезка $\lfloor a,b \rfloor$ равна

$$P\{\alpha < x < \beta\}=\int_a^b\frac{dx}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}, \qquad (3.12)$$

Графически вероятность $P\{\alpha < x < \beta\}$ представляется в виде площади заштрихованного прямоугольника на рисунке 3.4.

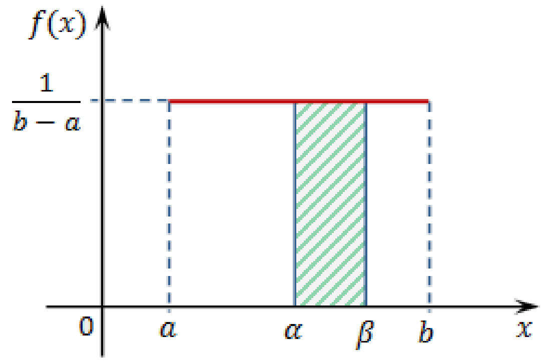

Рисунок 3.4 – Вероятность $P\{\alpha < x < \beta\}$

3.3 Логарифмически нормальный закон распределения

Говорят, что случайная величина y имеет логарифмически нормальное распределение (сокращённо логнормальное распределение), если её логарифм $\ln(y) = x$ распределён нормально, то есть если

$$y = e^{x}, \tag{3.13}$$

где величина y имеет нормальное распределение с параметрами a, σ.

Плотность логнормального распределения задаётся формулой

Плотность логнормального распределения задаётся формулой

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(y)-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad y > 0, \tag{3.14}$$

Математическое ожидание и дисперсию логнормального распределения определяют по формулам

$$M(y) = e^{\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)}, \tag{3.15}$$

$$D(y) = e^{2(2\sigma^2+a)^2-a^2} - e^{2a+\sigma^2}, \tag{3.16}$$

Кривая этого распределения изображена на рисунке 3.5.

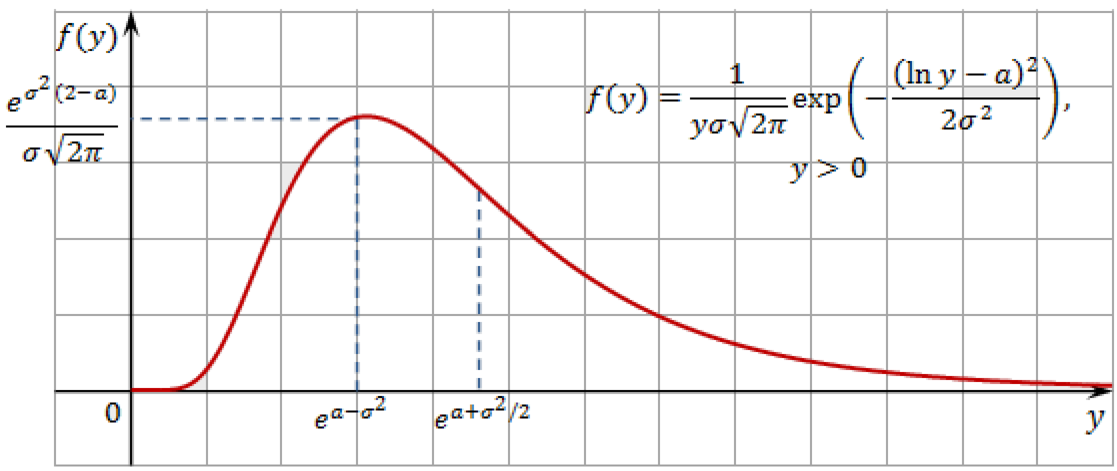

Рисунок 3.5 – Плотность логарифмически нормального распределения

Логарифмически нормальное распределение встречается в ряде технических задач. Оно даёт распределение размеров частиц при дроблении, содержаний элементов в минералах в изверженных горных пародах, численности рыб в море и т.д.

3.4 Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона, если вероятности ее возможных значений

$$P_k = P(x=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, ..., \mathrm{n}, \tag{3.17}$$

вычисляется по формуле Пуассона, где $a=np<10$. Как правило, Пуассоновское распределение (рисунок 3.6) касается вероятности появления благоприятного события в большом количестве экспериментов, если в одном - вероятность успешного завершения стремится к нулю.

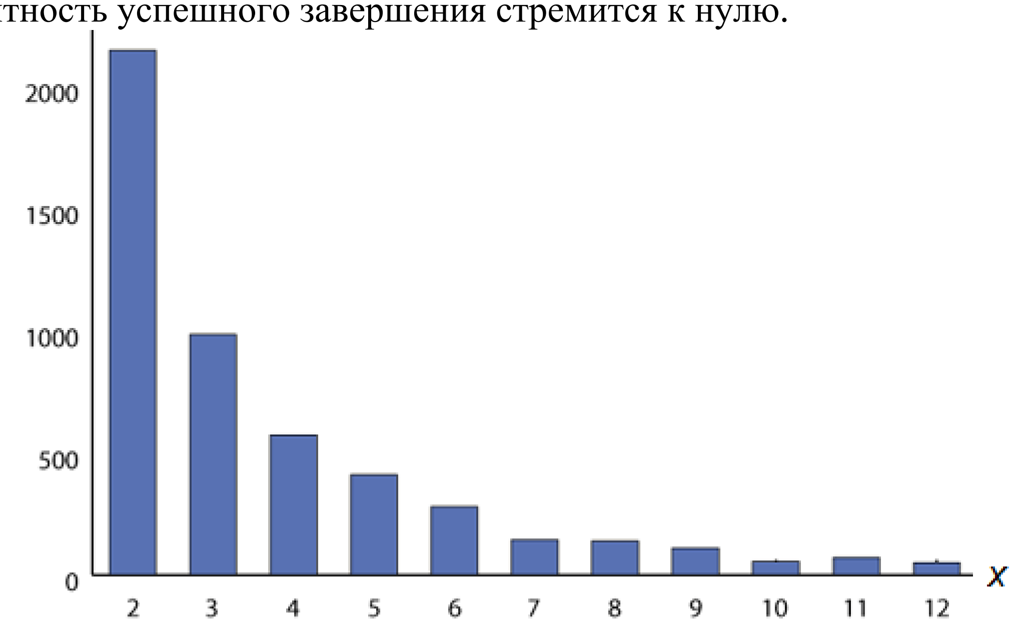

Рисунок 3.6 – Плотность распределения Пуассона

В табличной форме этот закон распределения имеет вид (таблица 3.1)

Таблица 3.1 – Закон распределения Пуассона

X=k	0	1	2	3	…	n
$P(x=k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{1}{2!}a^2e^{-a}$	$\frac{1}{3!}a^3e^{-a}$		$\frac{1}{n!}a^ne^{-a}$

Условие нормировки для пуассоновского закона распределения запишется следующим образом

$$\sum P_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}e^{a} = e^0 = 1. \tag{3.18}$$

Построим образующую функцию вероятностей для приведенного закона

$$A(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k p_k=\sum_{k=0}^{n}x^k\frac{a^k}{k!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{(ax)^k}{k!}=e^{-a}e^{ax}=e^{a(x-1)}. \quad (3.19)$$

Она принимает достаточно простой компактный вид

$$A(x)=e^{a(x-1)}. \quad (3.20)$$

Воспользовавшись зависимостями для определения математического ожидания $M(x)$ и дисперсии $D(x)$ через производные от образующей функции в единице, получим их простые зависимости

1. Математическое ожидание определяется по формуле

$$M(x)=A'(1)=(e^{a(x-1)})'_{x=1}=(ae^{a(x-1)})_{x=1}=a. \quad (3.21)$$

$$M(x)=a=np. \quad (3.22)$$

2. Имея вторую производную от образующей функции в единице

$$A''(1)=(ae^{a(x-1)})'_{x=1}=(a^2e^{a(x-1)})_{x=1}=a^2. \quad (3.23)$$

находят дисперсию

$$D(x)=A''(1)+A'(1)-(A'(1))^2=a^2+a-a^2=a. \quad (3.24)$$

$$D(x)=a. \quad (3.25)$$

Среднее квадратическое отклонение вычисляем как квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(x)=\sqrt{a}. \quad (3.26)$$

Следовательно, для пуассоновского закона распределения вероятностей математическое ожидание и дисперсия равны произведению количества опытов на вероятность благоприятной события

$$M(x)=D(x)=a. \quad (3.27)$$

На практике, если математическое ожидание и дисперсия близкие по значению, то принимают гипотезу, что исследуемая величина имеет закон распределения Пуассона.

3. Асимметрия и эксцесс для пуассоновского закона также равны и вычисляются по формулам

$$A(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (3.28)$$

$$E(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (3.29)$$

3.5 Гамма-распределение

Говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с параметрами $a>0$ и $b>0$, если её плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{ba}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}, & x>0\end{cases}, \tag{3.30}$$

где $\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция Эйлера.

На рисунке 3.7 показаны кривые распределения вероятностей при значениях параметра $a>1$ и $a<1$ (при $a=1$ получаем экспоненциальное распределение).

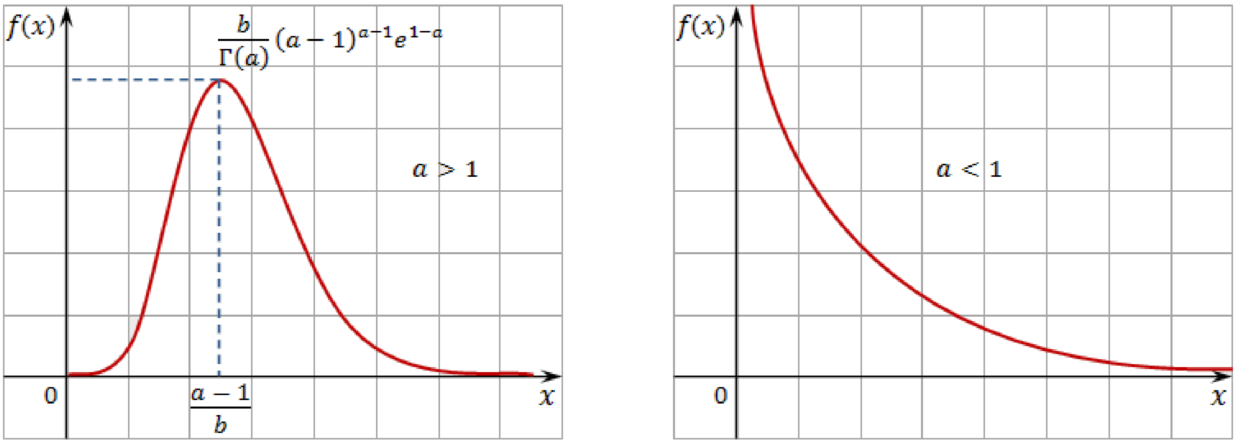

Рисунок 3.7 – Плотность гамма-распределения

Математическое ожидание и дисперсия, подчинённые гамма-распределению, задаются формулами

$$M(x)=\frac{a}{b}, \tag{3.31}$$

$$D(x)=\frac{a}{b^2}. \tag{3.32}$$

Отметим, что при а > 1 гамма-распределение имеет моду

$$M_o=\frac{a-1}{b}, \tag{3.33}$$

(графически это означает, что кривая распределения имеет точку максимума $x=M_o$, рисунок 3.7).

3.6 Закон Вейбулла

Опыт эксплуатации очень многих электронных приборов и значительного количества электромеханической аппаратуры показывает, что для них характерны три вида зависимостей интенсивности отказов от времени (рисунок 3.8), соответствующих трем периодам жизни этих устройств.

Рисунок 3.8 – Зависимость интенсивности отказов от времени

Нетрудно увидеть, что этот рисунок соответствует закону Вейбулла. Указанные три вида зависимостей интенсивности отказов от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла. Согласно этому распределению плотность вероятности момента отказа

$$f(t) = \lambda\delta\, t^{\delta-1} e^{-(\lambda t^{\delta})}, \tag{3.34}$$

где δ – параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных, δ > 0); λ – параметр масштаба,

$$\lambda = \frac{1}{T_1}. \tag{3.35}$$

Интенсивность отказов определяется по выражению

$$\lambda(t) = \lambda\delta\, t^{\delta-1}. \tag{3.36}$$

Вероятность безотказной работы

$$P(t) = \int_0^t e^{\lambda(t)} dt = e^{-\lambda\, t^{\delta}}, \tag{3.37}$$

а средняя наработки до отказа

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t^{\delta}} dt. \tag{3.38}$$

Отметим, что при параметре δ = 1 распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, а при δ = 2 – в распределение Рэлея.

При δ < 1 интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), а при δ > 1 монотонно возрастает (период износа), см. рисунок 3.8. Следовательно, путем подбора параметра δ можно получить, на каждом из трех участков, такую теоретическую кривую λ(t), которая достаточно