ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА

1.1. Особенности компьютерного моделирования

Современное архитектурно-строительное проектирование трудно представить без использования компьютерных технологий. Компьютер и программное обеспечение к нему не только оказывают неоценимую помощь в работе инженера, но и позволяют рассматривать задачи, решение которых ранее не представлялось возможным.

Расчетные задачи, встречающиеся при проектировании несущих строительных конструкций, можно условно разделить на два класса [16]:

1) задачи строительной механики по определению напряженно-деформированного состояния конструкций при действии нагрузок и воздействий;

2) задачи по определению параметров конструктивных решений в соответствии с указаниями используемых норм проектирования.

Современное развитие вычислительных средств позволяет с той или иной степенью достоверности смоделировать весь жизненный цикл сооружения, включая моделирование [13]:

- процесса нагружения;
- процесса возведения;
- процессов приспособляемости.

Основные этапы компьютерного расчета

Компьютерный расчет здания включает следующие этапы:

1) постановку задачи — определение необходимых результатов расчета и требуемых исходных данных для решения задачи;
2) выбор программного обеспечения для реализации поставленной задачи;
3) формирование расчетных моделей в зависимости от видов расчетных ситуаций;
4) проверку моделей и получаемых результатов;
5) ЦИКЛ — проведение расчетов, анализ результатов, внесение корректировок в расчетную модель с последующим перерасчетом;
6) оформление отчета на основании окончательных принятых конструктивных решений и соответствующих им расчетных моделей.

В процессе расчета инженеру приходится переходить от реальной конструкции к идеализированной расчетной схеме, которая отражает фактическую работу конструкции только *с определенной долей приближения.*

Конструктивная система здания — это описание взаимодействия фактических (реальных) несущих конструкций (элементов) между собой. При «описании» конструктивной системы существует множество пограничных состояний, осложняющих описание системы и принятие конструктивных решений.

Расчетная схема в строительной механике — это упрощенная модель конструктивной системы здания, используемая при проведении расчетов. Расчетную схему, описанную средствами выбранного программного обеспечения, будем называть **компьютерной моделью**[1].

Расчетные схемы, которые применяются в конечно-элементных программных комплексах, могут быть произвольными, и решения по их выбору принимаются пользователями комплексов. Проблема выбора адекватной расчетной схемы сооружения является одной из самых основных и сложных проблем, возникающих при расчете конструкций.

При переходе от расчетной схемы к компьютерной модели также используется ряд упрощающих гипотез, позволяющих представить работу конструкции через небольшое число расчетных параметров, например: гипотеза плоских сечений, гипотеза сплошности (неразрывности) материала, гипотеза однородности и т. п. [11, 13].

Основные отличия расчетной схемы от конструктивной системы здания

1. Конструктивная система является более общей по отношению к расчетной схеме. Для одной конструктивной системы может существовать несколько расчетных схем, каждая из которых описы-

[1] Используемая терминология по-разному трактуется разными специалистами. В данном курсе используются термины, приведенные в более узкой формулировке, необходимой для понимания изложенного материала.

вает определенную расчетную ситуацию, состоящую из различных сочетаний элементов конструкций, краевых условий, свойств материала, внутренних и внешних воздействий.

2. Расчетная модель описывает расчетную ситуацию с использованием строгих математических и физических методов и алгоритмов.

3. Чаще всего основные элементы расчетной схемы, в отличие от конструктивной схемы, являются геометрически одномерными или двумерными (за исключением 3D-объемных элементов). Остальные характеристики (толщина, ширина, площадь поперечного сечения, моменты инерции и т. д.) задаются численно.

4. В расчетной схеме ненесущие элементы обычно учитываются только в виде нагрузок, также могут удаляться и те несущие элементы, работа которых не оказывает существенного влияния на результаты расчета данного элемента или модели в целом.

5. Идеализируются связи элементов между собой и связи, накладываемые на расчетную модель извне.

6. Применяются существенные упрощения при задании внешних воздействий.

7. Вводятся упрощающие предпосылки и накладываются дополнительные ограничения, касающиеся работы конструкций. Факторы, незначительно влияющие на напряженно-деформированное состояние системы, не учитываются.

8. В процессе работы с расчетной схемой необходимо структурировать все накладываемые ограничения (на схему) и учитывать их при разработке конструктивных решений на последующих этапах жизненного цикла здания.

В процессе моделирования решаются следующие задачи.

1. Выделение несущей части конструктивного решения.

При этом могут возникнуть следующие сложности:

• при разных режимах нагружения одни и те же элементы в одном случае могут не участвовать в работе системы, а в другом — оказывать существенное влияние на напряженно-деформированное состояние. Например, в каркасных зданиях жесткость кирпичного заполнения при расчете на статические воздействия можно не учитывать, а в расчетах на динамические воздействия она играет существенную роль;

• при изменении интенсивности нагрузки ненесущие элементы (например, перегородки, провисающие растяжки и т.д.) могут включаться в работу или, наоборот, выключаться из нее (разрушаемые связевые панели в сейсмостойких зданиях с гибким нижним этажом);

• при различных режимах функционирования сооружения (а также с учетом стадии изготовления конструкций, их перевозки, монтажа и т.д.) роль конструкции в сооружении и схема ее работы может меняться.

2. Идеализация геометрических характеристик объектов.

Рассматривается как переход на математическое описание идеальных геометрических элементов. При этом «идеализация» происходит на двух уровнях:

• первый уровень — за счет упрощения описания трехмерных тел и перехода на одномерные и двумерные, а также учитывая гипотезы теории упругости возможен переход от тензора напряжений в пространственной постановке к усилиям в сечениях элементов;

• второй уровень — отбрасывание геометрических деталей, не влияющих на работу несущей системы (например, фасок, скруглений и т.п.), идеализация объектов для придания им симметричности и регулярности (если это несущественно влияет на работу конструктивной схемы).

3. Идеализация материалов.

Чаще всего материал наделяется свойствами идеальной упругости или идеальной пластичности. Свойства материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона) задаются одинаковыми в пределах конструкции или ряда конструкций. Для стальных конструкций такой подход оправдан, так как изменчивость свойств стали невелика. Для бетона и тем более грунта такой подход не всегда оправдан[2].

В динамических расчетах часто используется осредненный логарифмический декремент затухания (что тоже не всегда оправдано, поскольку он различен для разных материалов и конструкций).

---

[2] Подобные проблемы можно решить при помощи учета физической и геометрической нелинейности материалов, однако следует учитывать, что нелинейная работа материала напрямую зависит от истории нагружения. Следует убедиться, что используемые диаграммы материалов пригодны для данной истории нагружения.

Идеализация конструктивного решения — замена более сложных конструкций каким-либо материалом с приведенными характеристиками (например, ввод ортотропных материалов для моделирования пустотных настилов).

4. Идеализация нагрузок.

Воздействие — это явление природного или техногенного происхождения, в результате которого изменяется напряженно-деформированное состояние несущих конструкций сооружения.

Нагрузка — это математическая модель воздействия, реализованная в расчетной схеме или компьютерной модели. Некоторые воздействия для удобства описываются несколькими нагружениями (см. п. 4.1).

Воздействия на сооружение обладают значительной изменчивостью и во многих случаях носят вероятностный характер или являются физическими абстракциями (главным образом динамические воздействия). Особенно сложным является моделирование поведения конструкции во времени при динамических воздействиях (например, учет взаимовлияния форм колебаний при сейсмических и ветровых воздействиях).

Таблица 1.1

Воздействия	Силовые	Кинематические
Внешние	Нагрузки	Заданные перемещения опор
Внутренние	Контролируемое предварительное напряжение	Температурные перемещения

Сложность моделирования воздействия заключается в том, что многие воздействия (в частности, ветровые или сейсмические) слабо поддаются изучению и носят вероятностный характер, обладают изменчивостью во времени (климатические воздействия) и требуют соответствующей статистической обработки.

От величины нагрузки зависит, с одной стороны, надежность строительных конструкций, а с другой — экономическая составляющая, при увеличении интенсивности воздействия увеличивается себестоимость конструктивных решений. Для стандартизации подходов решения данной проблемы и обеспечения минимального уровня надежности государство регламентирует применение нормативных значений нагрузок. Различная степень изученности тех или иных нагрузок, а также их вариативность нашли отражение в строительных нормах путем ввода коэффициентов надежности по нагрузке γ_f. Чем лучше изучена нагрузка и чем меньше ее вариативность, тем коэффициент меньше (например, для нагрузок от собственного веса $\gamma_f = 1{,}05$, или 1,1, а для ветровой нагрузки — 1,4).

В соответствии с принципом предельных состояний расчеты проводят на максимальные значения нагрузок. Но возможны случаи, когда наихудшими для конструкции являются какие-то промежуточные значения нагрузок (а для некоторых нагрузок даже минимальные значения или полное их отсутствие). Примером может служить балка с односторонними опорами, поставленными с зазором [13]. На рис. 1.1 показана реакция в средней опоре.

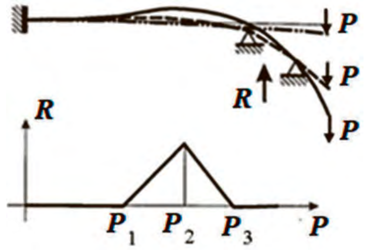


Рис. 1.1. Система с односторонними связями

5. Идеализация связей.

Распространяется на идеализацию законов взаимодействия элементов системы друг с другом. В природе не существует чисто жесткого закрепления или чистого шарнира. Решение об идеализации того или иного конструктивного узла принимает инженер.

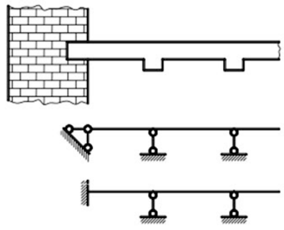


Рис. 1.2. Пример идеализации условий опирания балки на кирпичную стену

Часто идеализация проводится исходя не из кинематических условий сопряжения, а из силовых [13]. Например, шарнир в стальных фермах вводится исходя из гипотезы о малой роли изгибающих моментов при узловых нагружениях схемы.

Неопределенность в моделировании порождается:

• недоступностью исчерпывающих знаний об объекте моделирования и воздействиях на него (например, обо всех возможных режимах работы конструктивной системы, в первую очередь о нагрузках);

• неполнотой знаний об объекте моделирования (например, невозможно точно описать все свойства в каждой точке железобетонной конструкции, еще более сложным представляется описать работу здания в целом).

Кроме того, неопределенность также создают ошибки аппроксимации (намеренное или вынужденное упрощение математического описания, в частности, аппроксимирующих функций). Пример — применение сосредоточенных сил к пластинчатым элементам, которые не способны уравновесить сосредоточенные силы конечными значениями поперечных сил и приводят к несоответствующим действительности значениям поперечных сил.

Способы преодоления неопределенности:

• использование теории вероятностей, когда в основе принимаемого решения находится предыдущий объективный опыт;

• использование экспертных оценок (принятие решений на основе субъективного опыта эксперта);

• экстремальная оценка (решение принимается из числа возможных по наихудшему сценарию работы конструкции);

• сравнение с экспериментом.

Большинство расчетов (за исключением уникальных сооружений) проводится для традиционных конструктивных решений, основанных на большом опыте проектирования. Но при этом может возникнуть ошибка, вызванная распространением традиционных подходов, отраженных в учебной, справочной и нормативной литературе, на объекты, выходящие за область применения традиционных методов (которая в большинстве случаев не указывается).

Примером может служить спектральная теория, заложенная в нормы по расчету сейсмостойких конструкций и основанная на применении консольной модели. Эта теория должна с осторожностью применяться к пространственным моделям и неприменима к сооружениям, размеры которых совместимы с длиной сейсмической волны.

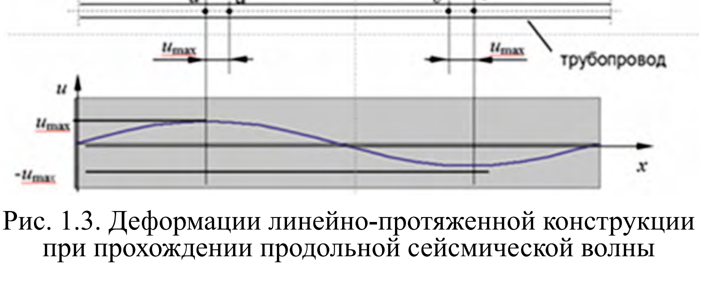


Рис. 1.3. Деформации линейно-протяженной конструкции
при прохождении продольной сейсмической волны

Верификация моделей

Все используемые в процессе расчета модели нуждаются в проверке их обоснованности (**верификации**). Верификация включает:

- проверку исходных данных (большое значение имеет наглядность графического отображения);
- проверку общего равновесия системы (сумма реакций равна сумме нагрузок);
- проверку локального равновесия подсистем;
- проверку соответствия видимой картины деформирования заданным условиям опирания;
- проверку условий симметрии;
- оценку общей картины напряженно-деформированного состояния (НДС)конструкций, сопоставление деформаций с распределением внутренних сил.

Общие правила моделирования

Расчетная модель должна быть выбрана и построена в соответствии с целью выполняемого расчета, она должна принципиально правильно отражать те особенности работы конструкций, оценку которых необходимо выполнить.

В большинстве случаев можно рекомендовать соблюдение следующих правил.

1. Применение расчетных моделей конструкций и воздействий, максимально полно представляющих интересующие свойства моделируемого ими объекта. Методы расчета должны исходить из форм разрушений и деформаций, подтвержденных опытом строительной практики.
2. Учет особенностей работы конструкций (например, геометрической и физической нелинейности).
3. Учет истории возведения и нагружения конструкций.
4. Учет совместной работы несущих конструкций, фундаментов и основания.
5. Рассмотрение аварийных воздействий и ситуаций, защита конструкций от прогрессирующего обрушения.
6. Использование разных расчетных схем для описания различных состояний конструкции (например, в зависимости от скорости, длительности, числа циклов и интенсивности нагружения).
7. Целесообразно иметь не одну модель, а систему аппроксимирующих моделей работы сооружения, каждая из которых определяет свои границы применения.
8. Расчетная гипотеза должна ставить конструкцию в менее благоприятные условия, чем те, в которых находится действительная конструкция.
9. Применение обоснованных и апробированных методик расчета.
10. Выполнение параллельных расчетов с использованием альтернативных расчетных средств. Учет опыта проектирования, строительства, эксплуатации и экспериментальных исследований конструкций, подобных проектируемым конструкциям.
11. Обеспечение не только прочности, устойчивости, но и экономичности принятого решения.
12. Использование по мере возможности простых моделей, чтобы расчет не становился слишком громоздким.

Одна из частых ошибок моделирования конструкций — чрезмерная детализация расчетной схемы, учет факторов, несущественно влияющих на искомые параметры конструкций. Очевидно, что точность моделирования строительных конструкций должна соответствовать точности используемых для расчета исходных данных, которая, как правило, невысока [16]. Чрезмерная детализация модели приводит к повышению времени и трудоемкости расчета, неизбежному росту количества ошибок, более высоким погрешностям численного решения и затруднению анализа результатов расчета. При числе шагов конечно-элементной (КЭ) сетки, равном n, количество неизвестных перемещений равно $C \cdot n^3$ (C — постоянная, зависящая от типа конечного элемента).

Следует также помнить, что элементы расчетной схемы соединяются не непосредственно между собой, а только через узлы [13].

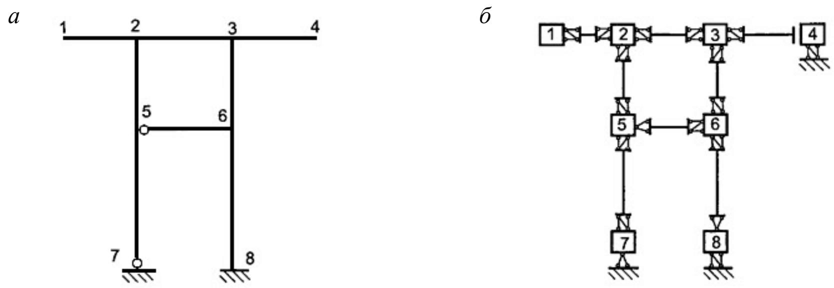


Рис. 1.4. Представление расчетной схемы в процессе компьютерного моделирования:
а — традиционное; *б* — детальное

Например, на рис. 1.5 изображены два варианта представления балки с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом. В варианте (*а*) на оба конца балки наложены связи по всем степеням свободы, а в конечной точке стержневого элемента установлен шарнир. В варианте (*б*) шарнир отсутствует, но конечный узел не закреплен от поворота. С точки зрения кинематических свойств балки оба варианта равноправны. Но с точки задания усилий эти варианты различаются. Пусть в конечном узле балки (соответствующем шарнирной опоре) приложен сосредоточенный момент. Схема (*б*) передает момент на стержень, и узел 2 в этой схеме будет иметь поворот, а в схеме (*а*) момент не передается, и узел не будет иметь поворота.

Рис. 1.5. Варианты представления балки в конечно-элементной модели

Еще до построения расчетной модели проектировщик явно или неявно руководствуется набором *гипотез и предпосылок*, которые опираются на ожидаемые свойства решения задачи. Например, предположение о малости перемещений и углов поворота служит основанием для решения задачи в геометрически линейной постановке. Предположение об отсутствии концентраторов напряжений лежит в основе применения примерно равномерной сетки конечных элементов. В связи с этим необходим апостериорный анализ полученного решения на соответствие исходным предпосылкам и при необходимости корректировка расчетной схемы.

Анализ результатов

Анализ результатов должен включать:

- рассмотрение деформированной схемы сооружения, эпюр и изополей усилий, анимации колебаний и форм потери устойчивости;
- анализ порядка усилий, напряжений и перемещений; контроль соответствия между порядком величин результатов и порядком величин нагрузок;
- установление соответствия опорных реакций суммарным равнодействующим нагрузок по каждому из нагружений;
- установление соответствия полученных результатов инженерному представлению о работе конструкции, получаемому на основании рассмотрения упрощенных моделей или из опыта строительства, эксплуатации и экспериментального исследования подобных конструкций.

1.2. Связь между методом конечных элементов и классическими методами строительной механики

1.2.1. Общие сведения о методе конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ), лежащий в основе большинства современных вычислительных комплексов, является одним из методов строительной механики.

Суть метода в том, что континуальная (непрерывная) конструкция разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам частей различной формы, обладающих различными свойствами, называемых **конечными элементами**. При этом принимаются равными потенциальная энергия исходной конструкции и потенциальная энергия конечно-элементной модели, которая ее заменяет.

Метод конечных элементов является дискретным методом. В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в узлах, где и выполняется условие совместности. В остальных точках перемещения конструкции задаются приближенно при помощи так называемых **аппроксимирующих функций**. В большинстве случаев в основе метода конечных элементов лежат вариационные принципы, основанные на законе сохранения энергии.

Возможные перемещения — это воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые связями в данный момент времени, т.е. перемещения без освобождения связей. Виртуальным (возможным) перемещениям соответствуют изменения параметров в фиксированный момент времени.

Принцип возможных перемещений гласит, что для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ dA_i всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Физическая интерпретация принципа возможных перемещений — **принцип возможных работ** [19].

Сущность принципа:

$$\int_V \overline{\varepsilon}^T \tau \, dV = \int_V \overline{U}^T \cdot f^B dV + \int_S \overline{U}^{ST} \cdot f^S dS + \overline{U}^{iT} \cdot P^i ,$$

где τ — истинные напряжения; $\overline{U}$ — поле возможных перемещений; $\overline{\varepsilon}$ — соответствующие возможные деформации; f^B, f^S, P^i — объемные поверхностные и сосредоточенные нагрузки.

Работа внутренних сил на возможных перемещениях равна работе внешней нагрузки на этих перемещениях.

1.2.2. Этапы решения задач методом конечных элементов

1. Конструкция разбивается на конечные элементы. В каждом узле i принимаются за неизвестные возможные перемещения узла (для плоской задачи u_i и υ_i), а перемещения любой точки конечного элемента $u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ выражаются в виде полиномов, где параметрами являются перемещения узла.

Например, для стержня:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \dots,$$

где x — переменная по длине элемента; $u(x)$ — локальное перемещение элемента; α_1, α_2, α_3 — обобщенные координаты.

Для пластины:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x \cdot y \\ v(x,y) &= \beta_1 + \beta_2 \cdot x + \beta_3 \cdot y + \beta_4 \cdot x \cdot y \end{aligned} ,$$

где коэффициенты $\alpha_1 \dots \beta_4$, называемые обобщенными координатами, выражаются через перемещения узлов $u_1 \dots u_n$ и $\upsilon_1 \dots \upsilon_n$.

Эти полиномы называются **аппроксимирующими**, **интерполирующими** или **базисными функциями**.

В общем виде базисная функция для области Ω (так называемые звезды конечных элементов) имеет вид [11].

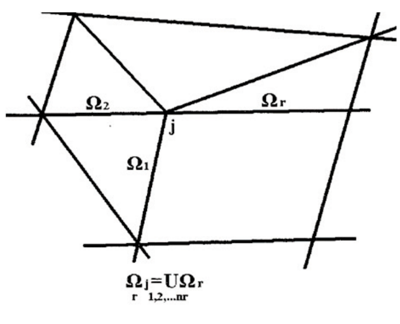


Рис. 1.6. Звезда конечных элементов, примыкающих к узлу j

Функция перемещений по области $u(x)$, $x \in \Omega$ приближенно равна:

$$u(x) = \sum_{l=1}^{L} q_l \cdot \varphi_l(x),$$

где L — общее число узловых неизвестных, которое в общем случае не равно числу узлов, так как в каждом узле может быть разное число неизвестных; q_l — узловые неизвестные (перемещения узлов или их производные в узлах сетки).

2. На основе принципа возможных перемещений строится матрица жесткости и составляется система канонических уравнений равновесия.

3. Задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Система решается, и вычисляются неизвестные узловые перемещения.

4. По полученным величинам узловых перемещений вычисляются компоненты напряженно-деформированного состояния.

1.2.3. Матричный метод перемещений и метод конечных элементов

В МКЭ элементы матрицы жесткости системы определяются на основе вариационного принципа Лагранжа. В классических методах строительной механики их получают как реакции от единичных смещений. Если базисные функции удовлетворяют однородному условию равновесия, то оба метода дают возможность получить одни и те же результаты [11].

Этот факт можно наглядно увидеть на основе матричного метода перемещений, который является своего рода «связующим звеном» между классическим методом перемещений и МКЭ [17].

Для того чтобы проследить связь между методом перемещений и МКЭ, рассмотрим систему, состоящую из стержневых элементов. Дана ферма, состоящая из пяти элементов. Расчетная схема фермы представлена на рис. 1.7[3].

Обозначим:

Z_i — вектор возможных перемещений системы;

P_i — вектор внешних узловых сил и моментов, приложенных в направлении возможных перемещений;

S_i — вектор усилий в стержневых элементах: в фермах — осевые силы, а в рамах — моменты по концам стержней.

Рис. 1.7. Геометрия фермы, схема приложения нагрузок и возможные перемещения узлов фермы

Вектор внешних сил по возможным перемещениям: $P = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 10 \\ -20 \end{bmatrix};$

Вектор усилий в стрежнях: $S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{bmatrix},$

[3] См.: Синицын Б.С. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. — Москва : АСВ, 2002.

Соответственно, вектор деформаций: $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}$.

Проведем кинематический анализ фермы, изображенной на рис. 1.7. Положительные по знаку усилия направлены от узла. Из уравнений статического равновесия:

$$\begin{cases} P_1 = S_1 \cdot \cos\alpha + S_2 \cdot \cos\alpha - S_3; \\ P_2 = S_1 \cdot \sin\alpha - S_2 \cdot \sin\alpha; \\ P_3 = S_3 - S_4 \cdot \cos\alpha + S_5 \cdot \cos\alpha; \\ P_4 = S_4 \cdot \sin\alpha - S_5 \cdot \sin\alpha; \end{cases}$$

Запишем уравнение равновесия в матричном виде:

$$A \cdot S = P,$$

где P — вектор узловых сил по направлению возможных перемещений; S — вектор внутренних усилий в элементах; A — статическая матрица.

Статическая матрица определяет зависимость между узловыми силами и внутренними усилиями и имеет размер $m \times \mathrm{n}$, где m — число строк, равное числу возможных перемещений узлов, а n — число столбцов, равное числу внутренних усилий.

При $m > n$ система изменяема. Число степеней свободы $W = m - n$.

При $m = n$ система неизменяема и статически определима, если ее определитель $\mathrm{Det}A \neq 0$, если $\mathrm{Det}A = 0$ — система мгновенно изменяема[4].

При $m < n$ система неизменяема и статически неопределима.

В данном примере:

$$A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha & -1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\cos\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$m < n$, следовательно, система статически неопределима.

Связь между перемещениями и деформациями определяется уравнениями неразрывности деформаций в матричном виде:

$$\varepsilon = B \cdot Z,$$

где B — матрица деформаций, выражающая деформации элементов через перемещения ее узлов.

Зависимость между перемещениями и деформациями (рис. 1.8):

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = Z_1 \cdot \cos\alpha \\ \varepsilon_{21} = Z_1 \cdot \cos\alpha \\ \varepsilon_{31} = -Z_1 \\ \varepsilon_{41} = \varepsilon_{51} = 0 \\ \varepsilon_{12} = Z_2 \cdot \sin\alpha \\ \varepsilon_{22} = -Z_2 \cdot \sin\alpha \\ \varepsilon_{32} = \varepsilon_{42} = \varepsilon_{52} = 0 \end{cases}$$

[4] Примером мгновенно изменяемой системы может служить балка с двумя неподвижными шарнирными опорами и шарниром посередине.

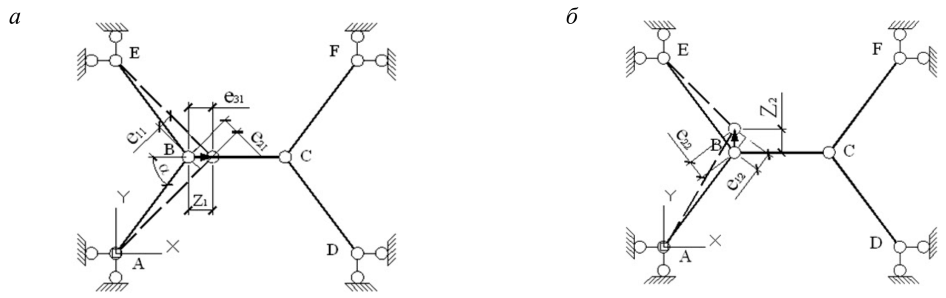


Рис. 1.8. Деформации элементов: *а* — при перемещении Z_1; *б* — при перемещении Z_2

Отсюда:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_{1,i} = \cos\alpha \cdot Z_1 + \sin\alpha \cdot Z_2; \\ \varepsilon_2 = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_{2,i} = \cos\alpha \cdot Z_1 - \sin\alpha \cdot Z_2; \\ \varepsilon_3 = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_{3,i} = \mp Z_3; \\ \varepsilon_4 = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_{4,i} = -\cos\alpha \cdot Z_3 + \sin\alpha \cdot Z_4; \\ \varepsilon_5 = \sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_{5,i} = -\cos\alpha \cdot Z_3 - \sin\alpha \cdot Z_4; \end{cases}$$

Матрица деформаций, выражающая деформации элементов через перемещения ее узлов:

$$B = \begin{array}{c|cccc} S/P & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\cos\alpha & \sin\alpha \\ 5 & 0 & 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \end{array}$$

Статическая матрица A и матрица деформаций B являются транспонированным друг относительно друга.

$$A = B^T \quad \text{или} \quad B = A^T.$$

Связь между усилиями и деформациями системы определяется законом Гука:

$$S_n = k_n \cdot \varepsilon_n,$$

S_n — вектор усилий в элементе; ε_n — вектор деформаций; k_n — матрица жесткости элемента.

Матрицы жесткости для стержневых элементов

Шарнирный элемент.

Для шарнирного элемента $\varepsilon_i = \dfrac{S_i \cdot l_n}{(E \cdot F)_n}.$

Тогда осевая сила равна $$S_i = \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_i .$$

Матрица жесткости элемента $$k_n = \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

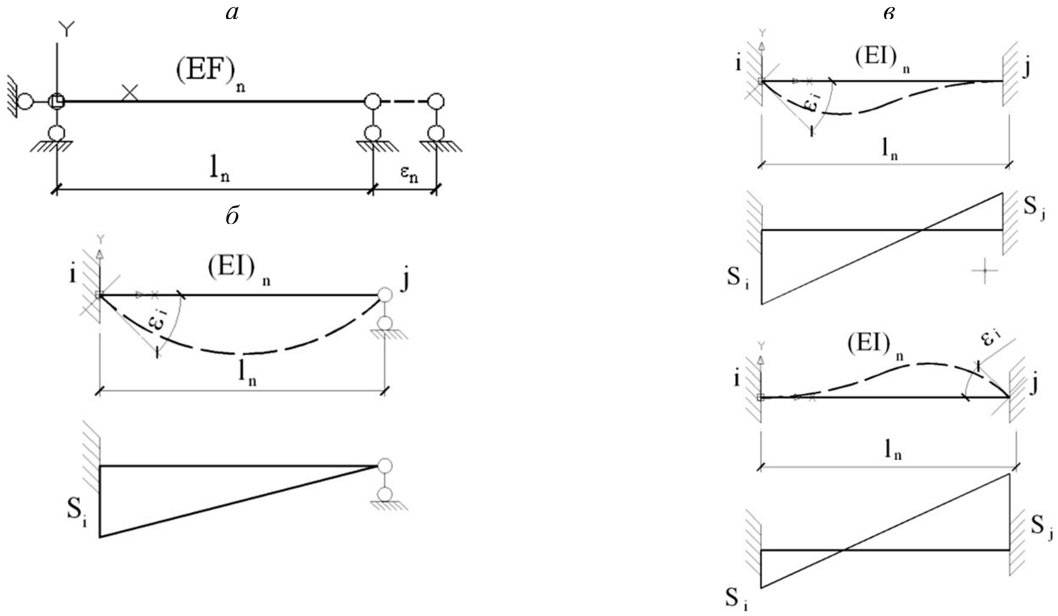


Рис. 1.9. Деформации и усилия:
а — в шарнирном элементе; *б* — в элементе с шарниром и заделкой; *в* — в жестко защемленном элементе

Элемент с шарниром на одном конце и заделкой на другом конце.
Изгибающий момент в опорном сечении равен:

$$S_i = 3 \cdot \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_i .$$

Матрица жесткости элемента

$$k_n = \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \ldots \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Элемент, жестко защемленный по концам.
Для защемленной балки

$$S_i = 4 \cdot \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_i + 2 \cdot \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_j ,$$

$$S_j = 2 \cdot \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_i + 4 \cdot \left(\frac{E \cdot F}{l}\right)_n \cdot \varepsilon_j ,$$

$S = \begin{pmatrix} S_i \\ S_j \end{pmatrix}$ — вектор внутренних усилий (моментов);

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon_j \end{pmatrix} \text{ — вектор деформаций;}$$

$$k_n = \left(\frac{E \cdot I}{l}\right)_n \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ — матрица жесткости.}$$

Матрицы жесткости фермы

Для всех элементов системы, содержащей *m* внутренних усилий, связь между усилиями и деформации будет иметь вид:

$$S = k \cdot \varepsilon,$$

где $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m \end{bmatrix}$ — вектор усилий в системе, $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_m \end{bmatrix}$ — вектор деформаций системы.

Построим матрицу жесткости фермы, показанной на рис. 1.7. Величина $(E \cdot F)$ для всех элементов постоянна, меняется только их длина.

Матрица жесткости фермы квадратная. На главной диагонали матрицы — жесткости отдельных элементов, а все прочие элементы нулевые.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot E \cdot F$$

Разрешающая система уравнений:

1. Уравнения равновесия $P = A \cdot S$.
2. Уравнения неразрывности деформаций $\varepsilon = B \cdot Z = A^T \cdot Z$.
3. Закон Гука $S = K \cdot \varepsilon$.

После подстановки:

$$S = K \cdot A^T \cdot Z \quad P = A \cdot K \cdot A^T \cdot Z = K \cdot Z \quad Z = K^{-1} \cdot P,$$

K^{-1} — обратная матрица для матрицы жесткости.

Поскольку вычисление обратной матрицы — трудоемкая процедура, то вектор Z получают непосредственным решением системы уравнений.

Проверка: $A \cdot S = P$.

4. При расчете на внеузловую нагрузку к расчетным усилиям добавляются усилия от внеузловой нагрузки:

$$S_{\text{ок}} = K \cdot A^T \cdot Z + S_0.$$

Матричное уравнение $K \cdot Z = P$ эквивалентно канонической системе уравнений метода перемещений. Каждый элемент матрицы жесткости $k_{i,j}$ равен коэффициенту $r_{i,j}$ (т.е. реакции в связи по направлению перемещения Z_i от перемещения $Z_j = 1$).

Порядок расчета фермы матричным методом перемещений (ММП)

1. Выбирается основная система метода перемещений и строится расчетная схема, определяя направления неизвестных перемещений Z и искомых усилий S.

2. В случае внеузловой нагрузки приводятся к узловым. Строятся векторы P, S_0.

3. Строится статическая матрица A и матрица жесткости k всех элементов.

4. Выполняются операции: $k \cdot A^T$ и $K = A \cdot k \cdot A^T$.

5. Решается система уравнений равновесия $K \cdot Z = P$ и находится вектор Z.

6. Определяются внутренние усилия $S = K \cdot A^T \cdot Z$.

7. Выполняется проверка $A \cdot S = P$.

8. Определяется окончательное значение усилий $S_{\text{ок}} = S + S_0$.

9. По найденным усилиям строятся окончательные эпюры.

Проведем данный алгоритм для нашей фермы.

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}; \; S_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & -1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,6 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,8 \end{bmatrix} \quad A^m = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,6 & -0,8 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot F \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$k \cdot A^m = E \cdot F \cdot \begin{bmatrix} 0,12 & 0,16 & 0 & 0 & 0 \\ 0,12 & -0,16 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,12 & 0,16 \\ 0 & 0 & 0 & -0,12 & -0,16 \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$K = A \cdot k \cdot A^m = E \cdot F \cdot \begin{bmatrix} 0,394 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,256 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,256 \end{bmatrix}$$

Решаем систему уравнений $K \cdot Z = P$:

$$\begin{cases} 0,394 \cdot Z_1 - 0,25 \cdot Z_3 = 0 \\ 0,256 \cdot Z_2 = \dfrac{-16}{E \cdot F} \\ -0,25 \cdot Z_1 + 0,394 \cdot Z_3 = \dfrac{10}{E \cdot F} \\ 0,256 \cdot Z_4 = \dfrac{-20}{E \cdot F} \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{cases} Z_1 = \dfrac{26,958}{E \cdot F} \\ Z_2 = \dfrac{-62,5}{E \cdot F} \\ Z_3 = \dfrac{42,486}{E \cdot F} \\ Z_4 = \dfrac{-78,125}{E \cdot F} \end{cases}$$

Определяем внутренние усилия:

$$S = k \cdot A^{\grave{O}} \cdot Z = E \cdot F \cdot \begin{bmatrix} 0,12 & 0,16 & 0 & 0 \\ 0,12 & -0,16 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & -0,12 & 0,16 \\ 0 & 0 & -0,12 & 0,16 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{E \cdot F} \cdot \begin{bmatrix} 26,958 \\ -62,5 \\ 42,486 \\ -78,125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,765 \\ 13,235 \\ 3,882 \\ \text{м}17,598 \\ 7,402 \end{bmatrix}$$

1.2.4. Метод конечных элементов

Метод ММП является промежуточным звеном между классическим методом перемещений и МКЭ. *Отличие МКЭ от ММП заключается в методике получения глобальной матрицы жесткости системы* [11]. Матрица жесткости в МКЭ получается путем суммирования матриц жесткости отдельных конечных элементов, т.е. $K = \sum_{Э=1}^{n} K_Э$. А после определения перемещений Z усилия вычисляются поэлементно.

Такой подход позволяет один раз получить матрицы жесткости типовых **(библиотечных)** элементов, представить конструкцию как их совокупность и на основе заданного алгоритма автоматически составлять матрицу жесткости для каждого из них по задаваемым пользователем параметрам.

Конечные элементы могут описываться одной (стержневые элементы), двумя (плоские элементы) или тремя (объемные элементы) пространственными координатами. В расчетах могут использоваться специальные элементы с нулевой размерностью, например, узловые массы или сосредоточенные упругие элементы (пружины) и т.п.

Геометрия элемента определяется количеством и расположением узловых точек. В большинстве случаев используемые конечные элементы имеют простую геометрическую форму: прямолинейные отрезки (для одномерных элементов), плоские треугольники или четырехугольники (для двумерных элементов), тетраэдры, призмы, параллелепипеды или пирамиды (для трехмерных элементов). Более сложные поверхности аппроксимируются большим количеством простых элементов.

Конечные элементы также различаются **количеством степеней свободы**. Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы конечно-элементных уравнений. Количество степеней свободы определяется типом решаемых задач.

В конечно-элементных программах используются различные **типы (признаки) расчетных систем (схем)**. Тип (признак) расчетной схемы (системы) определяет состав и максимальное количество степеней свободы в узлах расчетной схемы и характеризует особенности ее НДС. В соответствии с типом задачи определяется и **тип используемых конечных элементов**.

Наложение подобных ограничений (если это допустимо) позволяет существенно упростить решение уравнений МКЭ и, соответственно, сократить время расчета, а также избавиться от лишних исходных данных и ненужных для данной задачи результатов. Но при этом назначенный тип схемы должен включать все необходимые степени свободы для использованных конечных элементов.

В некоторых программах (ПК SCAD, ПК ЛИРА) тип системы задается в явном виде перед началом расчета при создании нового проекта, например:

- плоская шарнирно-стержневая система;
- плоская рама;
- балочный ростверк, плита;

• пространственная шарнирно-стержневая система;
• система общего вида;
• конструкция из многослойных оболочек;
• осесимметричная задача.

В ПК STARK ES признак системы в явном виде задается только для POS-проектов[5]:
• POS-проект (плита) — плоская задача;
• POS-проект (балка-стенка) — плоская задача;
• POS-проект (тело вращения) — пространственная задача;
• 3D-POS-проект — пространственная задача.

При генерации конечно-элементной модели на ее элементы накладываются соответствующие ограничения. Для стержневых элементов при работе с конечно-элементной моделью тип системы определяется непосредственно при задании конечных элементов (2D- или 3D-рама; 2D- или 3D-ферма)[6].

В соответствии с типом системы программа автоматически включает или отключает ограничения при наложении связей, задании шарниров или нагрузок.

Кроме того, конечные элементы различаются **определяющими соотношениями** или поведением материала, из которого изготовлена конструкция. Например, в качестве такого соотношения в большинстве случаев используется обобщенный закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. В этом случае для линейного упругого стержневого элемента достаточно задать один модуль Юнга E и один коэффициент температурного расширения.

Помимо этого, для каждого конечного элемента задаются свойства сечения, определяющие все прочие параметры модели, например: площади и моменты инерции одномерных конечных элементов (стержней), толщины пластин и оболочек и т.п. При построении конечного элемента свойства сечений считаются заданными и входят в результирующую матрицу жесткости элемента. *Принципиальная особенность МКЭ заключается в том, что в этом методе невозможно пренебречь осевыми деформациями.*

В МКЭ при построении матриц жесткости удовлетворяются условия равновесия (матрица A), физические уравнения (матрица K), уравнение неразрывности (условие $B = A^T$).

Таблица 1.2

Сравнительная таблица алгоритмов матричного метода перемещений и МКЭ

ММП	МКЭ
1. Строятся вручную исходные матрицы A, k, векторы P, S_0	1. Вводятся в машину координаты узлов X_i, Y_i. Задаются элементы по соответствующим узлам и их жесткости E, F, I, а также внешние воздействия: нагрузки температурные воздействия осадки опор
2. Вычисляется матрица усилий $k \cdot A^T$ и матрица жесткости конструкции $K = A \cdot k \cdot A^T$	2. Компьютер по стандартному алгоритму вычисляет матрицы усилий $(k \cdot A^T)_Э$, матрицы жесткости $K_Э = (A \cdot k \cdot A^T)_Э$ и записывает их на жесткий диск
	2а. Составляется матрица жесткости всей системы: $K = \sum_{Э=1}^{n} K_Э$
3. Решается система уравнений $K \cdot Z = P$. Искомым является вектор Z	3. Решается система уравнений $K \cdot Z = P$. Искомым является вектор Z
4. Определяются расчетные усилия $S = k \cdot A^T \cdot Z$	4. Находятся усилия во всех элементах $S_Э = (k \cdot A^T) \cdot Z_Э$
5. Добавляются усилия от внеузловой нагрузки $S = S + S_0$	5. Добавляются усилия от внеузловой нагрузки $S = S + S_0$

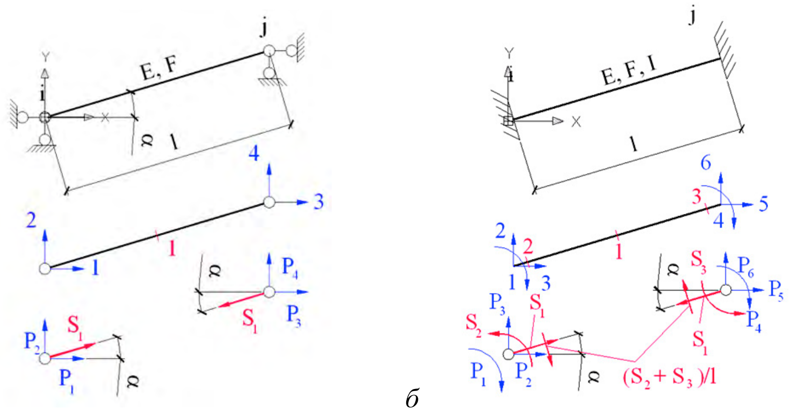
МКЭ является приближенным методом (как и матричный метод перемещений). *Его точность зависит от числа конечных элементов.* В последнее время наблюдается тенденция к упрощению системы моделирования. В этом случае элемент по умолчанию принимается с наибольшим числом степеней свободы, а ограничения накладываются на него автоматически.

[5] Понятие POS-проекта будет рассмотрено в разделе 5.
[6] В плоских элементах существует возможность снижения жесткости по той или иной степени свободы. Таким способом элемент общего вида можно преобразовать, например, в элемент плиты или балки-стенки.

Главное отличие ММП от МКЭ в том, что ММП матрицы жесткости строятся вручную для каждой новой конструкции, а в МКЭ глобальная матрица жесткости конструкции получается простым суммированием по определенному правилу матриц жесткости всех элементов, вычисленных по стандартным алгоритмам, заложенным в машине.

Матрицы жесткости типовых стержневых элементов (плоская задача МКЭ)

В качестве примера рассмотрим матрицы жесткости типовых стержневых элементов (плоская задача).



а *б*

Рис. 1.10. Возможные перемещения, усилия и узловые нагрузки:
а — в шарнирном элементе; *б* — в защемленном элементе

Шарнирно опертый стержневой элемент.

$$\begin{aligned} P_1 &= -S_1 \cdot \cos\alpha \\ P_2 &= -S_1 \cdot \sin\alpha \\ P_3 &= S_1 \cdot \cos\alpha \\ P_4 &= S_1 \cdot \sin\alpha \end{aligned}, \quad \text{отсюда} \quad A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Матрица жесткости шарнирно стержневого элемента: $k = \dfrac{E \cdot F}{l}$ [1]

Матрица единичных усилий: $k \cdot A^T = \dfrac{E \cdot F}{l} \cdot \left(-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha\right)$

Матрица жесткости:

$$K_{\acute{Y}} = A \cdot k \cdot A^T = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы жесткости симметричны относительно главной диагонали.

Защемленный стержневой элемент.

Уравнения равновесия в каждом узле:

узел *i*

$$\begin{cases} \sum M = 0 \quad P_1 = S_2 \\ \sum X = 0 \quad P_2 = S_1 \cdot \cos\alpha + \dfrac{S_2 + S_3}{l} \cdot \sin\alpha \\ \sum Y = 0 \quad P_3 = -S_1 \cdot \sin\alpha + \dfrac{S_2 + S_3}{l} \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

узел j

$$\begin{cases} \sum M = 0 \quad P_4 = S_3 \\ \sum X = 0 \quad P_5 = -S_1 \cdot \cos\alpha + \dfrac{S_2 + S_3}{l} \cdot \sin\alpha \\ \sum Y = 0 \quad P_6 = -S_1 \cdot \sin\alpha + \dfrac{S_2 + S_3}{l} \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Статическая матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha & \dfrac{\sin\alpha}{1} & \dfrac{\sin\alpha}{1} \\ -\sin\alpha & \dfrac{-\cos\alpha}{1} & \dfrac{-\cos\alpha}{1} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \dfrac{-\sin\alpha}{1} & \dfrac{-\sin\alpha}{1} \\ \sin\alpha & \dfrac{\cos\alpha}{1} & \dfrac{-\cos\alpha}{1} \end{pmatrix}.$$

Матрица жесткости для балочного элемента при учете деформаций растяжения-сжатия определяется как сумма матриц внутренней жесткости для шарнирного и балочного элемента метода перемещений:

$$k = \begin{pmatrix} \dfrac{E \cdot F}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4 \cdot E \cdot I}{l} & \dfrac{2 \cdot E \cdot I}{l} \\ 0 & \dfrac{2 \cdot E \cdot I}{l} & \dfrac{4 \cdot E \cdot I}{l} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, матрица жесткости всей системы вычисляется по формуле $K = A \cdot k \cdot A^T$.

Защемленный стержневой элемент в пространственной постановке.

В жестком узле пространственной стержневой системы имеется шесть степеней свободы: три линейных перемещения, три поворота вокруг осей. Поэтому стержень, соединяющий два узла, будет иметь 12 степеней свободы. Усилий в стержне будет шесть: нормальная сила S_1, изгибающие моменты по концам в плоскости стержня S_2 и S_3, изгибающие моменты по концам из плоскости стержня S_4 и S_5 и крутящий момент S_6. Статическая матрица будет иметь размерность 12×6, а матрица внутренней жесткости будет иметь вид:

$$k = \begin{pmatrix} \dfrac{E \cdot F}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} & \dfrac{2 \cdot E \cdot I_2}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2 \cdot E \cdot I_2}{l} & \dfrac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} & \dfrac{2 \cdot E \cdot I_2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2 \cdot E \cdot I_2}{l} & \dfrac{4 \cdot E \cdot I_2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{G \cdot I_1}{l} \end{pmatrix},$$