Оглавление

Введение

В настоящее время отсутствует единая программа обучения математике учащихся инженерных классов. Данное пособие содержит дидактические материалы по ряду тем школьного курса математики, которые будут полезны при обучении учащихся инженерных классов. Отсутствие в пособии материалов по ряду важных тем объясняется тем, что они присутствуют в достаточном объёме в школьных учебниках. Отбор содержания пособия (тематических блоков, фактов и методов математики) проводился авторами в двух направлениях.

В первом случае проводился отбор материала, не входящего (или входящего в недостаточном объёме) в программу общеобразовательной школы, но целесообразного для изучения учащимися инженерных классов. Целесообразность материала рассматривается с точки зрения его роли в развитии учащихся при получении среднего образования, целесообразности использования его для повышения уровня абстрактности изложения и повышения уровня абстрактности мышления учащихся, необходимого с точки зрения усвоения курса учащимися и использования полученных знаний при дальнейшем обучении в техническом вузе.

Во втором – отбирался материал, составляющий основу и фундамент школьного математического образования, обеспечивающий необходимый уровень интеллектуальных способностей средствами и методами элементарных разделов математики, которыми пользуются уже многие годы, без освоения которых невозможно получение высшего образования.

Проведенный авторами анализ программ школьных курсов (общеобразовательных школ, физико-математических школ и классов, а также классов углубленного изучения математики), широкого спектра учебников и специальных учебных пособий по математике, а также учебников по математике для высших технических учебных заведений, с учетом личного опыта преподавания авторами в техническом вузе и в школе, позволил выделить ряд тем, целесообразных для развития учащихся инженерных классов с учетом возрастных особенностей и формирования у них правильных представлений с точки зрения их изучения и использования в процессе дальнейшего обучения в вузе. Были выделены следующие темы.

«Элементы математической логики». В рамках этой темы желательно познакомить учащихся с методами построения отрицания высказываний и основными операциями над высказываниями, с понятиями прямой, обратной, противоположной прямой и противоположной обратной теоремами, методом доказательства от противного.

«Метод математической индукции», как один из наиболее важных методов доказательства, достаточно часто применяемый в вузовских курсах «Линейная алгебра», «Дискретная математика» и др.

Формула бинома Ньютона являющаяся полезной при освоении вузовских курсов «Математический анализ» и «Теория вероятностей».

В теме «Множества» затронуты вопросы доказательства равенства множеств путем преобразований множеств согласно основным свойствам операции, а также вопросы, связанные со сравнением действительных чисел, необходимые в дальнейшем при решении уравнений и неравенств. Также изучение данной темы является полезным при изучении информатики в старших классах.

Тема «Комплексные числа» важна с точки зрения общего развития и её изучение будет полезно при прохождении темы «Многочлены» в школьном курсе (в частности, в вопросах разложения многочлена на множители) и темы «Дифференциальные уравнения». Полученные при этом знания имеют достаточно широкое применение во всех вузовских курсах математики и физики, начиная с первого курса.

При изучении раздела «Функции» важно научить применять свойства функции при решении различных задач. Особое внимание уделено построению эскизов графиков функций, как с применением производной, так и без неё, с использованием метода элементарных преобразований графиков функций. Умение работать с графиками полезно в вузовских курсах «Математического анализа» и «Аналитической геометрии».

Темы «Предел последовательности», «Предел функции» и «Интегральное исчисление» важны, так как являются фундаментом курса математического анализа в вузе, и изучаются в школе для правильного формирования понятий, полезных при дальнейшем изучении математики, а также демонстрации возможностей математики для решения прикладных задач.

Тема «Дифференциальные уравнения» имеет прикладной характер и даёт возможность развития навыков математического моделирования.

Каждая глава пособия содержит разбор полезных для изучения темы примеров и варианты самостоятельных и контрольных работ. Окончание решения рассмотренных примеров и доказательств отмечается значком ▲.

В конце пособия в приложении 1 приведен пример учебно-тематического планирования курса алгебры и начал анализа в инженерных классах в соответствии с учебными пособиями (Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика 10 и 11 кл. Учебное пособие для инженерных классов (Просвещение), 2018). Отметим, что данную книгу можно использовать и при обучении учащихся инженерных классов по другим учебникам, входящим в Федеральный перечень учебников текущего и последующих годов.

Указанные пособия имеют отличительной особенностью прикладную направленность, большое количество разобранных примеров, знакомящих учащихся с различными методами решений и доказательств. С 2012 по 2016 гг. учебники этих авторов входили в федеральный перечень учебников. Апробация проходила во многих школах (в частности, в московских школах: Лицей № 1557 и школа 1298 «Профиль Куркино»).

Настоящее пособие в первую очередь предназначено учителям, обучающих учащихся инженерных классов, но будет также полезно учителям, ведущим преподавание математики в профильных 10-х и 11-х классах, а также, безусловно, учащимся старших классов, желающим повысить уровень своей математической подготовки и познакомиться с новыми разделами математики.

Глава I. Элементы математической логики

Материал, изучаемый в этой главе, является обобщением и систематизацией начальных представлений о математической логике, широко применяемых в основной школе при решении задач и доказательствах теорем. При рассмотрении высказываний и операций над ними учащиеся могут с помощью простых высказываний и интуитивных представлений самостоятельно составить таблицы истинности для основных операций. Следует уделить особое внимание составлению таблицы истинности для импликации и построению отрицания импликации.

Также необходимо подчеркнуть, что часто для доказательства истинности высказывания бывает проще доказать ложность его отрицания.

При изучении неопределенных высказываний особое место занимают примеры записи теорем, известных из геометрии и алгебры, в формальном виде, а также построение их отрицаний.

Рассмотрение различных приемов доказательства начинается с изучения теорем (обратная, противоположная, обратная противоположной), связанных с исходной. При этом важно понимать, истинность каких теорем совпадает с истинностью исходной. Часто встречающейся ошибкой является неверное построение отрицания теоремы «Для всех x из A следует B», что приводит к неправильным доказательствам.

§ 1. Высказывания и операции над ними

Высказыванием называется утверждение, которое является либо истинным, либо ложным (*закон исключённого третьего*).

Никакое высказывание не может быть одновременно истинным или ложным (закон противоречия); утверждение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

Отрицанием высказывания A (обозначается символом $\overline{A}$, читается «не A») называется такое высказывание, которое является истинным тогда и только тогда, когда A ложно (таблица 1).

Таблица 1

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Конъюнкцией двух высказываний A и B (обозначается символом $A \wedge B$, читается «A и B») называется высказывание, которое является истинным в случае, когда истинны оба высказывания A и B, и ложным во всех остальных случаях (таблица 2).

Дизъюнкцией высказываний A и B (обозначается символом $A \vee B$, читается «A или B») называется высказывание, которое истинно в тех случаях, когда истинно хотя бы одно из высказываний A или B, и ложно, если ложны оба высказывания A и B.

Таблица 2

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \sim B$	$A \Rightarrow B$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	И
Л	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Замечание. Дизъюнкция («или») понимается в смысле, отличном от бытового: логическая операция дизъюнкция не является «разделительным или». Дизъюнкция двух высказываний является истинной не только тогда, когда одно из высказываний истинно, а другое ложно, но и в том случае, когда истинны оба.

Эквиваленцией высказываний A и B (обозначается $A \sim B$, читается «А эквивалентно B») называется такое высказывание, которое истинно, если оба высказывания A и B истинны или оба ложны, и ложно, если одно из этих высказываний истинно, а другое ложно.

Импликацией высказываний A и B (обозначается $A \Rightarrow B$, читается «если A, то B» или «из A следует B», «A влечёт за собой B») называется высказывание, которое ложно лишь в том случае, когда A истинно, а B ложно.

Свойства операций (законы алгебры высказываний)

1) Коммутативность: $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$.

2) Ассоциативность: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

3) Дистрибутивность:
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \vee (B \wedge C)$.

4) Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} = \overline{B} \wedge \overline{A}$ и $\overline{A \wedge B} = \overline{B} \vee \overline{A}$.

Кроме того, справедливы следующие равенства (через J обозначено тождественно истинное высказывание):

$\overline{\overline{A}} = A$; $A \vee A = A$; $A \wedge A = A$;

$A \vee \overline{A} = J$ (*закон исключенного третьего*); $A \vee J = J$; $A \wedge J = A$.

Если L | тождественно ложное высказывание, то

$A \vee L = A$; $A \wedge \overline{A} = L$ (*закон противоречия*); $A \wedge L = L$; $\overline{J} = L$.

Пример 1. Установить, является истинным или ложным высказывание $A \equiv \{$Число 54 делится на 2 или на 3$\}$.

Решение. Высказывание A можно представить в виде дизъюнкции двух высказываний: $A = B \vee C$, где $B \equiv \{$Число 54 делится на 2$\}$, $C \equiv \{$Число 54 делится на 3$\}$. Так как оба высказывания истинны, то A истинно. ▲

При решении задач, в которых присутствует операция импликации, важно понимать, что высказывание $A \Rightarrow B$ является ложным в единственном случае – когда A истинно, а B ложно.

Пример 2. Даны два высказывания: $A \equiv \{$Число $2^{222} - 1$ делится на 15$\}$ и $B \equiv \{$Число $2^{222} - 1$ делится на 3$\}$. Является ли истинным высказывание $C = A \Rightarrow B$?

Решение. Не выясняя, являются ли истинными высказывания A и B, покажем, что высказывание $C \equiv \{$Если число $2^{222} - 1$ делится на 15, то оно делится на 3$\}$ истинно.

Рассмотрим несколько случаев:

1) A истинно, т.е. $2^{222} - 1$ делится на 15; то $2^{222} - 1$ делится на 3; т.е. B истинно. Таким образом, если A и B истинны, то $A \Rightarrow B$ истинно. В данном случае невозможна ситуация, когда A истинно, а B ложно.

2) A ложно, т.е. $2^{222} - 1$ не делится на 15, то $2^{222} - 1$ может как делиться, так и не делиться на 3, т.е. B может быть как истинным, так и ложным. Таким образом, если A ложно, то высказывание $C = A \Rightarrow B$ является истинным независимо от значения B. ▲

Пример 3. Установить, являются истинными или ложными высказывания:

$A \equiv \{$Если 54 – простое число, то 27 – простое число$\}$,

$B \equiv \{$Если 54 – простое число, то $2^{2022} + 3^{2023}$ – простое число$\}$,

$C \equiv \{$Если 54 – простое число, то число π меньше 4$\}$.

Решение. Зададим высказывания и выясним, истинны они или ложны:

$D \equiv \{$54 – простое число$\}$ – ложно,

$E \equiv \{$27 – простое число$\}$ – ложно,

$F \equiv \{$ $2^{2022} + 3^{2023}$ – простое число$\}$ – неизвестно,

$G \equiv \{$число π меньше 4$\}$ – истинно.

Высказывания A, B и C можно представить в виде импликаций:

$$A = D \Rightarrow E,\ B = D \Rightarrow F,\ C = D \Rightarrow G.$$

Тогда высказывания A, B, C являются истинными, так как D – ложно.

Важно отметить, что в высказывании $C = D \Rightarrow G$ высказывания D и G по смыслу между собой никак не связаны. ▲

При решении задач и доказательстве теорем часто используется отрицание импликации: $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{\overline{A} \vee B} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B}$.

Пример 4. Постройте отрицание высказывания $C \equiv \{$Если сумма цифр целого числа делится на 3, то и само число делится на 3 без остатка$\}$.

Решение. Зададим высказывания $A \equiv \{$Сумма цифр целого числа делится на 3$\}$ и $B \equiv \{$целого числа делится на 3 без остатка$\}$. Тогда $C = A \Rightarrow B$. В соответствии с формулой $\overline{A \Rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$ получаем $\overline{C} \equiv \{$Сумма цифр целого числа делится на 3, и само число не делится на 3 без остатка$\}$. ▲

Равносильность высказываний можно доказывать с помощью сравнения их таблиц истинности или преобразуя высказывания по законам алгебры высказываний.

Пример 5. С помощью таблиц истинности и преобразований высказываний проверить, верно ли равенство: $A \Rightarrow (B \vee C) = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$.

Решение. Первый способ. Составим таблицу истинности высказываний (таблица 3). Сравнивая 5-й и 8-й столбцы этой таблицы, устанавливаем равносильность данных высказываний.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow (B \vee C)$	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И	Л	И
И	Л	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И	И

Второй способ. Проверим теперь равносильность высказываний с помощью их преобразований:

$A \Rightarrow (B \vee C) = \overline{A} \vee (B \vee C) = \overline{A} \vee B \vee C$,

$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) = (\overline{A} \vee B) \vee (\overline{A} \vee C) = \overline{A} \vee B \vee \overline{A} \vee C = \overline{A} \vee B \vee C$.

Высказывания равносильны. ▲

Замечание. Для конъюнкции $A \wedge B$ часто используют запись AB.

Пример 6. Построить отрицание высказывания и упростить его:

$$\overline{A}B \Rightarrow (A \vee (\overline{B} \Rightarrow A)).$$

Решение. $\overline{\overline{A}B \Rightarrow (A \vee (\overline{B} \Rightarrow A))} = \overline{A}B\overline{(A \vee (\overline{B} \Rightarrow A))} = \overline{A}B\overline{A}\,\overline{(\overline{B} \Rightarrow A)} = \overline{A}B\overline{B}\,\overline{A} = \overline{A}L = L$. ▲

Покажем, как с помощью преобразований высказываний можно решать логические задачи.

Пример 7. На столе в приемной комиссии института перед абитуриентом стоят две коробки. В каждой их них лежит либо табличка «Принят», либо табличка «Не принят». На крышках коробок написано: «В обеих коробках лежит по табличке «Принят». Причем известно, что если в первой коробке находится табличка «Принят», то надпись на коробке истинна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке ложна. Что касается второй коробки, то там все наоборот: если в ней находится табличка «Принят», то надпись на коробке ложна, если же там табличка «Не принят», то надпись на коробке истинна. Какие таблички находятся в коробках?

Решение. Обозначим высказывания: $A \equiv \{$В первой коробке лежит табличка «Не принят»$\}$ и $B \equiv \{$Во второй коробке лежит табличка «Принят»$\}$.

Тогда надписи на коробках – это высказывание *AB*. Условие «Если в первой коробке находится табличка «Принят», то надпись на коробке истинна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке ложна» означает, что истинно высказывание:

$$(A \Rightarrow AB)(\overline{A} \Rightarrow \overline{AB}) = (A \Rightarrow AB)(AB \Rightarrow A) = A \sim AB =$$
$$= A(AB) \vee \overline{A}(\overline{AB}) = AB \vee \overline{A}(\overline{A} \vee \overline{B}) = AB \vee \underbrace{\overline{A} \vee \overline{A}\overline{B}}_{=\overline{A}} = AB \vee \overline{A} = J .$$

Условие «Если во второй коробке находится табличка «Принят», то надпись на коробке ложна, если же там находится табличка «Не принят», то надпись на коробке истинна» означает, что истинно высказывание:

$$(B \Rightarrow \overline{AB})(\overline{B} \Rightarrow AB) = (B \Rightarrow \overline{AB})(\overline{AB} \Rightarrow B) = B \sim \overline{AB} = B(\overline{AB}) \vee \underbrace{\overline{B}(AB)}_{=L} = B(\overline{A} \vee \overline{B}) = \underbrace{B\overline{B}}_{=L} \vee B\overline{A} = B\overline{A} = J .$$

Таким образом, истинна конъюнкция этих высказываний:

$$(AB \vee \overline{A})B\overline{A} = \underbrace{ABB\overline{A}}_{=L} \vee \underbrace{\overline{A}B\overline{A})}_{=\overline{A}B} = \overline{A}B .$$

Таким образом, высказывание A ложно, B – истинно. В первой коробке находится табличка «Не принят», во второй коробке – табличка «Принят». ▲

§ 2. Неопределенные высказывания. Знаки общности и существования

Утверждения, зависящие от переменной, заданной на некотором множестве, и обращающиеся в высказывание при конкретном значении переменной, называются неопределенными высказываниями или предикатами.

Множеством истинности предиката $P(x)$, заданного на множестве M называют множество таких значений переменной x, при которых высказывание $P(x)$ истинно. На предикаты естественным образом переносятся логические операции, рассмотренные в § 1. Свойства операций при этом сохраняются.

Неопределенные высказывания возникают при решении задач алгебры и геометрии. Например, всякое уравнение или неравенство можно рассматривать, как неопределенное высказывание, и решить это уравнение или неравенство – означает найти множество истинности некоторого неопределенного высказывания $A(x)$. При этом путем цепочек преобразований исходные уравнения или неравенства заменяются на равносильные уравнения, неравенства, их совокупности или системы.

Если на множестве M задан предикат $A(x)$, то утверждение «неопределённое высказывание истинно **для всех** элементов множества M» записывают с помощью знака общности $\forall$ следующим образом:

$$\forall x\ A(x) \text{ или } (\forall x \in M\ )\ A(x) .$$

Если неопределённое высказывание $A(x)$ истинно **хотя бы для одного** элемента из множества M, т.е. существует элемент $x_0 \in M$ такой, что $A(x_0)$ – истинное высказывание, то используют знак существования $\exists$:

$$\exists x\ A(x) \text{ или } (\exists x \in M)\ A(x) .$$

Если перед неопределённым высказыванием стоит знак $\forall$ или знак $\exists$, то каждое такое утверждение либо истинно, либо ложно и поэтому оно является высказыванием.

Если истинно высказывание $\forall x\ A(x) \sim B(x)$, то множества истинности $A(x)$ и $B(x)$ совпадают.

Пример 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, заданные на множестве $X \subset \mathbb{R}$, Доказать истинность высказывания:

$$\forall x \in X\ \{|\ f(x)| > g(x)\} \sim (\{f(x) > g(x)\} \vee \{f(x) < -g(x)\}) .$$

Решение. Рассмотрим неопределенные высказывания, заданные на множестве X:

$$A(x) \equiv \{\ |\ f(x)| > g(x)\ \},$$
$$B(x) \equiv \{f(x) > g(x)\} ,$$
$$C(x) \equiv \{f(x) < -g(x)\} ,$$
$$D(x) \equiv \{f(x) \geq 0\} .$$

Требуется доказать истинность высказывания:

$$\forall x \in X\ \{A(x) \sim (B(x) \vee C(x)) .$$

При любом $x \in X$ имеем: $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) \ge 0$, и $|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$. Получаем:

$$\{|f(x)| > g(x)\} \sim ((\{f(x) \ge 0\} \wedge \{f(x) > g(x)\}) \vee (\{f(x) < 0\} \wedge \{-f(x) > g(x)\})),$$

$$A(x) \sim \{(D(x) \wedge B(x)) \vee (\overline{D(x)} \wedge C(x))\}.$$

Сравним высказывания $(D(x) \wedge B(x)) \vee (\overline{D(x)} \wedge C(x))$ и $B(x) \vee C(x)$ с помощью таблицы истинности (таблица 4).

Таблица 4

A	B	C	$B \vee C$	$(D(x) \wedge B(x)) \vee (\overline{D(x)} \wedge C(x))$	$B(x) \vee C(x)$
И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	И
И	Л	И	И	Л	И
И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И	И
Л	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	И	И
Л	Л	Л	Л	Л	Л

Заметим, что значения высказываний $B(x) \vee C(x)$ и $(D(x) \wedge B(x)) \vee (\overline{D(x)} \wedge C(x))$ не совпадают в двух случаях: когда $D(x)$ и $C(x)$ истинны, а $B(x)$ ложно, и когда $D(x)$ и $C(x)$ ложны, а $B(x)$ истинно. В первом случае получаем неравенства $f(x) \ge 0$, $f(x) < -g(x)$, $f(x) < g(x)$, которые не могут выполняться одновременно.

Во втором случае получаем неравенства $f(x) > g(x)$, $f(x) > -g(x)$, $f(x) < 0$, которые также не могут выполняться одновременно. ▲

Замечание. При решении уравнений и неравенств конъюнкции высказываний соответствует система, дизъюнкции – совокупность. Таким образом, мы показали, что неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности двух неравенств: $f(x) > g(x)$ или $f(x) < -g(x)$.

При установлении истинности или ложности высказываний, содержащих кванторы всеобщности и существования, полезно переходить к их отрицаниям. Так, для того, чтобы доказать ложность высказывания $\forall x \in M \;\; A(x)$, необходимо указать только один элемент $x \in M$, для которого $A(x)$ ложно, т.е. доказать истинность высказывания $\overline{\forall x \in M \;\; A(x)} = \exists x \in M \;\; \overline{A(x)}$.

Для того, чтобы доказать ложность высказывания $\exists x \in M \;\; A(x)$, необходимо доказать, что для всех $x \in M$ высказывание $A(x)$ ложно, т.е. доказать истинность высказывания $\overline{\exists x \in M \;\; A(x)} = \forall x \in M \;\; \overline{A(x)}$.

Следующий пример показывает, как перестановка кванторов изменяет высказывания.

Пример 2. Выяснить смысл приведенных высказываний и установить, истинны они или ложны, считая, что $x, y, a, b, c \in \mathbb{R}$:

1) $\forall x \, \exists y \, (x + y = 3)$,
2) $\exists y \, \forall x \, (x + y = 3)$,
3) $\forall x \, (x \le 1 \Rightarrow x^2 \le x)$,
4) $\forall a, b, c \, (\exists x \, (ax^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \ge 0)$,
5) $\forall a, b, c \left(\left((a \ne 0) \wedge \exists x \, (ax^2 + bx + c = 0) \right) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \ge 0 \right)$.

Решение. 1) Высказывание означает, что для любого x найдется y такой, что $x + y = 3$. Данное высказывание истинно: для каждого x найдется $y = 3 - x$, тогда, действительно, $x + y = 3$.

2) Высказывание означает, что найдется y такой, что для любого x выполняется $x + y = 3$. Построим отрицание этого высказывания:

$$\overline{\exists y \, \forall x \, (x + y = 3)} \sim \forall y \, \exists x \, (x + y \ne 3).$$

Это высказывание означает, что для любого x найдется y такой, что $x+y\neq 3$. Это высказывание истинно. Действительно, для произвольного x можно взять y, равный, например, $4-y$, и тогда $x+y=4\neq 3$. Таким образом, исходное высказывание ложно.

3) Высказывание означает, что для всех x из неравенства $x\le 1$ следует неравенство $x^2\le x$. Построим отрицание высказывания:

$$\overline{\forall x\,(x\le 1\Rightarrow x^2\le x)} \sim \exists x\,\overline{(x\le 1\Rightarrow x^2\le x)} \sim \exists x\,(x\le 1\wedge \overline{x^2\le x}) \sim \exists x\,(x\le 1\wedge x^2> x).$$

Последнее высказывание является истинным, в качестве x можно взять любое отрицательное число. Исходное высказывание ложно.

4) Высказывание означает, что для любых коэффициентов a,b и c уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда $b^2-4ac\ge 0$. Это высказывание ложно, так как найдутся значения коэффициентов, а именно, $a=0, b=0$, $c\neq 0$, при которых высказывание $b^2-4ac\ge 0$ истинно, а уравнение $ax^2+bx+c=0$ решений не имеет.

5) В отличие от предыдущего случая, высказывание означает, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) имеет решение тогда и только тогда, когда $b^2-4ac\ge 0$. Это высказывание истинно. ▲

Пример 3. Натуральное число n является составным тогда и только тогда, когда оно имеет делители, отличные от 1 и самого себя. Записать символически с помощью кванторов это определение.

Решение. Обозначим неопределенное высказывание $A(n)\equiv\{$ Число n является составным$\}$. Получим высказывание:

$$\forall n\in\mathbb{N}\left(A(n)\sim(\exists m\in\mathbb{N}\,\exists k\in\mathbb{N}\,(m\neq 1\wedge m\neq n\wedge n=km)\right).\ \blacktriangle$$

Пример 4. Записать с помощью кванторов высказывание неопределенное высказывание $A(m,n)$, заданное на множестве натуральных чисел: $A(m,n)\equiv\{$Числа m и n не имеют общих делителей, отличных от $1\}$.

Решение. Высказывание означает, что если числа m и n имеют общий делитель a, то он равен 1:

$$A(m,n)\equiv\{\forall a\in\mathbb{N}\left((\exists b\in\mathbb{N}\,(m=ab))\wedge(\exists c\in\mathbb{N}\,(n=ac)\right)\Rightarrow(a=1)\}.\ \blacktriangle$$

§ 3. Некоторые приемы доказательства

Пусть $A(x)$, $B(x)$ – неопределенные высказывания, заданные на множестве X. Рассмотрим теорему

$$\forall x\in X\ A(x)\Rightarrow B(x).$$

Эту теорему можно выразить одной из следующих формулировок:

если $A(x)$, то $B(x)$,
из $A(x)$ следует $B(x)$,
$A(x)$ влечет за собой $B(x)$,
B необходимое условие для A,
A достаточное условие для B.

На примере геометрических фигур полезно рассмотреть понятия необходимых достаточных условий. Так из принадлежности фигуры определенному классу следует выполнимость некоторых необходимых условий для элементов фигуры, называемых *свойствами фигуры*. Соответственно выполнимость некоторых условий для элементов фигуры является достаточным для принадлежности к определенному классу – их называют *признаками фигуры*.

Например, используя определение (ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны), приведем в таблице свойства и признаки ромба.

Свойства ромба	Признаки ромба
1. Для ромба выполняются все свойства параллелограмма.	1. Если две смежные стороны параллелограмма равны, то он – ромб.
2. Диагонали ромба перпендикулярны.	2. Если диагонали параллелограмма пересекаются под прямым углом, то он – ромб.
3. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.	3. Если одна из диагоналей параллелограмма является биссектрисой, т.е. делит содержащие её углы пополам, то он – ромб.
4. Сумма квадратов диагоналей ромба равна квадрату его стороны, умноженному на четыре.	4. Если все высоты параллелограмма равны, то он – ромб.
5. Точка пересечения диагоналей есть его центр симметрии.	5. Если диагонали делят параллелограмм на четыре равных прямоугольных треугольника, то он – ромб.
6. В любой ромб можно вписать окружность, центром которой является точка пересечения его диагоналей.	6. Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он – ромб.

Запишем теоремы, связанные с теоремой $\forall x \in X\ A(x) \Rightarrow B(x)$:

$\forall x \in X\ A(x) \Rightarrow B(x)$ – *обратная*;

$\forall x \in X\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ – *противоположная*;

$\forall x \in X\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ – *противоположная обратной*.

Так как высказывания $\forall x \in X\ A(x) \Rightarrow B(x)$ и $\forall x \in X\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ эквивалентны, то прямая теорема справедлива в том и только в том случае, когда справедлива теорема, противоположная обратной. На этом основывается *метод доказательства от противного*.

Пример 1. Определить, верны ли следующие теоремы:

$T_1 \equiv$ {Для того, чтобы произведение двух чисел было положительным, необходимо, чтобы оба числа были положительны};

$T_2 \equiv$ {Для того, чтобы произведение двух чисел было положительным, достаточно, чтобы оба числа были положительны};

$T_3 \equiv$ {Для того, чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, необходимо, чтобы прямые пересекались};

$T_4 \equiv$ {Для того, чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, достаточно, чтобы прямые пересекались};

$T_5 \equiv$ {Для того, чтобы через две прямые в пространстве можно было провести плоскость, необходимо, чтобы прямые пересекались или были параллельны}.

Решение. Сформулируем теоремы в виде «*если* A, *то* B»:

$T_1 \equiv$ {Если произведение двух чисел положительно, то оба числа положительны} – неверно.

$T_2 \equiv$ {Если два числа положительны, то их произведение положительно} – верно.

$T_3 \equiv$ {Если через две прямые в пространстве можно провести плоскость, то эти прямые пересекаются} – неверно.

$T_4 \equiv$ {Если две прямые в пространстве пересекаются, то через них можно провести плоскость} – верно.

$T_5 \equiv$ {Если через две прямые в пространстве можно провести плоскость, то эти прямые либо пересекаются, либо параллельны} – верно. ▲

Пример 2. Сформулировать следующие теоремы в виде *B необходимо для A* и *A достаточно для B*:

$T_1 \equiv$ {Если треугольник равносторонний, то он равнобедренный};

$T_2 \equiv$ {Если все углы треугольника равны между собой, то треугольник равносторонний}.

Решение. В теореме T_1 неопределенные высказывания $A(\vartriangle) \equiv \{\vartriangle -$ равносторонний$\}$ и $B(\vartriangle) \equiv \{\vartriangle -$ равнобедренный$\}$. $T_1 \equiv \{$Для того, чтобы треугольник был равносторонним, необходимо, чтобы он был равнобедренным$\} \equiv \{$Для того, чтобы треугольник был равнобедренным, достаточно, он был равносторонним$\}$;

В теореме T_2 неопределенные высказывания $A(\vartriangle) \equiv \{$ все углы $\vartriangle$ равны между собой$\}$ и $B(\vartriangle) \equiv \{\vartriangle -$ равносторонний$\}$. $T_2 \equiv \{$Для того, чтобы все углы треугольника были равны между собой, необходимо, чтобы треугольник был равносторонним$\} \equiv \{$Для того, чтобы треугольник был равносторонним, достаточно, чтобы все его углы были равны между собой$\}$. ▲

Пример 3. Сформулировать символически с помощью кванторов теорему:

Если суммы противоположных внутренних углов четырехугольника равны между собой, то около него можно описать окружность.

Сформулировать (не в символическом виде) для нее обратную, противоположную, противоположную обратной теоремы.

Решение. Обозначим через M множество точек плоскости, M_4 – множество всех четырехугольников. Тогда теорема символически запишется следующим образом:

$$\forall ABCD \in M_4 \ (\angle ABC + \angle CDA = \angle BCD + \angle DAB \Rightarrow \exists O \in M (OA = AB = OC = AD).$$

Обратная теорема: *Если около четырехугольника можно описать окружность, то суммы его противоположных внутренних углов равны между собой.*

Противоположная теорема: *Если суммы противоположных внутренних углов четырехугольника не равны между собой, то около него нельзя описать окружность.*

Теорема, противоположная обратной: *Если около четырехугольника* нельзя *описать окружность, то суммы его противоположных внутренних углов не равны между собой.* ▲

При доказательстве теоремы часто строится высказывание, являющееся отрицанием теоремы, и доказывается его ложность. Действительно, пусть теорема сформулирована в виде высказывания

$$\forall x \in X \ A(x) \Rightarrow B(x).$$

Это высказывание истинно в том и только в том случае, когда ложно его отрицание. Построим отрицание:

$$\overline{\forall x \in X \ A(x) \Rightarrow B(x)} = \exists x \in X \ \overline{A(x) \Rightarrow B(x)} = \exists x \in X \ A(x) \wedge \overline{B(x)}.$$

Следует особо подчеркнуть, что в словесных формулировках теорем не всегда присутствуют слова «для любого», однако они подразумеваются по смыслу. Поэтому отрицание начинается со слова «существует».

Пример 4. Сформулировать символически с помощью кванторов теорему:

Если две прямые на плоскости перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.

Построить отрицание теоремы и сформулировать его не в символическом виде.

Решение. Обозначим через L множество прямых на плоскости.

Запишем символически теорему: $\forall a \in L \ \forall b \in L \ \forall c \in L \left((a \perp c \wedge b \perp c) \Rightarrow a \parallel b\right)$.

Построим отрицание теоремы сначала в символическом виде:

$$\overline{\forall a \in L \ \forall b \in L \ \forall c \in L \left((a \perp c \wedge b \perp c) \Rightarrow a \parallel b\right)} = \exists a \in L \ \exists b \in L \ \exists c \in L : (a \perp c \wedge b \perp c \wedge a \nparallel b).$$

Сформулируем последнее высказывание: На плоскости найдутся две пересекающиеся прямые, перпендикулярные одной и той же прямой. ▲

Замечание. Доказательство этой теоремы проводится именно путем доказательства ложности отрицания. Предположение о том, что на плоскости найдутся две пересекающиеся прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, приводит к противоречию. Отрицание теоремы ложно, сама теорема – истинна.

Пример 5. Записать символически с помощью кванторов следующую теорему:

Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, и эта точка является центром описанной около треугольника окружности.

Сформулировать (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной. Построить отрицание обратной теоремы и сформулировать ее не в символическом виде.

Решение. Обозначим через X множество точек на плоскости, X_2 – множество отрезков X_3 – множество треугольников. Зададим на множестве упорядоченных четверок $(p_1, p_2, p_3, \vartriangle ABC)$, где $p_1 \in X_2$, $p_2 \in X_2$, $p_3 \in X_2$ – отрезки, $\vartriangle ABC \in X_3$ – треугольник, неопределенное высказывание $P(p_1, p_2, p_3, \vartriangle ABC) \equiv$ {Отрезки p_1, p_2, p_3 являются различными медианами треугольника $\vartriangle ABC$ }.

На множестве упорядоченных четверок (O, p_1, p_2, p_3), где $O \in X$ – точка, $p_1 \in X_2$, $p_2 \in X_2$, $p_3 \in X_2$ – отрезки, зададим неопределенное высказывание:

$$R(O, p_1, p_2, p_3) \equiv \{\text{Отрезки } p_1, p_2, p_3 \text{ пересекаются в точке } O\}.$$

Зададим также на множестве упорядоченных пар $(O, \vartriangle ABC)$, где $O \in X$ – точка, $\vartriangle ABC \in X_3$ – треугольник, неопределенное высказывание:

$$Q(O, \vartriangle ABC) \equiv \{\text{Точка } O \text{ является центром окружности, описанной около треугольника } \vartriangle ABC\}.$$

Тогда исходная теорема записывается в виде:

$$\forall \vartriangle ABC \in X_3 \ \forall p_1 \in X_2, \forall p_2 \in X_2 \left((P(p_1, p_2, p_3, \vartriangle ABC) \Rightarrow \wedge \forall O \in X : (R(O, p_1, p_2, p_3) \wedge Q(O, \vartriangle ABC) \right).$$

Обратная теорема: *Если три отрезка пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной около некоторого треугольника окружности, то данные отрезки являются серединными перпендикулярами к сторонам этого треугольника.*

Противоположная теорема: *Если три отрезка не являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника, то либо они не пересекаются в одной точке, либо точка, в которой они пересекаются, не является центром описанной около этого треугольника окружности.*

Теорема, противоположная обратной: *Если три отрезка не пересекаются в одной точке, или пересекаются в точке, не являющейся центром описанной около некоторого треугольника окружности, то данные отрезки не являются серединными перпендикулярами к сторонам этого треугольника.*

Отрицание обратной:

$$\exists \vartriangle ABC \in X_3 \ \exists p_1 \in X_2, \exists p_2 \in X_2 \left((P(p_1, p_2, p_3, \vartriangle ABC) \wedge \ \forall O \in X \ \overline{(R(O, p_1, p_2, p_3)} \wedge \overline{Q(O, \vartriangle ABC)} \right).$$

То есть найдется треугольник, в котором серединные перпендикуляры либо не пересекаются в одной точке, либо пересекаются в одной точке, но это точка не является центром описанной окружности.

Дидактические материалы

Контрольная работа №1 (на 1 урок).

Вариант 1

1. С помощью таблицы истинности проверьте, верно ли равенство:

$$A \vee (B \Rightarrow C) = (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)?$$

2. Постройте отрицание формулы $\overline{BA} \vee (B \Rightarrow A) \vee B\overline{A}$ и упростите полученную формулу.

3. Запишите символически с помощью кванторов следующее высказывание:

Существуют три рациональных числа, сумма и произведение которых равны 1.

4. Запишите символически с помощью кванторов данную теорему:

Если на плоскости две прямые перпендикулярны третьей,
то они либо параллельны, либо совпадают.

Сформулируйте (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной.

5. Постройте отрицание обратной теоремы из предыдущего пункта и сформулируйте ее (не в символическом виде).

Вариант 2

1. С помощью таблицы истинности проверьте. верно ли равенство:

$$A \wedge (B \Rightarrow C) = (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C)\ ?$$

2. Постройте отрицание формулы $\overline{B}A \vee (\overline{B} \Rightarrow A) \vee B\overline{A}$ и упростите полученную формулу.

3. Запишите символически с помощью кванторов следующее высказывание:

В ряду натуральных чисел существует 100 *идущих подряд составных чисел.*

(Число называется *составным*, если оно имеет делители, отличные от 1 и самого себя).

4. Запишите символически с помощью кванторов данную теорему:

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

Сформулируйте (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной.

5. Постройте отрицание противоположной теоремы из предыдущего пункта и сформулируйте ее (не в символическом виде).

Вариант 3

1. С помощью таблицы истинности проверьте, верно ли равенство:

$$A \Rightarrow (B \wedge C) = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)\ ?$$

2. Постройте отрицание формулы $B\overline{A} \vee (B \Rightarrow \overline{A}) \vee \overline{BA}$ и упростите полученную формулу.

3. Запишите символически с помощью кванторов следующее высказывание:

В прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются целыми числами,
длины обоих катетов не могут быть нечетными числами.

4. Запишите символически с помощью кванторов данную теорему:

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость,
то другая прямая пересекает эту плоскость.

Сформулируйте (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной.

5. Постройте отрицание обратной теоремы из предыдущего пункта и сформулируйте ее (не в символическом виде).

Вариант 4

1. С помощью таблицы истинности проверьте, верно ли равенство:

$$(B \Rightarrow C) \wedge A = (B \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow A)\,?$$

2. Постройте отрицание формулы $B\overline{A} \vee (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \vee \overline{BA}$ и упростите полученную формулу.

3. Запишите символически с помощью кванторов следующее высказывание:

Не существует такого нечетного числа,
сумма всех делителей которого в два раза больше его самого.

4. Запишите символически с помощью кванторов данную теорему:

В ромбе диагонали перпендикулярны,
и делятся точкой пересечения пополам.

Сформулируйте (не в символическом виде) для нее теоремы: обратную, противоположную и противоположную обратной.

5. Постройте отрицание противоположной теоремы из предыдущего пункта и сформулируйте ее (не в символическом виде).

Глава 2. Метод математической индукции

Данная глава посвящена такому важному приему доказательств, как метод математической индукции. В данной главе рассматриваются только приемы доказательства равенств для сумм и произведений, делимости выражений и доказательства неравенств. Следует обратить особое внимание на выделение этапов доказательств методом математической индукции и на его обобщения.

Принцип математической индукции

При доказательствах с помощью метода математической индукции рассматриваются неопределенные высказывания $A(n)$ на множестве натуральных чисел. Если истинно высказывание $A(1)$, и для всякого натурального числа k из истинности высказывания $A(k)$ следует истинность высказывания $A(k+1)$, то высказывание $A(n)$ истинно при всех натуральных n.

С помощью логических символов принцип математической индукции можно записать следующим образом:

$$\left(A(1) \wedge \left(\forall k \in \mathbb{N}\ A(k) \Rightarrow A(k+1)\right)\right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}\ A(n)\right).$$

Из логической записи принципа математической индукции видно, что новый индекс k можно и не вводить, а заменить высказывание:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

на высказывание:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

При доказательствах методом математической индукции важно четко выделять следующие шаги доказательства:

1. Формулировка и проверка истинности высказывания $A(1)$ (*базис индукции*).
2. Формулировка и предположение об истинности высказывания $A(k)$ (*предположение индукции*).
3. Формулировка высказывания $A(k+1)$ и проверка истинности высказывания $\forall k \in \mathbb{N}\ A(k) \Rightarrow A(k+1)$ (*индуктивного перехода*).
4. Формулировка вывода о том, что высказывание $A(n)$ выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$.

При доказательстве методом математической индукции часто возникает ошибка из-за того, что импликация $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ истинна не для всех натуральных n.

Если эта импликация истинна при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, то базу индукции нужно проверять для высказывания $A(n_0)$. Тогда можно делать вывод о том, что высказывание $A(n)$ истинно при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

§ 1. Использование метода математической индукции для доказательства равенств

С помощью метода математической индукции доказываются, в частности, формулы для вычисления суммы n слагаемых, которую можно записать как $S(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. При этом, при доказательстве истинности высказывания $n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

сумма $n+1$ слагаемых $S(n+1)$ представляется в виде суммы $S(n) + a_{n+1}$, где a_{n+1} – последнее слагаемое в сумме $S(n+1)$.

Пример 1. Доказать, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Доказательство. В данном случае высказывание $A(n)$ представляет собой равенство:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Шаг 1 (*базис индукции*). При $n = 1$ равенство верно, т.е. высказывание $A(1)$ истинно:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}.$$

Шаг 2 (*предположение индукции*). Пусть $n=k$. Обозначим через $S(k)$ сумму $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$ и предположим, что верно равенство $S(k)=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$.

Шаг 3 (*индуктивный переход*). Пусть $n=k+1$. Докажем, что верно равенство $S(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$, т.е. истинно высказывание $\forall k\ A(k)\Rightarrow A(k+1)$.

Действительно,

$$S(k+1)=S(k)+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\underbrace{\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}}_{\text{по предположению индукции}}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k(k+1)}{(2k+1)}\left(\frac{k}{2}+\frac{(k+1)}{2k+3}\right)=\frac{(k+1)(2k^2+5k+3)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Таким образом, равенство справедливо при всех $n\in\mathbb{N}$. ▲

Замечание. Сумму чисел $a_1, a_2,..., a_n$ принято записывать в виде

$$a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Таким образом, равенство, которое требовалось доказать в предыдущем примере, можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Следует отметить, что с помощью метода математической индукции даются также определения математических понятий. Например, многоточие в определении степени с натуральным показателем n, а именно:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n\text{ множителей}},$$

фактически означает индукцию по n.

Строго говоря, сначала определим $a^1=a$. Затем предположим, что a^n уже определено, тогда определим $a^{n+1}=a^n\cdot a$. Тогда по методу математической индукции a^n определено при любом $n\in\mathbb{N}$.

Приведем словесное определение факториала натурального числа n (обозначается $n!$). *Факториалом числа n* ($n\in\mathbb{N}$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n.$$

Теперь дадим это определение с помощью индукции. Положим $1!=1$. Пусть $n!$ уже определено, тогда положим $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$. Тогда по методу математической индукции $n!$ определено при любом $n\in\mathbb{N}$.

Пример 2. Доказать, что при всех $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2.$$

Доказательство.

Шаг 1 (*базис индукции*). При $n=1$ равенство является верным: $\frac{1\cdot(1+1)!}{2^1}=1$ и $\frac{(1+2)!}{2^1}-2=1$, т.е. $\frac{1\cdot(1+1)!}{2^1}=\frac{(1+2)!}{2^1}-2$.

Шаг 2 (*предположение индукции*). Предположим, что при $n=m$ верно равенство:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k}=\frac{(m+2)!}{2^m}-2.$$

Шаг 3 (*индуктивный переход*). Докажем, что при $n=m+1$ верно равенство:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k}=\frac{(m+3)!}{2^n}-2\,.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{k\cdot(k+1)!}{2^k}+\frac{(m+1)(m+2)!}{2^m}=$$

$$=\underbrace{\frac{(m+2)!}{2^m}-2}_{\text{по предположению индукции}}+\frac{(m+1)(m+2)!}{2^{m+1}}=\frac{(m+2)!(2+(m+1))!}{2^{m+1}}-2=\frac{(m+3)!}{2^{m+1}}-2\,.$$

Таким образом, по принципу математической индукции равенство справедливо для всех $n\in\mathbb{N}$. ▲

При доказательстве равенства произведения n множителей некоторому числу $P(n)$ произведение можно обозначать

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\prod_{k=1}^{n}a_k\,.$$

При доказательстве методом математической индукции используется равенство:

$$\prod_{k=1}^{n+1}a_k=a_{n+1}\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k\,.$$

Пример 3. Доказать, что при всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}\,.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции по n.

Шаг 1 (*базис индукции*). Пусть $n=1$. Тогда $1-\frac{4}{1}=-3$ и $\frac{1+2}{1-2}=-3$, равенство верно.

Шаг 2 (*предположение индукции*). Пусть при $n=k$:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}\,.$$

Шаг 3 (*индуктивный переход*). Пусть $n=k+1$. Тогда, используя предположение индукции, получим:

$$\underbrace{\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)}_{=\frac{1+2k}{1-2k}\ \text{по предположению индукции}}\cdot\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=\frac{(2k+3)(2k-1)}{(1-2k)(2k+1)}=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}\,.$$

Следовательно, исходное предположение справедливо при всех $n\in\mathbb{N}$. ▲

§ 2. Использование метода математической индукции для доказательства делимости выражений

С помощью метода математической индукции доказываются утверждения о делимости некоторого выражения $P(n)$, зависящего от n, на натуральное число k. При этом вместо слова «делится» в математике используется обозначение отношения делимости «$\vdots$». При этом доказательство того, что для всякого натурального n из делимости $P(n)$ на k следует делимость $P(n+1)$ на k можно проводить двумя способами.

Во-первых, можно рассмотреть разность $P(n+1)-P(n)$ и доказать, что она делится на k. Тогда из того, что $\big(P(n+1)-P(n)\big)\vdots k$ будет следовать, что $P(n+1)\vdots k$.