Содержание

Введение

В методических рекомендациях ФИПИ[*] отмечается, что задание 19 высокого уровня сложности в КИМ 2011—2024 гг. составлялось таким образом, что, «с одной стороны, оно тематически вполне было доступно даже ученикам основной школы, а с другой стороны, для его решения требовалась не столько формальная математическая образованность (знание терминов, формул, правил, готовых алгоритмов), сколько общая математическая культура, то есть сформированная привычка самостоятельно ориентироваться в математической ситуации, строить и исследовать математические модели». Другими словами, задание 19 направлено на проверку у выпускников умения *строить и исследовать простейшие математические модели* и носит оценочно-экспертный характер.

При составлении этого задания использовался подход, при котором оно разбивалось на систему усложняющихся вопросов, т. е. содержало 2—3 пункта. Тем самым в формулировке задания участникам ЕГЭ предлагался определённый путь, по которому можно было шаг за шагом продвигаться в решении наиболее сложного задания КИМ. Это позволяло экзаменуемым, не увидевшим полностью путь решения всей задачи, но добившимся определённого продвижения, получить по крайней мере 1 первичный балл.

Отметим, что доля выпускников, приступивших к выполнению этого задания вариантов ЕГЭ в 2011—2024 гг., в среднем составляла 12—15% от общего числа сдающих. В таблице указан процент выпускников, получивших в разные годы за выполнение этого задания от 1 до 4 баллов.

<table>
<tr><th rowspan="2">Баллы</th><th colspan="4">Процент решаемости задания 19, %</th></tr>
<tr><th>2021 г.</th><th>2022 г.</th><th>2023 г.</th><th>2024 г.</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">Средний процент решаемости 11,4 %</td><td>19,3</td><td>20,3</td><td rowspan="4">Средний процент решаемости 15,4 %</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4,6</td><td>11,6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,27</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,69</td><td>1,7</td></tr>
</table>

Приведём пример выставления баллов за решение задания 19 из ЕГЭ 2023 года в соответствии с критериями, аналогичными представленным в демонстрационном варианте ЕГЭ 2024 года.

---

[*] www.fipi.ru.

Пример (ЕГЭ-2023). *В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21%.*

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30%, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получек верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Отметим принципиальный момент, возникающий при решении подобных заданий. Если в задании ставится вопрос «Может ли выполняться некоторое условие?», то в случае ответа «да» достаточно привести пример, а в случае ответа «нет» необходимо привести доказательство.

В нашем пособии представлены самые разные по сложности задачи, которые могли бы быть даны в качестве задания 19 на ЕГЭ по математике профильного уровня.

Все задачи сгруппированы по темам. Каждый раздел начинается со списка необходимых теоретических сведений или набора опорных задач. Приводятся примеры решения. Даны также задачи для самостоятельного выполнения. Иногда после номера задачи указывается название и год проведения олимпиады, на которой предлагалась данная задача. Ко всем заданиям для самостоятельного решения в конце пособия имеются ответы, указания к выполнению или подробные решения.

В пособии используются следующие сокращения:

ЕГЭ — единый государственный экзамен;

ВМО — Всесоюзная математическая олимпиада;

МИОО — Московский институт открытого образования;

МР — Математическая регата;

ММО — Московская математическая олимпиада;
РМО — Российская математическая олимпиада;
ТГ — Турнир городов.

Успехов вам!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты legionrus@legionrus.com.

§ 1. Делимость целых чисел

1.1. Деление без остатка

1. Свойства делимости целых чисел

Пусть n — целое число ($n \in Z$), m — натуральное число ($m \in N$). Говорят, что n *делится на* m, если существует целое число p ($p \in Z$) такое, что $n = mp$.

Число m называется *делителем* числа n, p — *частным* от деления n на m. Наибольшее натуральное число, являющееся натуральным делителем каждого из натуральных чисел m и n, называют *наибольшим общим делителем* этих чисел и обозначают НОД(m, n) или просто (m, n).

Например, если $m = 36$ а $n = 84$, то НОД$(36, 84) = 12$.

Два натуральных числа m и n называют *взаимно простыми* и пишут $(m, n) = 1$, если единственным общим натуральным делителем этих чисел является число единица.

Например, числа 12 и 35 взаимно просты, так как натуральными делителями числа 12 являются числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12, а натуральными делителями числа 35 являются числа 1, 5, 7, 35.

Перечислим свойства делимости суммы (разности) и произведения чисел, считая, что $a \in Z$, $b \in Z$, $m \in N$.

1. Если a и b делятся на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также делятся на m.

2. Если a и b делятся на m, то при любых целых числах k и l числа $ak + bl$ и $ak - bl$ также делятся на m.

3. Если a делится на m, а b не делится на m, то числа $a + b$ и $a - b$ также не делятся на m.

4. Если a делится на m, а m делится на $k \in N$, то число a также делится на k.

5. Если a делится на m, а b не делится на m, то число ab делится на m.

6. Если a делится на каждое из чисел m и k, причём $(m, k) = 1$, то a делится на произведение mk.

7. Если a делится на m, то ak делится на mk при любом $k \in N$.

8. Если ab делится на m и b взаимно просто с m, то a делится на m.

Ограничимся доказательством свойства 1.

Доказательство. Если целые числа a и b делятся на m, то существуют числа $p \in Z$ и $q \in Z$ такие, что $a = mp$, $b = qm$. Отсюда следует, что

$$a + b = mp + mq = (p + q)m,$$
$$a - b = mp - mq = (p - q)m.$$

Так как числа $p + q$ и $p - q$ — целые, то числа $a + b$ и $a - b$ делятся на m. Свойство доказано.

Пример 1. *Натуральные числа* $3n + 2$ *и* $8n + 3$ *делятся на натуральное число* $p \neq 1$. *Найдите* p.

Решение. Так как числа $3n + 2$ и $8n + 3$ делятся на p, то и число $8(3n + 2) - 3(8n + 3) = 7$ должно делиться на p. Но единственное натуральное число $p \neq 1$, на которое делится 7, равно 7. Значит, $p = 7$. Например, при $n = 4$ получаем числа 14 и 35, которые делятся на 7.

Ответ: $p = 7$.

2. Простые и составные числа

Натуральное число p называется *простым*, если $p > 1$ и p не имеет положительных делителей, отличных от 1 и p.

Из определений следует, что если p и p_1 — простые числа и p делит p_1, то $p = p_1$. Кроме того, для любого натурального числа его наименьший отличный от единицы положительный делитель является простым числом.

Натуральное число $n > 1$ называется *составным*, если n имеет, по крайней мере, один положительный делитель, отличный от 1 и n.

Число 1 не считается ни простым, ни составным.

Пример 2. *Докажите, что число* $a = 4 \cdot 16^{12} - 2^{40}$ *делится на* 33.

Доказательство. Так как $4 \cdot 16^{12} = 2^2 \cdot 2^{48} = 2^{50}$, то $a = 2^{50} - 2^{40} = 2^{40}(2^{10} - 1) = 2^{40}(2^5 - 1)(2^5 + 1) = 2^{40} \cdot 31 \cdot 33$. Отсюда следует, что a делится на 33.

Пример 3. *Докажите, что число* $a = 8n^2 + 10n + 3$ *является составным при любом натуральном* n.

Доказательство. Число a является составным при любом натуральном n, поскольку $a = 8n^2 + 10n + 3 = (2n + 1)(4n + 3)$, где числа $2n + 1$ и $4n + 3$ натуральные, бо́льшие единицы.

Пример 4. а) *Докажите, что число* $\underbrace{11\ldots1}_{100\ \text{цифр}}2\underbrace{11\ldots1}_{100\ \text{цифр}}$ *составное.*

б) *Докажите, что число* $2^{\overbrace{11\ldots11}^{100\ \text{цифр}}\overbrace{22\ldots22}^{100\ \text{цифр}}} + 1$ *составное.*

в) *Докажите, что число* $\underbrace{11\ldots11}_{100\ цифр}\underbrace{22\ldots22}_{100\ цифр}$ *является произведением двух последовательных натуральных чисел.*

Доказательство. а) Верно равенство

$$\underbrace{11\ldots1}_{100}2\underbrace{11\ldots1}_{100}=\underbrace{11\ldots11}_{101}\underbrace{00\ldots0}_{100}+\underbrace{11\ldots11}_{101}=$$
$$=\underbrace{11\ldots11}_{101}\cdot(1\underbrace{00\ldots0}_{100}+1)=\underbrace{11\ldots11}_{101}\cdot1\underbrace{00\ldots0}_{99}1.$$

Следовательно, данное число — составное.

б) Сумма цифр числа, стоящего в показателе степени, равна $(1+2)\cdot100=300$, то есть делится на 3, и его можно представить в виде $\underbrace{11\ldots11}_{100}\underbrace{22\ldots22}_{100}=3n$, где n — некоторое натуральное число. Тогда верно равенство $2^{\overbrace{11\ldots11}^{100}\overbrace{22\ldots22}^{100}}+1=2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$.

Следовательно, данное число — составное.

в) Рассмотрим числа вида $\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots22}_{n}$. При $n=1$ имеем $12=3\cdot4$.

При $n=2$ имеем $1122=1100+22=11\cdot(100+2)=11\cdot(99+3)=$ $=33\cdot(33+1)$.

При $n=3$ имеем $111222=111000+222=111\cdot(1000+2)=$ $=111\cdot(999+3)=333\cdot(333+1)$.

Соответственно, в общем случае имеем

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots0}_{n}+\underbrace{22\ldots2}_{n}=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot\Big(1\underbrace{00\ldots0}_{n}+2\Big)=$$
$$=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot\Big(\underbrace{99\ldots9}_{n}+3\Big)=\underbrace{33\ldots3}_{n}\cdot\Big(\underbrace{33\ldots3}_{n}+1\Big).$$

Следовательно, числа вида $\underbrace{11\ldots11}_{n}\underbrace{22\ldots22}_{n}$ при любом натуральном n являются произведением двух последовательных натуральных чисел $\underbrace{33\ldots3}_{n}$ и $\underbrace{33\ldots3}_{n}+1$.

Пример 5. (ММО, 11-й класс, 2006/2007). *Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?*

Решение. Пусть искомое число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, \ldots, p_k$ — простые числа и $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Так как n делится на каждое из чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_k - 1$, а они все, кроме, возможно, числа $p_1 - 1$, — чётные, то это значит, что среди сомножителей $p_1, p_2, \ldots, p_k$ присутствует число 2, то есть $p_1 = 2$. Тогда $n = 2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Рассмотрим число $p_k - 1 = 2q_k$. По условию число $2q_k$ делит $n = 2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Это значит, что q_k является делителем числа $p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$. Это возможно, если q_k есть некоторое число или произведение некоторого набора чисел из набора $p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Учитывая это условие и то, что число $n_1 = 2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$ обладает тем же свойством, что и число n, имеем способ получения искомых произведений: на каждом шаге следующий множитель p_k определяется набором множителей $2, p_2, \ldots, p_{k-1}$.

Поэтому будем строить искомые произведения, начав с двух сомножителей.

1. Пусть $k = 2$. Тогда $n = 2 \cdot p_2$. Учитывая, что $p_2 - 1 = 2q_2$ и $2q_2$ делит число 2, получаем $q_2 = 1$. Тогда $p_2 = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

2. Пусть $k = 3$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot p_3$. Учитывая, что $p_3 - 1 = 2q_3$ и $2q_3$ делит число $2 \cdot 3$, получаем $q_3 = 3$. Тогда $p_3 = 7$ и $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

3. Пусть $k = 4$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p_4$. Учитывая, что $p_4 - 1 = 2q_4$ и $2q_4$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7$, получаем возможные значения q_4: $q_4 = 3$ или $q_4 = 7$, или $q_4 = 3 \cdot 7 = 21$. Отсюда следует, что $p_4 = 7$ (такой множитель уже есть) или $p_4 = 15$ (не простое число), или $p_4 = 43$. Значит, $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$.

4. Пусть $k = 5$. Тогда $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot p_5$. Учитывая, что $p_5 - 1 = 2q_5$ и $2q_5$ делит число $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$, получаем возможные значения q_5 и p_5:

$q_5 = 3, p_5 = 7$ (такой множитель есть);
$q_5 = 7, p_5 = 15$ (не простое число);
$q_5 = 3 \cdot 7, p_5 = 43$ (такой множитель есть);
$q_5 = 43, p_5 = 87$ (не простое число, делится на 3);
$q_5 = 3 \cdot 43, p_5 = 257$ (не простое число, делится на 7);
$q_5 = 7 \cdot 43, p_5 = 603$ (не простое число, делится на 3);
$q_5 = 3 \cdot 7 \cdot 43, p_5 = 1807$ (не простое число, делится на 13).

Следовательно, искомого произведения из пяти сомножителей не существует, а значит, не существует подобных произведений и с бо́льшим числом сомножителей.

Ответ: 6, 42, 1806.

Пример 6. (ММР, 11-й класс, 2004/2005). *Натуральное число называется примарным, если оно является степенью простого числа с натуральным показателем (например, 7^1 или 13^4). Найдите самую длинную цепочку примарных чисел, идущих подряд.*

Решение. Числа 2, 3, 4, 5 удовлетворяют условию задачи. Допустим, имеется цепочка примарных чисел, идущих подряд, содержащая более четырёх чисел. Тогда в цепочке имеется хотя бы два чётных примарных числа, которые являются степенями единственного чётного простого числа. Так как разность этих чисел равна 2, то этими числами могут быть только 2 и 4. Числа 1 и 6 не являются степенью простого числа. Поэтому остаётся цепочка примарных чисел, состоящая из четырёх чисел: 2, 3, 4, 5.

Ответ: $2, 3, 4, 5$.

Пример 7. (МР, 9-й класс, 1998/1999). *В трамвае ехали 60 человек: контролёры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролёров) и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролёров. Общее количество контролёров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?*

Решение. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в пять раз меньше количества необычных пассажиров (то есть контролёров, кондукторов, лжеконтролёров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично количество кондукторов и лжекондукторов в восемь раз меньше количества необычных пассажиров, значит, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Следовательно, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров — обычные.

Ответ: 20.

Пример 8. (РМО, 9-й класс, 1979/1980). *Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако оказалось, что при этом не удаётся посадить одного туриста. Когда же один автобус уехал пустым, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Выяс-*

ните, сколько первоначально было автобусов и сколько туристов в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 *человек.*

Решение. Обозначим через k первоначальное число автобусов. Из условия задачи следует, что $k \geqslant 2$ и число всех туристов равно $22k + 1$. После отъезда одного автобуса всех туристов удалось рассадить поровну в $k - 1$ оставшихся автобусов. Следовательно, число $22k + 1$ должно делиться на $k - 1$. Таким образом, задача свелась к определению всех целых $k \geqslant 2$, для которых число $n = \dfrac{22k+1}{k-1}$ является целым и удовлетворяет неравенству $n \leqslant 32$.

Число $n = 22 + \dfrac{23}{k-1}$ будет целым только тогда, когда число $\dfrac{23}{k-1}$ будет целым. Последнее возможно только при $k = 2$ и при $k = 24$. Если $k = 2$, то $n = 45$ (не удовлетворяет условию $n \leqslant 32$), а если $k = 24$, то $n = 23$.

Следовательно, первоначально было 24 автобуса, а число всех туристов

$$n(k-1) = 23 \cdot 23 = 529.$$

Ответ: 24 автобуса; 529 туристов.

Пример 9. (Пробный ЕГЭ-2012, СПб.) *На доске написано число* 7. *Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).*

а) *Может ли в какой-то момент на доске оказаться число* 2012?

б) *Может ли в какой-то момент сумма всех чисел равняться* 63?

в) *Через какое наименьшее время на доске может появиться число* 784?

Решение. а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, в первую минуту Вася запишет удвоенное число, то есть 14. Первое число 7 и второе число 14 делятся на 7, поэтому при удвоении или сложении чисел будут получаться числа, которые делятся на 7. Так как число 2012 не делится на 7, то оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Например, 7, 14, 14, 14, 14 (в условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз).

в) Так как все числа делятся на 7, то упростим задачу, разделив все числа с первого числа 7 до последнего числа 784. Количество операций не