Содержание

Введение

Задание 17 — это задача повышенного уровня сложности по планиметрии. Оно проверяет знания и умения ученика выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

Анализ задач по планиметрии из работ ЕГЭ за 2013—2024 гг. выявил следующую их специфику. В первой части решения необходимо проанализировать имеющуюся в условии геометрическую конфигурацию и доказать, что она обладает определённым свойством. Во второй части решения, опираясь на доказанное свойство, необходимо решить задачу на нахождение величин (линейных, угловых, отношений отрезков, площадей фигур).

При проверке задания 17 баллы выставляются в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обосновании решения пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

Геометрические задачи на вычисление в большинстве случаев представляют собой задачи на реализованные ситуации, то есть в них идёт речь о некоторой *заданной* конфигурации и требуется вычислить какой-либо её неизвестный элемент. Реализованность ситуации в условии задачи подразумевает лишь существование соответствующей конфигурации, но не предопределяет её единственность. В таких задачах какие-либо исследования соотношений между числовыми данными, доказывающие существование конфигурации, являются излишними.

В планиметрических задачах под конфигурацией понимается конечное множество точек и прямых, принадлежащих одной плоскости и связанных между собой отношением принадлежности. Иначе её называют геометрической фигурой.

Линейной считают фигуру, представляющую собой точку, отрезок, луч, прямую.

Прямолинейной фигурой считают любой многоугольник.

Плоской *геометрической* фигурой называют любую совокупность точек и линий на плоскости.

В данном пособии приведена определённая классификация планиметрических задач, не претендующая на отражение в полном объёме всего многообразия подобных задач, но включающая в себя бóльшую часть, с которой может встретиться школьник как при подготовке, так и на самом экзамене.

Пособие содержит шесть параграфов. В них приведены основные теоремы и факты, необходимые для решения планиметрических задач, и наборы подготовительных задач и заданий в формате экзамена. Ко всем заданиям даны ответы. В каждом параграфе содержится также образец выполнения задачи в формате ЕГЭ. Параграфы систематизированы по геометрическим конфигурациям, наиболее часто встречающимся в задачах школьного курса.

В пособии используются следующие сокращения:
О — определение, **Т** — теорема.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства `legionrus@legionrus.com`.

§ 1. Треугольник

Треугольник — геометрическая фигура, образованная тремя точками (вершины треугольника), не лежащими на одной прямой, которые соединены между собой отрезками.

1.1. Стороны треугольника

Стороны треугольника — отрезки, соединяющие вершины треугольника.

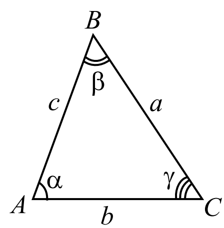

Рис. 1

О1. *Периметр треугольника* — сумма длин его сторон (см. рис. 1):

$$P = a + b + c.$$

Т1. *Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны* ***(неравенство треугольника)****:*

$$\begin{cases} a + b > c, \\ b + c > a, \\ a + c > b. \end{cases}$$

Следствие. Если выполняется равенство $AC + CB = AB$, то точка C лежит на отрезке AB между точками A и B.

Пример 1. На стороне AC треугольника ABC отметили точку E. Известно, что периметр треугольника ABC равен 30, периметр треугольника ABE равен 20, а периметр треугольника BCE — 17. Найдите длину отрезка BE.

Решение. Сумма периметров (см. рис. 2)

$P_{ABE} + P_{BCE} = AB + BE + AE + BC + EC + BE = AB + BC +$
$+ AC + 2BE = P_{ABC} + 2BE$.

$$20 + 17 = 30 + 2BE,$$
$$BE = 3{,}5.$$

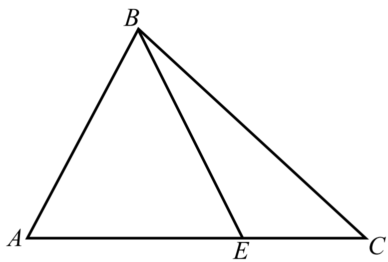

Рис. 2

Ответ: 3,5.

Пример 2. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M (см. рис. 3 на с. 9). К треугольникам ABC, ADC, BAD и BCD применяем неравенство треугольника:

$$AC < AB + BC, \quad AC < AD + DC,$$
$$BD < AB + AD, \quad BD < BC + CD.$$

Складывая эти четыре неравенства, получим

$$2(AC + BD) < 2(AB + BC + CD + AD),$$

или $AC + BD < P_{ABCD}$.

К треугольникам AMB, BMC, CMD и AMD применяем неравенство треугольника:

$$AM + MB > AB, \quad BM + MC > BC,$$
$$MC + MD > CD, \quad MA + MD > AD.$$

Складывая эти четыре неравенства, получим

$$2(AC + BD) > AB + BC + CD + AD,$$

или $AC + BD > 0{,}5 \cdot P_{ABCD}$.

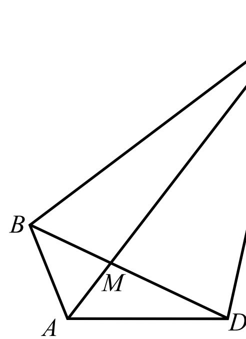

Рис. 3

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен 96 см, а стороны пропорциональны числам 3, 4, 5.

2. Периметр треугольника ABC равен 75 см. Найдите стороны треугольника, если сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см. Основание относится к боковой стороне как 6 : 5. Определите стороны треугольника.

4. Может ли существовать треугольник с такими сторонами: а) 5 м, 10 м, 12 м; б) 1 м, 2 м, 3,3 м; в) 1,2 м, 1 м, 2,2 м?

1.2. Углы треугольника

В треугольнике три внутренних угла. Внутренний угол треугольника образован двумя сторонами треугольника, а внешний угол треугольника образован одной стороной и продолжением другой стороны.

Т2. *Во всяком треугольнике сумма углов равна* $180°$*, или* π *радиан (см. рис. 1 на с. 7), то есть* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Следствие 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Следствие 2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

Следствие 3. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

О2. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$, см. рис. 4):

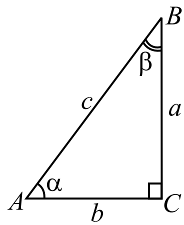

Рис. 4

$$\sin\angle A = \cos\angle B = \frac{a}{c};\ \cos\angle A = \sin\angle B = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle B = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\angle A = \operatorname{tg}\angle B = \frac{b}{a}.$$

Дополнительные теоремы:

Т3. *Сумма двух смежных углов равна* 180°.

Т4. *Вертикальные углы равны.*

Т5. *Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют* 180°.

Т6. *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют* 180°.

Пример 3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BC = 4\sqrt{5}$, $BH = 4$. Найдите $\operatorname{tg}\angle A$.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC сумма $\angle A + \angle B = 90^\circ$ (см. рис. 5 на 11), а в прямоугольном треугольнике BCH $\angle BCH + \angle B = 90^\circ$. Значит, $\angle BCH = \angle A$. Из прямоугольного треугольника BCH, используя теорему Пифагора, находим $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{80 - 16} = \sqrt{64} = 8$.

Тогда $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\angle BCH = \dfrac{BH}{CH} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

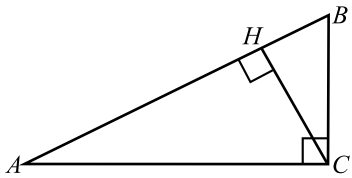

Рис. 5

Пример 4. В треугольнике ABC из вершины C проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов. Первая биссектриса образует со стороной AB угол, равный $40°$. Какой угол образует с продолжением стороны AB вторая биссектриса?

Решение. Пусть указанные биссектрисы пересекают луч AB в точках K и M соответственно (см. рис. 6). Тогда

$$\angle MCK = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90°.$$

В треугольнике KMC находим

$$\angle KMC = 90° - \angle MKC = 90° - 40° = 50°.$$

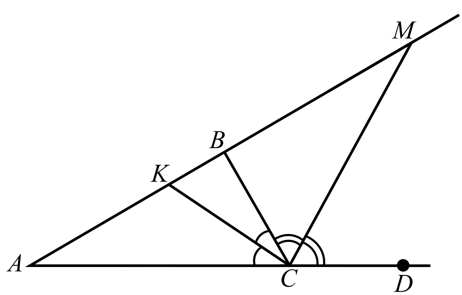

Рис. 6

Ответ: $50°$.

Задачи для самостоятельного решения

5. Один из углов равнобедренного треугольника равен $70°$. Найдите остальные углы.

6. У треугольника один из внутренних углов равен $30°$, а один из внешних — $40°$. Найдите остальные внутренние углы треугольника.

7. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника — острые.

8. Найдите сумму углов при всех вершинах пятиконечной звезды (см. рис. 7).

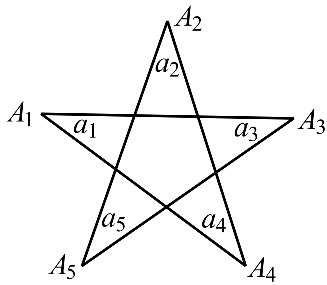

Рис. 7

1.3. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Т7. *Во всяком треугольнике*

1) против равных сторон лежат равные углы (и наоборот):

$$a = b \Leftrightarrow \angle A = \angle B;$$

2) против большей стороны лежит больший угол (и наоборот):

$$a > b \Leftrightarrow \angle A > \angle B.$$

Т8. *Квадрат любой стороны треугольника ABC равен сумме квадратов двух других без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (**теорема косинусов**):*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C.$$

Следствие 1. Пусть c — наибольшая сторона, тогда

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

Следствие 2. Углы треугольника по известным сторонам вычисляют по формулам:

$$\cos\angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \quad \cos\angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$\cos\angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

T9. *В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора), т. е.*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

T10. *Стороны треугольника ABC пропорциональны синусам противолежащих углов (**теорема синусов**):*

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}.$$

Следствие 1. Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}.$$

Следствие 2. В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы (и обратно).

Пример 5. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120°, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите AB.

Решение. Так как $AC = BC = 2\sqrt{3}$, $\angle C = 120^\circ$, то используя теорему косинусов, получаем (см. рис. 8 на с. 14)

$$AB^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot(2\sqrt{3})^2\cos 120^\circ.$$

$$AB^2 = 12 + 12 + 12 = 36.$$

$$AB = 6.$$

Второе решение. В равнобедренном треугольнике ABC (см. рис. 8 на с. 14) угол C равен 120°, поэтому $\angle A = \angle B = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.

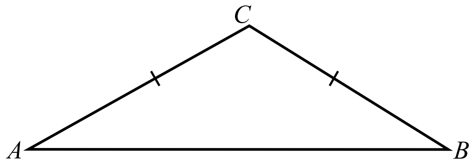

Рис. 8

Используя теорему синусов, получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B}.$$

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}.$$

$$AB = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = 6.$$

Третье решение. В равнобедренном треугольнике ABC (см. рис. 9) проведём высоту BH на основание AB, тогда BH является медианой и биссектрисой треугольника ABC. Отсюда $\angle ACH = 120^\circ : 2 = 60^\circ$, а $\angle CAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Катет CH лежит против угла в 30°, поэтому $CH = \dfrac{1}{2}\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Далее, используя теорему Пифагора, получаем $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{12-3} = \sqrt{9} = 3$, $AB = 2\cdot AH = 2\cdot 3 = 6$.

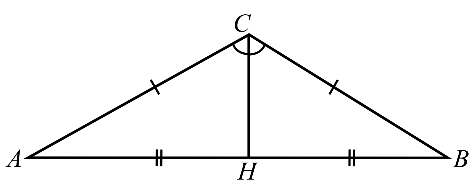

Рис. 9

Ответ: 6.

Пример 6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите высоту CH.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABC (см. рис. 10 на с. 15) катет BC лежит против угла в 30°, поэтому $BC = \dfrac{1}{2}\cdot AB = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.