

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Есть некоторые вещи, подвластные только манге\*.

Если вы открыли эту книгу, то вы принадлежите к одному из следующих типов людей:

Первые — те, кто просто любит мангу и думает: «Математические выкладки, описанные с помощью манги? Потрясающе!» Если вы принадлежите их числу, то немедленно отнесёте эту книгу на кассу — и не пожалеете. У этой манги очень привлекательные рисунки. И неудивительно: их нарисовал популярный художник манги Син Тогами, а сценарий написала Бэком Лтд. — компания, производящая настоящую мангу.

Вы можете возразить: «Манга, обучающая математике, не может быть интересной». На первый взгляд, это так. Когда в издательстве «Омша» (Ohmsha) меня попросили написать эту книгу, я почти отказался. Многие из так называемых «обучающих манг» разочаровывают. В них может быть огромное количество рисунков, но они не являются настоящей мангой. Но после того, как я увидел мангу «Омшы» (это была манга по статистике), я передумал. Её действительно было приятно читать. Издатель сказал, что моя книга будет такой же, поэтому я принял его предложение. Я и раньше часто думал, что мог бы лучше преподавать математику, используя мангу, так что это была хорошая возможность проверить мою идею. Я гарантирую, что чем большим фанатом манги вы являетесь, тем больше вам понравится эта книга. Так чего же вы ждёте? Сейчас же уесите её на кассу и покупайте!

Второй тип людей — это те, кто взял эту книгу с мыслями: «Хоть математика и внушает мне ужас и/или у меня на неё аллергия, манга может помочь мне её понять.» Если вы из их числа, то эта книга для вас. Она не просто объясняет дифференциальное и интегральное исчисление с помощью манги, но и сам способ объяснения основательно отличается от используемого в традиционных учебниках. Во-первых, книга даёт представление о том, что именно делает дифференциальное и интегральное исчисление и для чего оно нужно. Пока вы этого не поймёте, вы не сможете его правильно использовать. Вы просто окажетесь в жалком положении зазубривания формул и правил. Эта книга объясняет все формулы, основанные на идее приближения первого порядка, помогая вам визуализировать значение формул и с лёгкостью их понять. Благодаря этому уникальному методу обучения вы можете быстро и легко перейти от дифференцирования к интегрированию. Более того, я позаимствовал оригинальный метод объяснения дифференцирования и интегрирования тригонометрических и показательных функций, который не описывается в обычных учебниках, — обычно это остаётся какой-то тарабарщиной для многих людей даже после многократных объяснений. Эта книга также идёт дальше, объясняя даже разложение в ряд Тейлора и определение частной производной. Наконец, я привлёк трёх постоянных потребителей исчисления: физику, статистику и экономику, чтобы они составили часть этой книги, предоставив множество примеров практического применения дифференциального и интегрального исчисления. Благодаря всем этим уловкам вы сможете воспринимать исчисление не как трудную науку, а как полезный инструмент.

Я опять же подчеркну: всё это стало возможным благодаря манге. Почему при чтении манги вы можете получить больше информации, чем при чтении романа? Потому что манга — это визуальные данные, представленные в виде комиксов. Исчисление — это ветвь математики, описывающая динамические явления. Таким образом, изучение дифференциального и интегрального исчисления с помощью манги является отличной идеей. Теперь переверните страницу и насладитесь красивой мангой по дифференцированию и интегрированию.

*Хироюки Кодзима  
Ноябрь 2005*

\* Манга — японские комиксы.

# СОДЕРЖАНИЕ

Пролог.	
<b>ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ</b> .....	1

Глава 1.	
<b>ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ ФУНКЦИИ!</b> .....	15
1.1. Аппроксимация функций.....	16
1.2. Относительная погрешность .....	27
1.3. Применение производных.....	32
1.4. Вычисление производной.....	39
1.5. Упражнения к главе 1 .....	41

Глава 2.	
<b>ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ!</b> ....	43
2.1. Производная суммы функций .....	48
2.2. Производная произведения функций.....	53
2.3. Дифференцирование многочленов.....	62
2.4. Нахождение максимумов и минимумов .....	64
2.5. Теорема о среднем .....	72
2.6. Производная частного от деления функций .....	74
2.7. Производная сложной функции.....	75
2.8. Производная обратной функции .....	75
2.9. Формулы для дифференцирования .....	76
2.10. Упражнения к главе 2 .....	76

## Глава 3.

<b>ИНТЕГРИРУЕМ ФУНКЦИИ!</b> .....	77
3.1. Найдём концентрацию спирта .....	82
3.2. Основная теорема интегрирования.....	91
3.3. Применение формул интегрирования .....	95
3.4. Применение основной теоремы интегрирования ...	101
3.5. Сводка по основной теореме интегрирования .....	110
3.6. Упражнения к главе 3 .....	112

## Глава 4.

<b>ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ!</b> .....	113
4.1. Танцы и тригонометрические функции .....	114
4.2. Косинус и тень.....	120
4.3. Интегрирование тригонометрических функций .....	123
4.4. Показательная и логарифмическая функции .....	129
4.5. Обобщение показательной и логарифмической функций.....	133
4.6. Свойства показательной и логарифмической функций.....	138
4.7. Другие применения основных теорем .....	140
4.8. Упражнения к главе 4 .....	142

## Глава 5.

<b>ИЗУЧАЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА!</b> .....	143
5.1. Асагакэ Таймс. Главный офис .....	144
5.2. Как получить разложение в ряд Тейлора .....	153
5.3. Разложение различных функций в ряд Тейлора.....	158
5.4. Что даёт Разложение в ряд Тейлора.....	159
5.5. Упражнения к главе 5 .....	176

## Глава 6.

### **ИЗУЧАЕМ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ!**.....177

- 6.1. Функции нескольких переменных .....178
- 6.2. Линейные функции нескольких переменных .....182
- 6.3. Частные производные.....189
- 6.4. Полные дифференциалы .....195
- 6.5. Условия существования экстремумов.....197
- 6.6. Применение частных производных в экономике... 200
- 6.7. Частная производная сложной функции.  
Цепное правило..... 204
- 6.8. Упражнения к главе 6 .....216

## Эпилог.

### **ЗАЧЕМ НУЖНА МАТЕМАТИКА?**.....217

### **ПРИЛОЖЕНИЯ**..... 223

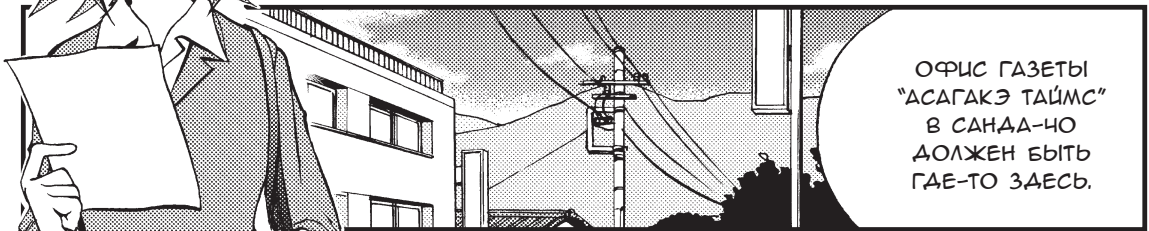
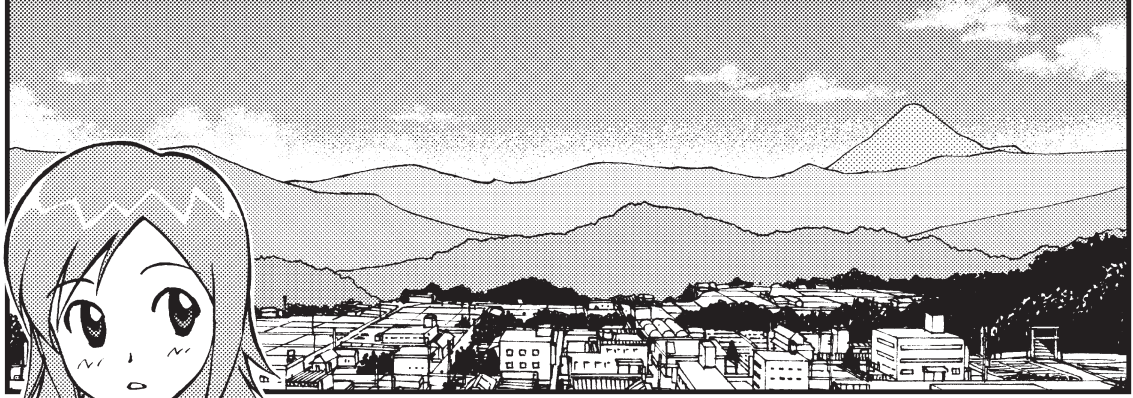
- П.1. Решения к упражнениям..... 224
- П.2. Основные формулы, теоремы и функции ..... 227
- П.3. Алфавитный перечень..... 230

ПРОЛОГ

# ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ



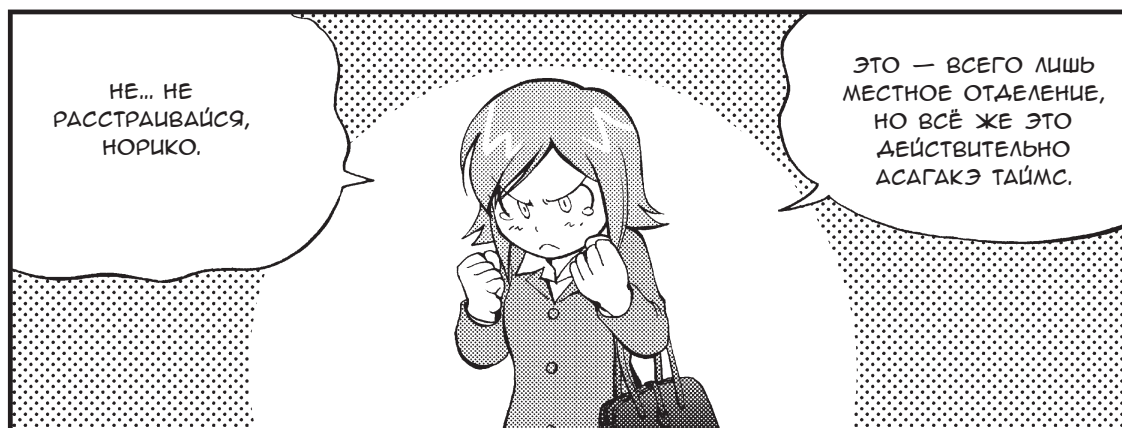
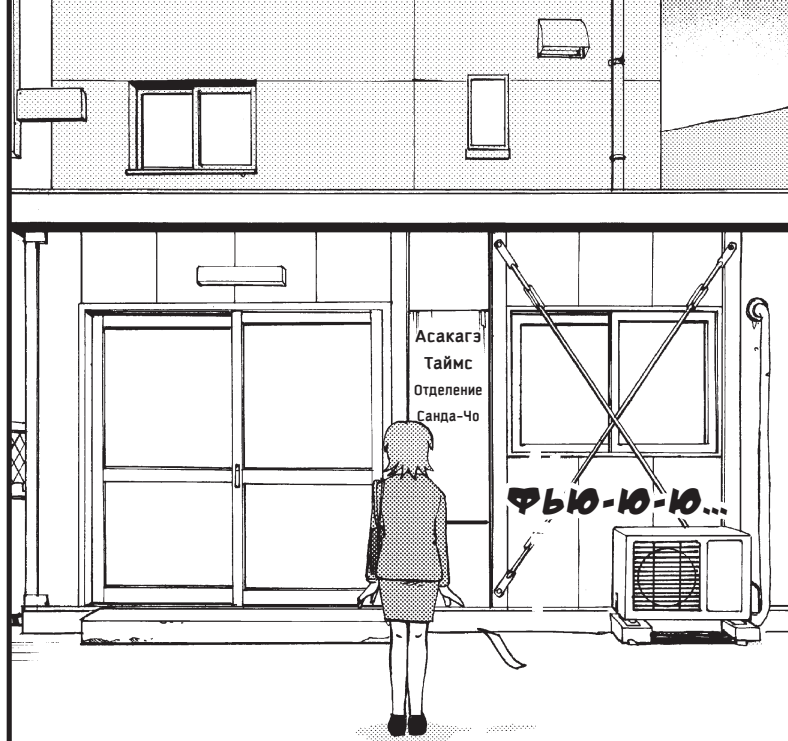




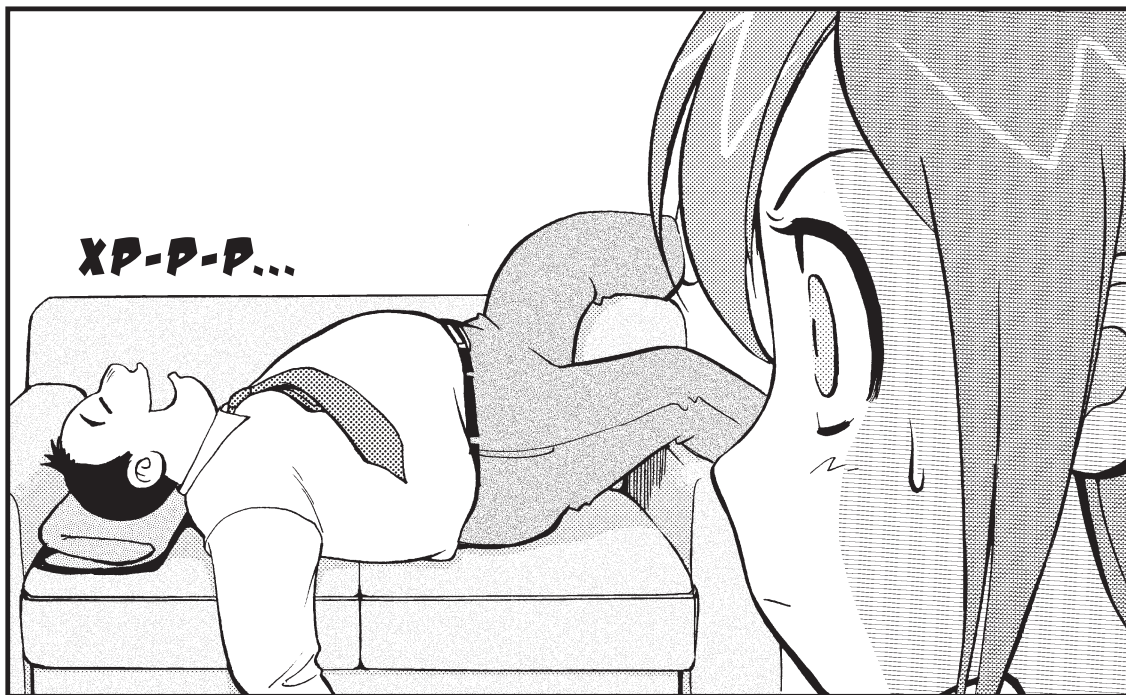
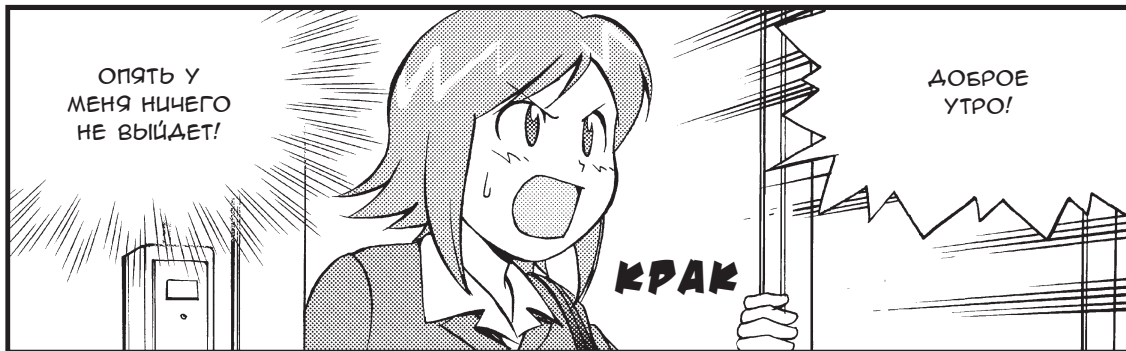


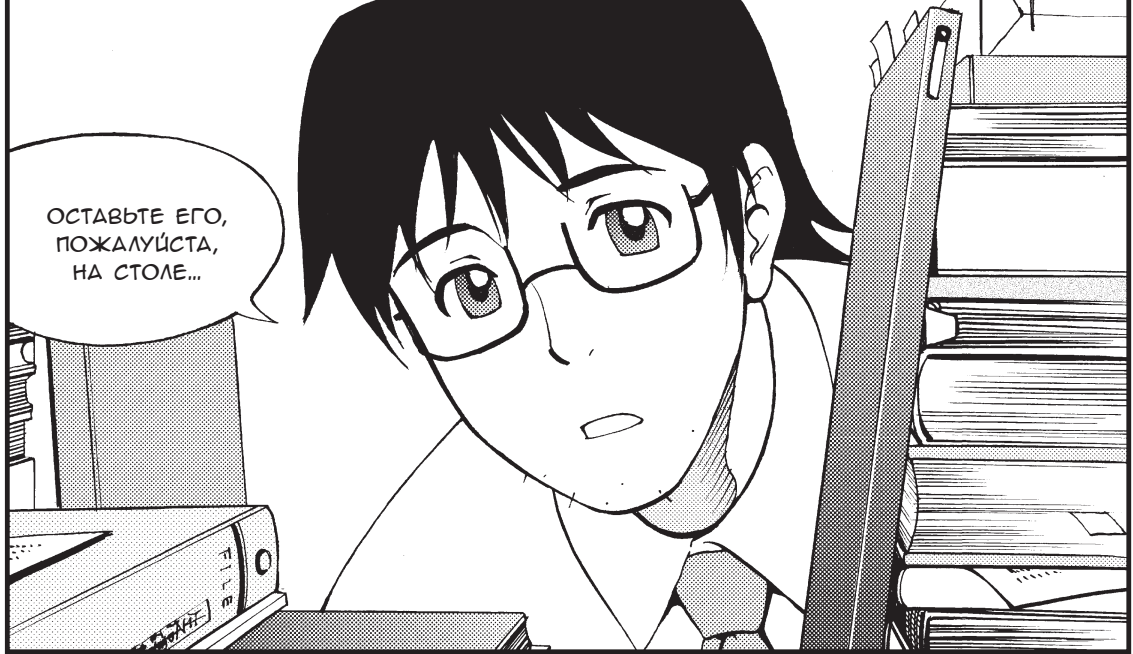


Асакагэ  
Таймс  
Отделение  
Санда-Чо

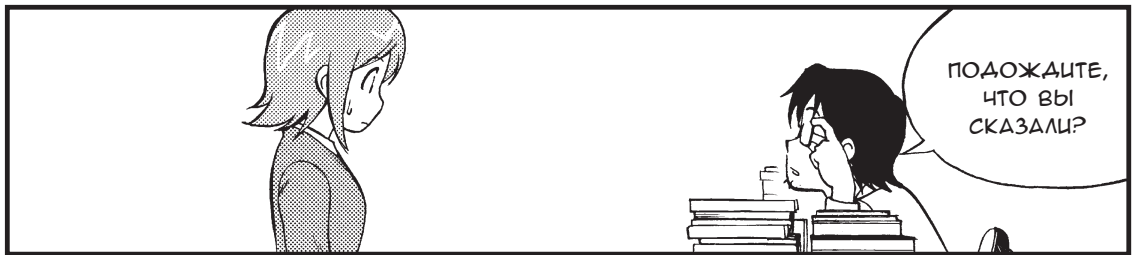








ОСТАВЬТЕ ЕГО,  
ПОЖАЛУЙСТА,  
НА СТОЛЕ...



ПОДОЖДИТЕ,  
ЧТО ВЫ  
СКАЗАЛИ?



О, ТАК ЭТО ТЕБЯ  
ДОЛЖНЫ БЫЛИ  
СЕГОДНЯ  
ПРИСЛАТЬ!



Я — НОРИКО  
ХИКИМА.

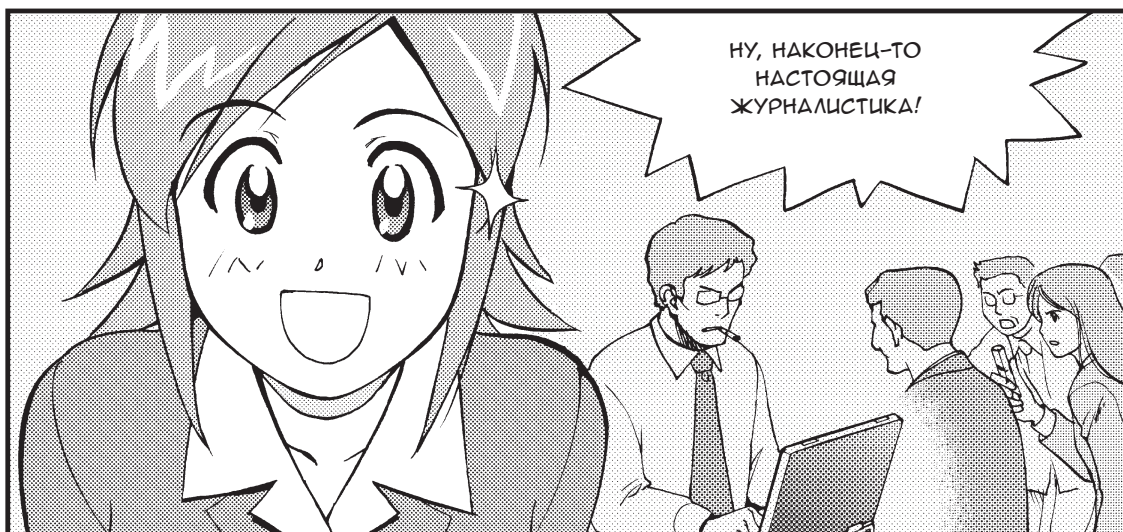
ТРУДНО БЫЛО  
ДОБРАТЬСЯ?  
Я — КАКЕРУ СЭКИ,  
ГЛАВА ЭТОГО  
ОТДЕЛЕНИЯ.

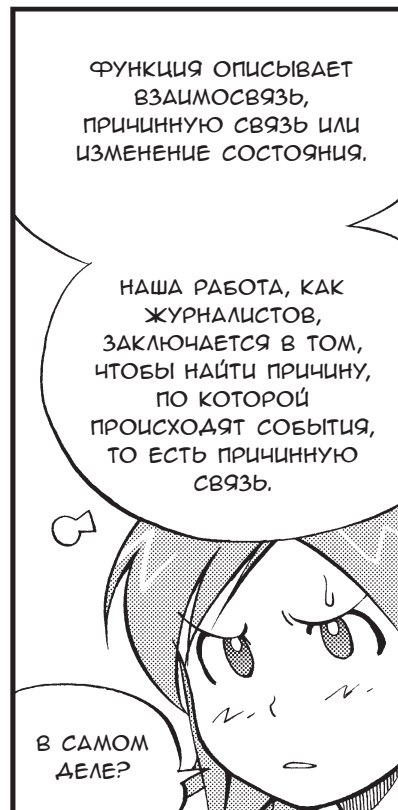
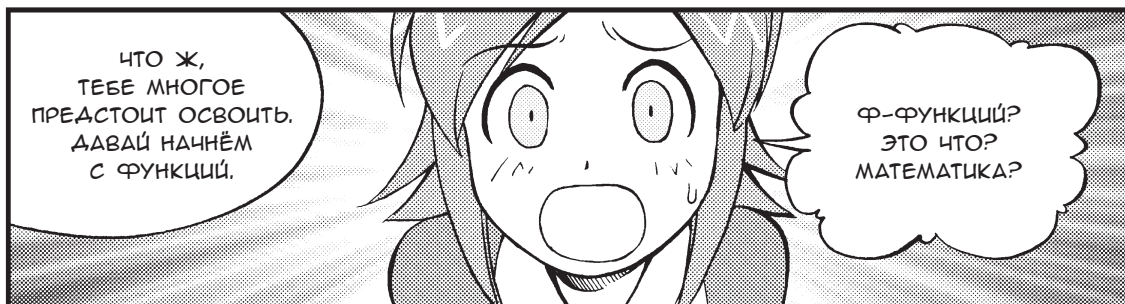
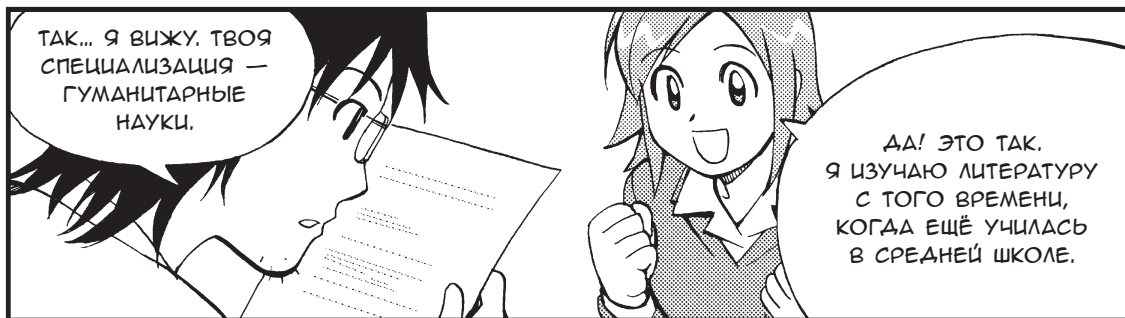


БОЛЬШОЙ ПАРЕНЬ  
ТАМ — ЭТО  
ФУТОШИ МАСУИ,  
МОЙ ЕДИНСТВЕННЫЙ  
СЛУЖАЩИЙ.

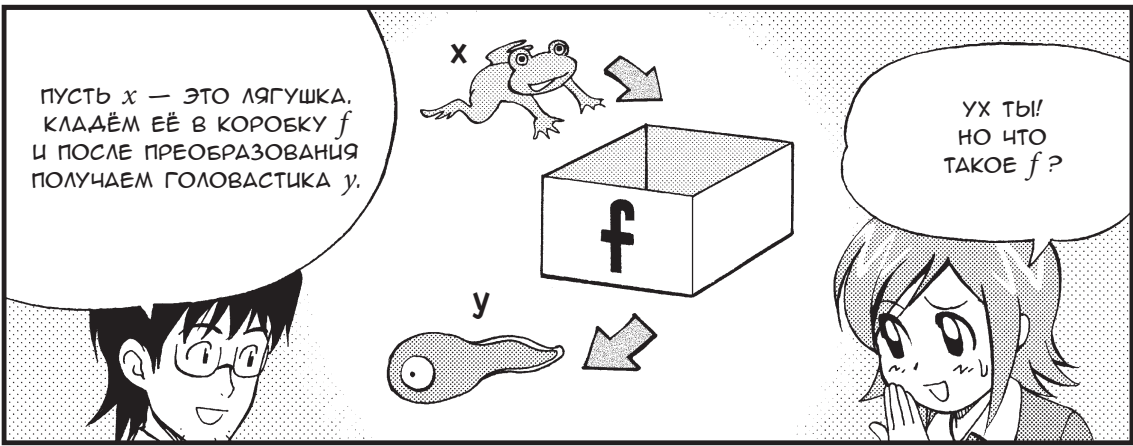
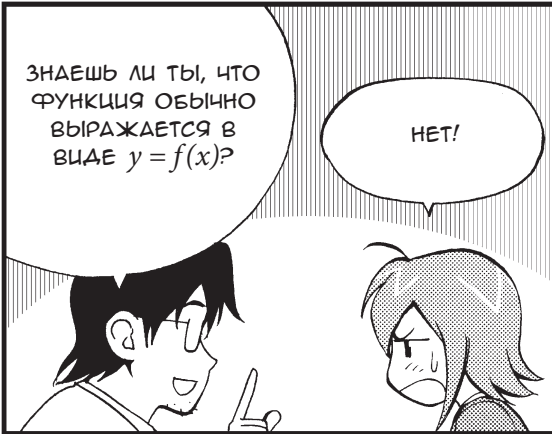
ИХ ВСЕГО  
ДВОЕ...

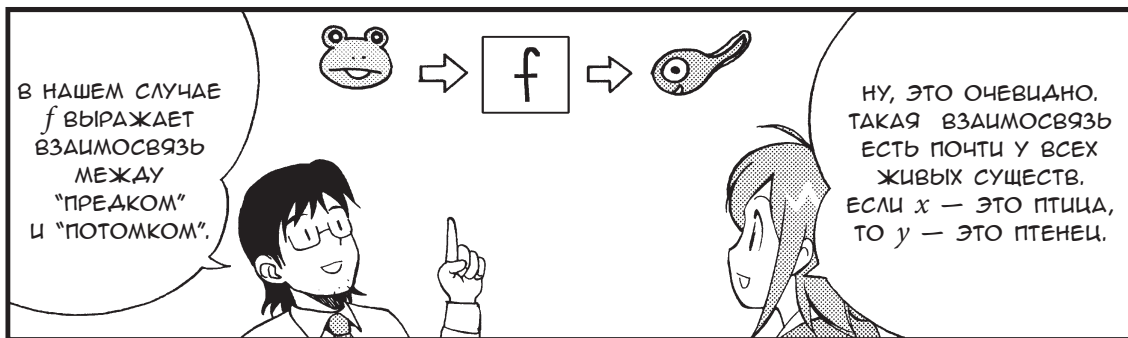


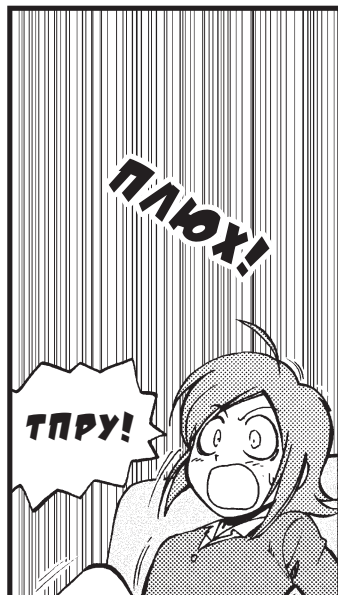
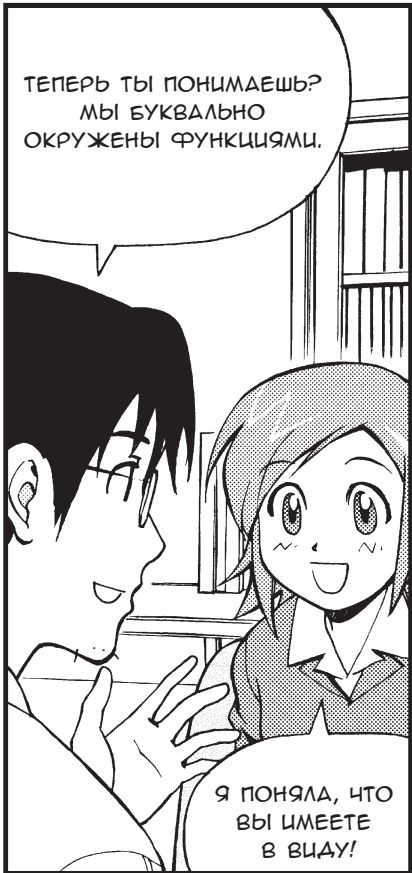




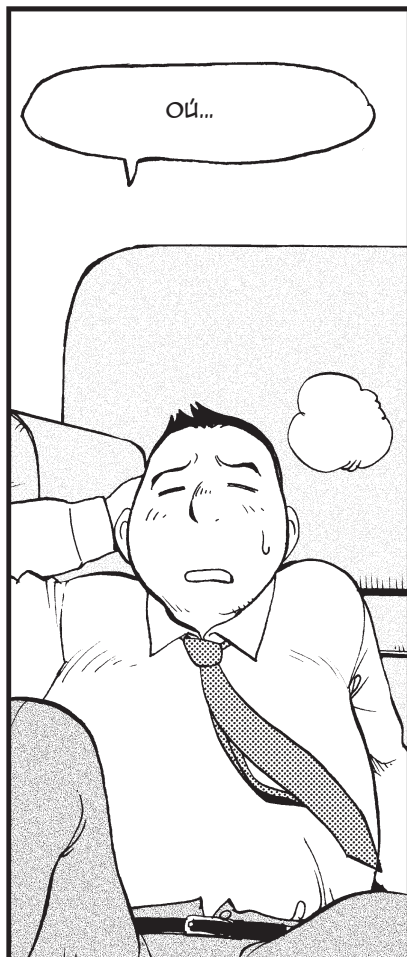












Ой...



Вы в порядке?

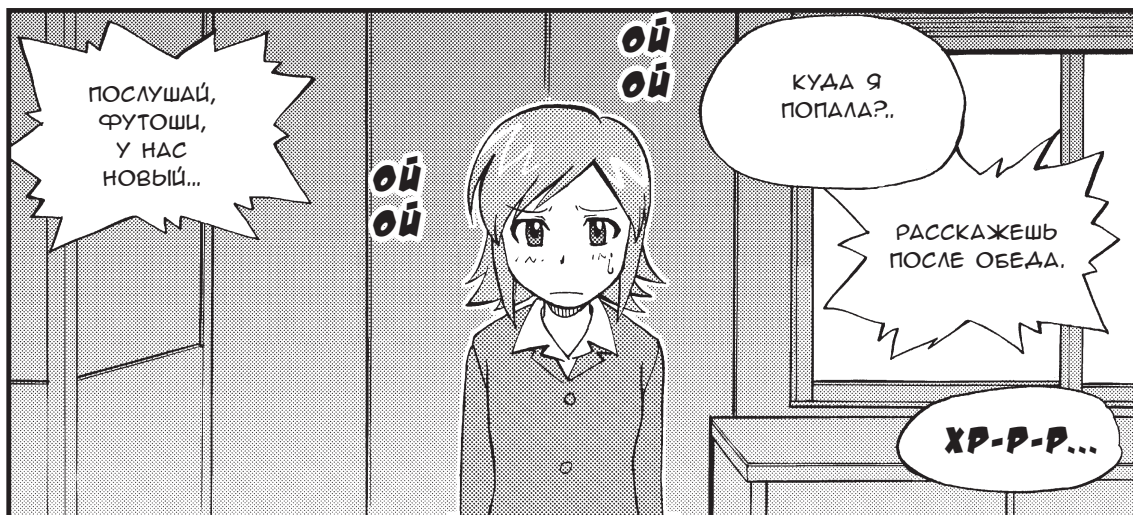
О, обед уже здесь? Где моя любимая говядина?



Футоши, обед ещё не принесли. Это...

**ПЛЮХ!**

Вот как?! Тогда я ещё вздремну. Хр-р-р...



Послушай, Футоши, у нас новый...

оу оу

оу оу

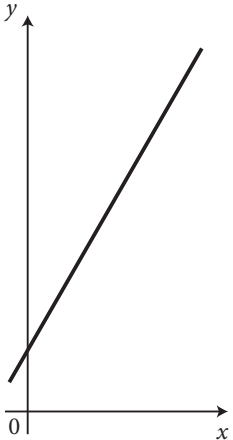
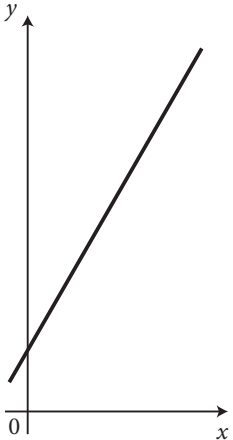
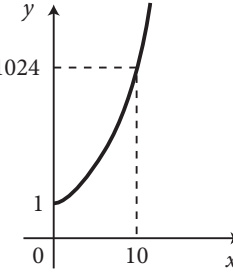
Куда я попала?..

Расскажешь после обеда.

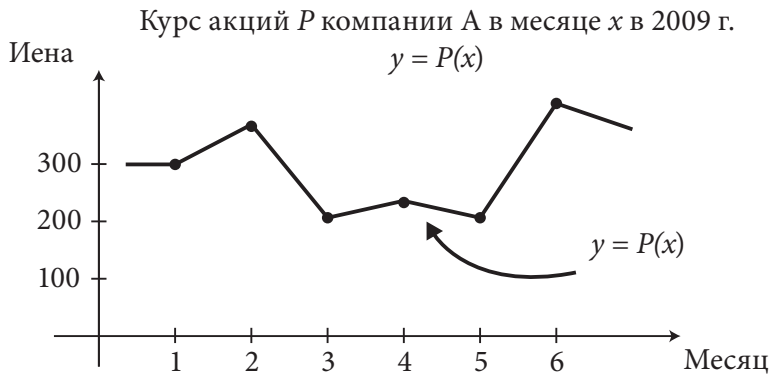
Хр-р-р...



■ Таблица 1. Характеристики функций

Тема	Расчёт	График
Причинная связь	<p>Частота стрекотания сверчка определяется температурой. Можно приблизительно выразить связь между стрекотаниями сверчка в минуту (<math>y</math>) и температурой в градусах Цельсия (<math>x</math>) формулой</p> $y = g(x) = 7x - 30$ <p style="text-align: center;"> <math>\uparrow</math>                      <math>\downarrow</math>  <math>x = 30^\circ\text{C}</math>    <math>7 \times 30 - 30</math> </p> <p style="text-align: right;">Итого, 180 стрекотаний в минуту.</p>	<p>На графике такие функции изображаются прямой линией. Поэтому они и называются линейной функцией.</p> 
Изменения	<p>Скорость звука <math>y</math> в метрах в секунду (м/с) в воздухе при <math>x</math>(°C) выражается в виде</p> $y = f(x) = 0,6x + 331.$ <p>При <math>15^\circ\text{C}</math>  <math>y = f(15) = 0,6 \times 15 + 331 = 340</math> м/с.</p> <p>При <math>-5^\circ\text{C}</math>  <math>y = f(-5) = 0,6 \times (-5) + 331 = 328</math> м/с.</p>	
Переход к другой системе	<p>Перевод <math>x</math> градусов по Фаренгейту (°F) в <math>y</math> градусы Цельсия (°C):</p> $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32).$ <p>То есть теперь мы знаем, что <math>50^\circ\text{F}</math> соответствуют</p> $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10^\circ\text{C}.$	
	<p>Компьютеры выполняют операции с числами, используя бинарную систему счисления (1 и 0). Бинарное число, состоящее из <math>x</math> битов (или бинарных разрядов), может принимать <math>y</math> различных значений:</p> $y = b(x) = 2^x.$ <p>(Функцию вида <math>y = a^x</math> называют показательной. Показательная функция рассмотрена на стр. 131.)</p>	<p>Так на графике выглядит показательная функция.</p> 

СУЩЕСТВУЮТ ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ КОТОРЫХ НЕ МОГУТ БЫТЬ ИЗОБРАЖЕНЫ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ.



Зависимость  $P(x)$  нельзя выразить известной функцией, но она всё же является функцией.

Если найдёте способ предсказать курс акций в июле,  $P(7)$ , вы сможете неплохо заработать.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОЙ ФУНКЦИИ К РЕЗУЛЬТАТАМ ДРУГОЙ НАЗЫВАЕТСЯ "КОМПОЗИЦИЕЙ ФУНКЦИЙ", ИЛИ "СЛОЖНОЙ ФУНКЦИЕЙ", ЧТО ПОЗВОЛЯЕТ РАСШИРЯТЬ ДИАПАЗОН ПРИЧИННЫХ СВЯЗЕЙ.



$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$  ← Композиция функций  $f$  и  $g$

### У п р а ж н е н и я

1. Найти уравнение, выражающее зависимость числа стрекотаний сверчка в минуту ( $z$ ) от температуры в градусах Фаренгейта ( $x$ ).

1

# ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ ФУНКЦИИ!



Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)