

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	7
Глава 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ	8
1.1. Центральное проецирование.....	8
1.2. Параллельное проецирование.....	11
1.3. Метод Монжа	15
Глава 2. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ	16
2.1. Ортогональная система двух плоскостей проекций	16
2.2. Ортогональная система трех плоскостей проекций	21
2.3. Безосные эпюры.....	26
Глава 3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ	28
3.1. Задание прямой.....	28
3.2. Различные положения прямой линии относительно плоскостей проекций.....	29
3.3. Взаимное расположение точки и прямой. Деление отрезка прямой в данном отношении	37
3.4. Определение длины отрезка прямой и углов наклона прямой к плоскостям проекций.....	39
3.5. Следы прямой линии	42
3.6. Взаимное расположение двух прямых линий	45
3.7. Проецирование прямого угла	49
Глава 4. ПЛОСКОСТЬ	51
4.1. Способы задания плоскости на чертеже.....	51
4.2. Различные положения плоскости относительно плоскостей проекций.....	54
4.3. Прямая и точка в плоскости.....	61
Глава 5. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ, ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ	69
5.1. Пересекающиеся плоскости.....	69

5.2. Пересечение прямой с плоскостью общего положения	72
5.3. Построение линии пересечения двух плоскостей по точкам пересечения прямых линий с плоскостью.....	73
5.4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.....	78
5.5. Перпендикулярность прямой и плоскости	80
5.6. Перпендикулярность прямых	82
5.7. Взаимно перпендикулярные плоскости	83
Глава 6. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ	90
6.1. Способ замены плоскостей проекций.....	90
6.2. Способ вращения	95
6.3. Способ совмещения.....	103
6.4. Способ косоугольного вспомогательного проецирования	106
6.5. Применение способов преобразования проекций в решении метрических задач.....	108
Глава 7. МНОГОГРАННИКИ.....	117
7.1. Основные понятие и определения.....	117
7.2. Пересечение многогранников плоскостью и прямой линией	120
7.3. Пересечение прямой линии с многогранником	123
7.4. Взаимное пересечение многогранников	123
Глава 8. КРИВЫЕ ЛИНИИ	126
8.1. Основные понятия и определения.....	126
8.2. Плоские кривые	127
8.3. Пространственные кривые линии	131
8.4. Ортогональные проекции винтовой линии	132
8.5. Определение длины пространственной кривой по ее ортогональным проекциям	134
Глава 9. КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ	136
9.1. Основные понятия и определения.....	136
9.2. Классификация поверхностей	140
9.3. Обзор некоторых кривых поверхностей, задание и изображение их на чертежах	142
9.4. Поверхности вращения	151

Глава 10. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ	157
10.1. Пересечение поверхностей вращения проецирующей плоскостью	157
10.2. Пересечение поверхностей вращения плоскостью общего положения	163
10.3. Построение плоскостей, касательных к кривым поверхностям	169
10.4. Пересечение прямой линии с кривой поверхностью.....	173
Глава 11. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ	177
11.1. Основные понятия и определения.....	177
11.2. Построение проекций линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных проецирующих плоскостей.....	178
11.3. Способ вспомогательных плоскостей общего положения.....	183
11.4. Особые случаи пересечения поверхностей второго порядка	188
11.5. Построение линии пересечения поверхностей с помощью семейства вспомогательных поверхностей	192
Глава 12. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ	197
12.1. Развертка призматических и цилиндрических поверхностей	198
12.2. Развертывание цилиндрических и конических поверхностей.....	202
12.3. Построение приближенных разверток некоторых неразвертываемых поверхностей	205
Глава 13. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	209
13.1. Основные понятия и определения.....	209
13.2. Стандартные аксонометрические проекции.....	213
13.3. Косоугольные аксонометрические проекции.....	217
Глава 14. СВЕДЕНИЯ О КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ	222
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	227

Предисловие

Начертательная геометрия — это общеобразовательная дисциплина, с которой начинается инженерное образование в вузе, и как прикладная математическая дисциплина имеет первостепенное значение в формировании будущего инженера.

Дисциплина «Начертательная геометрия. Инженерная графика и компьютерная графика» в системе технического образования входит в ряд базовых общеобразовательных дисциплин. Данная дисциплина является основой графической грамотности, которая приобретает особое значение в условиях современного производства, оснащенного станками с программным управлением, робототехникой и системами автоматизированного проектирования.

Начертательная геометрия является теоретической основой построения технических чертежей, которые представляют собой полные графические модели конкретных инженерных изделий. Задача изучения начертательной геометрии сводится к развитию пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического мышления, способностей к анализу и синтезу пространственных форм и отношений, изучению способов конструирования различных геометрических пространственных объектов (в основном поверхностей), способов получения их чертежей на уровне графических моделей и умению решать на этих чертежах задачи, связанные с пространственными объектами и их зависимостями.

В учебном пособии, состоящем из 14 глав, изложены способы проецирования различных пространственных объектов: прямых, плоскостей, многогранников, кривых линий, поверхностей. Рассмотрены взаимное положение объектов, способы преобразования проекций, развертки поверхностей и аксонометрические проекции.

Для повторения и закрепления изучаемого материала студент должен изучить примеры графического решения задач и ответить на вопросы для самопроверки.

Принятые обозначения

1. Точки, расположенные в пространстве, — прописными курсивными буквами латинского алфавита (A, B, C, D) или цифрами: 1, 2, 3, 4.

2. Прямые и кривые в пространстве — строчными курсивными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, \dots

3. Плоскости и поверхности — строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \dots$

4. Углы — строчными прямыми буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \sigma, \varphi$.

5. Плоскости проекций — прописной прямой буквой греческого алфавита Π : горизонтальная — Π_1 , фронтальная — Π_2 , профильная — Π_3 , любая дополнительная — Π_4, Π_5 .

6. Оси проекций — строчными курсивными буквами x, y, z или, при введении дополнительных плоскостей, отношениями: $\Pi_2/\Pi_1, \Pi_2/\Pi_3, \Pi_2/\Pi_4$. Начало координат — буквой O .

7. Проекции точек:

1) на горизонтальную плоскость Π_1 : A', B', C' ;

2) на фронтальную плоскость Π_2 : A'', B'', C'' ;

3) на профильную плоскость Π_3 : A''', B''', C''' ;

4) на дополнительную плоскость Π_4 : A^{IV}, B^{IV}, C^{IV} .

8. Особые прямые имеют постоянные обозначения: линии уровня (горизонталь — h ; фронталь — f ; профильная прямая — p).

9. Обозначение плоскостей, заданных следами:

– горизонтальный след плоскости: $\alpha\Pi_1$;

– фронтальный след плоскости: $\alpha\Pi_2$;

– профильный след плоскости: $\alpha\Pi_3$.

10. Проецирующие плоскости:

– горизонтально проецирующая плоскость: α' ;

– фронтально проецирующая плоскость: α'' ;

– профильно проецирующая плоскость: α''' .

11. Точки схода следов: $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$.

12. Оси вращения: i, j .


13. Основные операции:

– совпадение двух геометрических фигур \equiv : $A' \equiv B'$;

– взаимная принадлежность геометрических фигур \in : $A' \in a', h \in \alpha$;

– пересечение двух геометрических фигур \cap : $a \cap b, \alpha \cap \beta$;

– результат геометрической операции: $K = a \cap \alpha, l = \alpha \cap \beta$.

14. Прямой угол на чертеже: прямой угол с точкой внутри угла .

Глава 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

Изображение пространственного объекта на плоскости достигается посредством отображения этого объекта на плоскости проекций. В начертательной геометрии объекты отображаются способами центрального и параллельного проецирования.

1.1. Центральное проецирование

[6, с. 10–11], [9, с. 10–11], [13, с. 17–18]

Сущность центрального, или конического, проецирования заключается в следующем: пусть в пространстве задана некоторая фигура ABC (рис. 1.1), проекцию которой необходимо построить на плоскости Π_1 , и точка S , которую назовем *центром проецирования*.

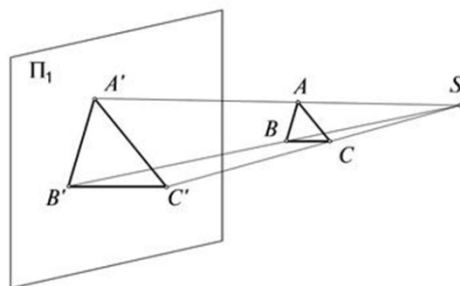


Рис. 1.1. Построение проекции треугольника с использованием центрального проецирования

Проведя через точку S прямые SA , SB , SC до пересечения с плоскостью Π_1 , получим точки A' , B' , C' , которые будут являться проекциями точек пространства на плоскости Π_1 . Соединив их отрезками прямых, получим фигуру $A'B'C'$, которая представляет собой проекцию заданной фигуры ABC . Плоскость Π_1 при этом называется *плоскостью проекций*, прямые SA , SB , SC — *проецирующими прямыми*, фигура $A'B'C'$ — *проекцией фигуры ABC* , которую, в свою очередь, называют *проецируемой фигурой*, или *оригиналом*.

Под *проекцией* данного пространственного объекта следует понимать множество проекций всех его точек, поскольку каждый объект можно рассматривать как точечное множество. Однако для построения проекции какой-либо фигуры нет необходимости проецировать все ее точки. Так, для построения проекции треугольника (рис. 1.1) достаточно построить проекции трех его вершин.

Описанный процесс получения изображений (проекций) составляет сущность способа центрального проецирования. Построенное при этом изображение называют *центральной проекцией* заданного оригинала. Положения плоскости Π_1 и центра S определяют аппарат центрального проецирования. Если он задан, то всегда имеется возможность определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскости проекции.

Проекции A' , B' точек A , B построены при заданном аппарате проецирования: S , Π_1 (рис. 1.2).

В том случае, когда точка C принадлежит плоскости, проходящей через центр проекции и параллельной плоскости Π_1 , проецирующая прямая SC пересечет плоскость проекции в бесконечно удаленной точке: точка C также имеет свою проекцию, но бесконечно удаленную (C^∞).

Как видно на рисунке 1.2, A' может быть центральной проекцией любой точки A_1, A_2, \dots, A_n , принадлежащей прямой $A'S$. Поэтому одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки в пространстве.

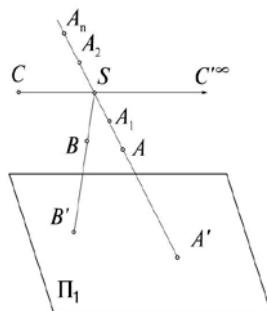


Рис. 1.2. Примеры построения проекций

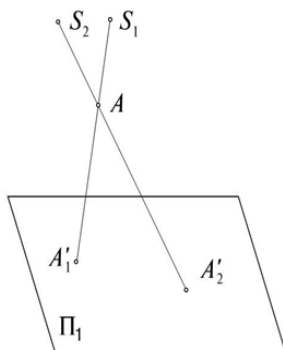


Рис. 1.3. Определение положения объекта в пространстве по его проекциям

Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две ее центральные проекции A_1' и A_2' , полученные из центров S_1 и S_2 (рис. 1.3). Тогда можно определить положение точки A в пространстве. Для этого достаточно провести прямые $A_1'S_1$ и $A_2'S_2$ и отметить точку их пересечения.

Примерами центральной проекции являются фотография, кино, живопись и т. д. Способ центрального проецирования используется при построении наглядных изображений, называемых *перспективой*.

Центральное проецирование обладает рядом важных свойств*. Рассмотрим некоторые из них.

1. При данных условиях проецирования (имеются в виду заданные плоскость Π_1 и центр проецирования S) *каждая точка пространства* (за исключением точки S) *имеет единственную свою проекцию*, так как через данную точку и через центр можно провести только одну проецирующую прямую.

2. Проекцией прямой в общем случае является прямая (рис. 1.4). В самом деле, плоскость, определяемая точкой S и прямой AC , пересекает плоскость проекций Π_1 по прямой $A'C'$. В частном случае, когда прямая проходит через центр проекций, она проецируется в точку, так как сама является проецирующей прямой.

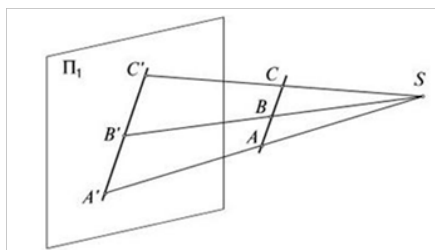


Рис. 1.4. Иллюстрация свойств центрального проецирования

3. Каждой точке, принадлежащей какой-либо линии (прямой или кривой), соответствует проекция этой точки, принадлежащая проекции этой линии, т. е. если $B \in AC$, то $B' \in A'C'$, как видно на рисунке 1.4.

* Свойства фигур, не изменяющиеся при данном преобразовании, например при проецировании, называются инвариантами.

Из других свойств центрального проецирования можно отметить такие:

- 1) кривая линия в общем случае проецируется в кривую;
- 2) точка пересечения линий проецируется в точку пересечения проекций этих линий и др.

Изображения, полученные при центральном проецировании, обладают большой степенью наглядности, но метод центрального проецирования имеет свои отрицательные стороны: искажение формы оригинала, изменение длины проецируемых отрезков, т. е. по проекции невозможно воссоздать проецируемый объект.

1.2. Параллельное проецирование

[6, с. 11–12], [13, с. 18–19]

Проецирование объекта из бесконечно удаленного (несобственного) центра (полюса) называют *параллельным*, или *цилиндрическим*.

Процесс построения изображения пространственного объекта на плоскости при параллельном проецировании такой же, как и при центральном проецировании.

Для осуществления параллельного проецирования необходимо иметь направление проецирования S , которое указывается стрелкой, и плоскость проекций Π_1 (рис. 1.5). Проецирующие прямые параллельны направлению проецирования.

Проекции точек A , B и C на рисунке 1.5 найдены методом параллельного проецирования.

Следовательно, *параллельной проекцией точки* будем называть точку пересечения проецирующей прямой, проведенной параллельно заданному направлению, с плоскостью проекций.

Для получения параллельной проекции некоторой линии можно построить проекции ряда ее точек и провести через эти проекции линию (рис. 1.6а).

Параллельная проекция сохраняет некоторые свойства исходного объекта (параллельность прямых линий). При парал-

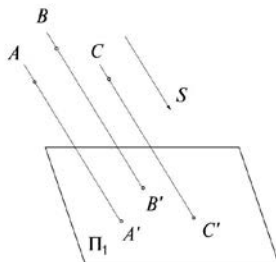


Рис. 1.5. Примеры построения проекций объектов с помощью параллельного проецирования

лельном проецировании (рис. 1.6б) каждая точка пространства (например, точка A) имеет только одну проекцию.

Проекции точек B и C , взятых на прямой, проецирующей точку A , совпадут с проекцией A' ($B' \equiv C' \equiv A'$).

Следовательно, если даны только проекции точек и направление проецирования, то положение точки в пространстве этим не определяется: все точки, лежащие на одном проецирующем луче, проецируются в точку A' .

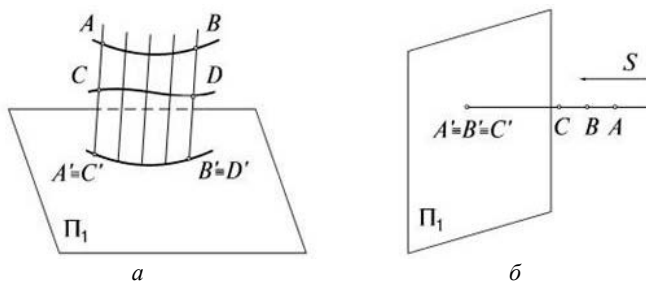


Рис. 1.6. Примеры построения проекций объектов с использованием параллельного проецирования

Прямые, проецирующие некоторую линию, в совокупности образуют поверхность. Поэтому проекцию линии можно рассматривать как линию пересечения проецирующей поверхности с плоскостью проекций (рис. 1.6а). Но определить положение линии в пространстве по ее проекции и направлению проецирования невозможно: на проецирующей поверхности можно разместить множество линий ($A'B' = C'D'$).

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, поэтому ниже будут рассмотрены только те свойства параллельных проекций, которые при центральном проецировании не сохраняются.

1. *Проекции параллельных прямых параллельны* (рис. 1.7). Убедимся в справедливости этого свойства. Пусть аппарат проецирования задан плоскостью Π_1 и связкой параллельных проецирующих с направлением проецирования S и пусть будут даны две параллельные прямые a и b , на которых отложены отрезки CD и AE . Спроецируем прямые a и b на плоскость Π_1 с помощью проецирующих плоскостей ω и β . Плоскости ω и β со-

держат углы $C'CD$ и $A'AE$ с соответственно параллельными сторонами: $C'C \parallel A'A$ как прямые, параллельные направлению проецирования S ; $a \parallel b$ по условию, поэтому плоскости ω и β параллельны. Отсюда следует, что проекции a' и b' параллельны, как линии пересечения параллельных плоскостей с плоскостью Π_1 .

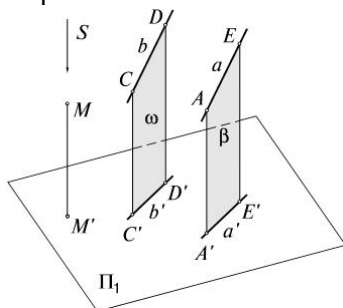


Рис. 1.7. Построение проекций параллельных прямых

Если точка C принадлежит отрезку AB , то отношение AC к CB равно отношению их проекций. Или иначе: если точка C делит отрезок в данном отношении, то и проекция C' делит проекции отрезка в том же отношении (рис. 1.8):

$$C \in AB \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}.$$

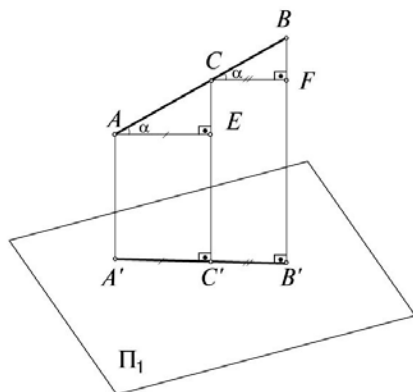


Рис. 1.8. Построение проекций отрезков прямой

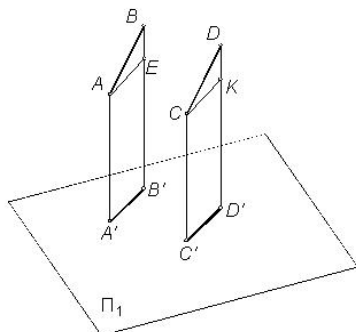


Рис. 1.9. Определение отношения отрезков параллельных прямых по их проекциям

Справедливость вышесказанного видна на рисунке 1.8 и не нуждается в доказательстве.

2. *Отношение отрезков двух параллельных прямых равно отношению их проекций.*

Пусть даны прямые $AB \parallel CD$ и их проекции $A'B'$ и $C'D'$ (рис. 1.9).

Построим AE и CK параллельно $A'B'$ и $C'D'$. Тогда в треугольниках ABE и CDK $AB \parallel CD$ по условию $BE \parallel DK$, $AE \parallel CK$ по построению, поэтому $\triangle ABE \sim \triangle CDK$.

Следовательно, $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CK}$, но

$AE = A'B'$, а $CK = C'D'$. Значит, $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Если в этом отношении поменять местами крайние члены, тогда получим $\frac{C'D'}{CD} = \frac{A'B'}{AB} = K$. Значит, отрезки, лежащие на параллельных прямых, при параллельном проецировании на одну и ту же плоскость имеют равные коэффициенты искажения.

Из сказанного можно заключить, что если отрезок (или плоскую фигуру) перемещать в пространстве параллельно самому себе, то его параллельная проекция не изменит своего размера. Не изменится его проекция и при параллельном перемещении плоскости проекций.

Параллельные проекции делятся на косоугольные и прямоугольные (рис. 1.10).

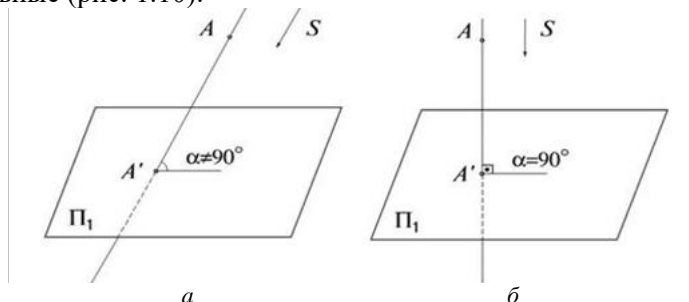


Рис. 1.10. Проецирование косоугольное (а) и прямоугольное (б)

Если направление проецирования составляет с плоскостью проекций Π_1 угол, не равный 90° ($\alpha \neq 90^\circ$), то это *косугольное проецирование*, если $\alpha = 90^\circ$, то это *прямоугольное проецирование*.

1.3. Метод Монжа

[6, с. 13–14], [13, с. 26–29]

С развитием техники первостепенное значение приобрел вопрос о разработке метода, обеспечивающего точность и удобоизмеримость изображений, т. е. возможность точно устанавливать место каждой точки изображения относительно других точек или плоскостей и путем простых приемов определять размеры геометрических фигур. Эти вопросы были решены французским ученым Гаспаром Монжем (1746–1818).

Метод Монжа — метод параллельного прямоугольного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости. Этот метод обеспечивает выразительность, точность и удобоизмеримость изображения, поэтому метод Монжа является основным методом составления технических чертежей.

Слово «*прямоугольный*» часто заменяют словом «*ортогональный*». В дальнейшем изложении термин «*ортогональные проекции*» будут применяться для обозначения системы прямоугольных проекций на взаимно перпендикулярных плоскостях.

Вопросы для самопроверки

1. В чем сущность процесса проецирования? В каком случае проекция точки будет совпадать с самой точкой-оригиналом? Перечислите свойства центрального проецирования.
2. Укажите свойства, общие для центрального и параллельного проецирования. Перечислите свойства, присущие только параллельному проецированию.
3. Если точка принадлежит данной прямой, то каково взаимное расположение их проекций?
4. Что такое «метод Монжа»?
5. Что понимается под словом «ортогональный»?

Глава 2. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

2.1. Ортогональная система двух плоскостей проекций

[2, с. 3–16], [6, с. 15–16], [11, с. 14–16]

Рассмотрим систему двух взаимно перпендикулярных плоскостей Π_1 и Π_2 (рис. 2.1). Плоскость Π_1 расположим горизонтально и назовем *горизонтальной плоскостью проекций*. Тогда плоскость Π_2 , перпендикулярная Π_1 , займет вертикальное положение; расположим ее перед наблюдателем и назовем *фронтальной плоскостью проекций*.

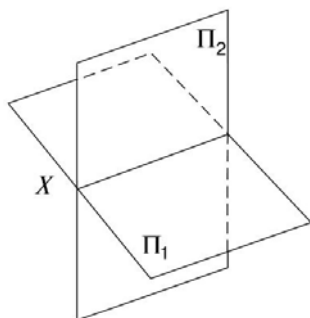


Рис. 2.1. Система двух плоскостей проекций

Линия пересечения плоскостей проекций называется *осью проекций*. Ось проекций разделяет каждую из плоскостей Π_1 и Π_2 на полуплоскости. Для этой оси будем применять обозначение x или обозначение в виде дроби Π_2/Π_1 . Выделим из множества точек пространства одну точку A^* (рис. 2.2).

Спроецируем точку A на плоскость Π_1 , для чего проведем через нее проецирующую прямую $\Gamma_{\text{пр}}$, перпендикулярную плоскости проекций Π_1 . Проецирующая прямая $\Gamma_{\text{пр}}$ пересечет горизонтальную плоскость проекций Π_1 в точке A' , которая называется *горизонтальной проекцией* точки A . Так как проецирующая прямая $\Gamma_{\text{пр}}$ проецирует точку A на горизонтальную плоскость Π_1 , то ее называют *горизонтально проецирующей прямой*. Спроецируем точку A на плоскость Π_2 , для чего проведем через нее проецирующую прямую $\Phi_{\text{пр}}$, перпендикулярную к плоскости Π_2 . Проецирующая прямая $\Phi_{\text{пр}}$ пересечет плоскость Π_2 в точке A'' ,

Спроецируем точку A на плоскость Π_1 , для чего проведем через нее проецирующую прямую $\Gamma_{\text{пр}}$, перпендикулярную плоскости проекций Π_1 . Проецирующая прямая $\Gamma_{\text{пр}}$ пересечет горизонтальную плоскость проекций Π_1 в точке A' , которая называется *горизонтальной проекцией* точки A . Так как проецирующая прямая $\Gamma_{\text{пр}}$ проецирует точку A на горизонтальную плоскость Π_1 , то ее называют *горизонтально проецирующей прямой*. Спроецируем точку A на плоскость Π_2 , для чего проведем через нее проецирующую прямую $\Phi_{\text{пр}}$, перпендикулярную к плоскости Π_2 . Проецирующая прямая $\Phi_{\text{пр}}$ пересечет плоскость Π_2 в точке A'' ,

* В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные размеры. Условно за точку можно принимать шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить и о ее проекциях.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru