1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Основные понятия. Модели материальных тел

Как известно, под механическим движением понимают изменение с течением времени положения тела в пространстве по отношению к другим телам. Изучая движение какого-либо тела, необходимо указать другое тело – тело отсчета, по отношению к которому рассматривается движение. С телом отсчета жестко связывают систему координат. Тело отсчета, связанная с ним система координат и счетчик времени (часы) образуют систему отсчета. В классической механике считается, что время не зависит от движения и одинаково во всех точках пространства и во всех системах отсчета.

Дадим определения основных моделей, используемых в теоретической механике.

1. Материальное тело, размерами и различием в движении отдельных точек которого можно пренебречь в рамках рассматриваемой задачи, называется материальной точкой.

2. Любое множество взаимодействующих материальных точек называется механической системой.

3. Если расстояние между любыми двумя точками механической системы не изменяется при любых механических взаимодействиях, то такая механическая система называется геометрически неизменяемой.

Фундаментальным понятием механики является сила, которая представляет собой количественную меру механического взаимодействия материальных тел. Сила является причиной изменения движения тела, к которому она приложена.

Кроме внешних воздействий, т.е. сил, характер движения любого тела определяется его инертностью, которая является одним из основных свойств движущейся материи. Это свойство проявляется в способности тела сохранять свое движение при отсутствии сил и изменять его под действием сил не мгновенно, а постепенно, тем медленнее, чем больше вещества содержится в теле. Одной из количественных мер инертности (инерции) тела является масса. Заметим, что масса полностью характеризует инерционные свойства тела при его поступательном движении.

1.2. Основные законы механики

Аксиома 1

Существует система отсчета, по отношению к которой материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на нее не действуют силы.

Такая система отсчета называется инерциальной, иногда ее условно называют неподвижной.

Аксиома 2 (второй закон Ньютона)

В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно приложенной к точке силе:

$$m\vec{W} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

Аксиома 3 (третий закон Ньютона)

Две материальные точки взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 4 (принцип независимости действия сил)

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то ускорение точки равно сумме векторов ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности.

1.3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Положение материальной точки в системе отсчета определяется ее радиусом-вектором $\vec{r}$. Сила, действующая на точку, может зависеть от положения точки, т.е. от ее радиуса-вектора $\vec{r}$ (например, упругая сила), скорости точки (например, сила сопротивления) и от времени. Следовательно, основное уравнение динамики материальной точки (1.1) в общем случае можно записать в виде:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r},\ \frac{d\vec{r}}{dt},\ t\right). \tag{1.2}$$

Это равенство, представляющее собой физический закон, который устанавливает связь между массой точки, ее ускорением и действующей на точку силой, можно одновременно рассматривать как дифференциальное уравнение, в котором радиус-вектор r является искомой функцией, а время t – аргументом. Это уравнение называется дифференциальным уравнением движения материальной точки в векторной форме. В зависимости от выбора системы координат можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Записывая уравнение (1.2) в проекциях на оси ортогональной декартовой системы координат, получаем:

$$m\ddot{x} = F_x;\quad m\ddot{y} = F_y;\quad m\ddot{z} = F_z, \tag{1.3}$$

где x, y, z, – координаты точки; F_x, F_y, F_z – проекции на координатные оси приложенной к точке силы.

Если траектория точки заранее известна, удобно использовать оси естественного трехгранника. Напомним, что в этом случае положение точки определяется ее дуговой координатой s, а проекция вектора скорости на касательную к траектории V_τ, касательное W_τ и нормальное W_n ускорения точки определяются по формулам:

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s};\quad W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s};\quad W_n = \frac{V_\tau^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке. Таким образом, дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника имеют вид:

$$m\frac{dV_\tau}{dt} = F_\tau;\quad m\frac{V_\tau^2}{\rho} = F_n;\quad 0 = F_b, \tag{1.4}$$

где F_τ, F_n, F_b – проекции на оси естественного трехгранника приложенной к точке силы.

1.4. Первая основная задача динамики

Эта задача состоит в том, чтобы, зная закон движения точки, т.е. кинематические уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.5}$$

определить силу, действующую на точку, т.е. определить F_x, F_y, F_z. Задача, как видно, легко решается при помощи уравнений (1.3) и сводится к вычислению вторых производных по времени от заданных функций (1.5).

1.5. Вторая основная задача динамики

Эта задача состоит в том, чтобы, зная приложенную к точке силу, определить закон ее движения, т.е. найти кинематические зависимости (1.5). Решение задачи сводится к интегрированию системы (1.3), т.е. системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки $x, y, z,$ а аргументом – время t.

Выполняя интегрирование, получаем координаты точки как функции времени, но решение будет зависеть от шести произвольных постоянных (постоянных интегрирования).

Чтобы сделать соответствующую задачу динамики определенной, необходимо, кроме действующих на точку сил, задать начальные условия, т.е. задать начальное положение точки и ее начальную скорость.

1.6. Дифференциальное уравнение относительного движения точки

Всякое движение точки (или тела) рассматривается по отношению к определенной системе отсчета. До сих пор мы рассматривали движение материальной точки по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета, по отношению к которой материальная точка при отсутствии сил может оставаться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно. Инерциальную систему отсчета считают условно неподвижной, а движение по отношению к ней называют абсолютным. Однако во многих случаях возникает необходимость рассматривать движение точки или тела по отношению к системе отсчета, которая также движется по отношению к инерциальной системе отсчета. В таком случае говорят об относительном движении точки (или тела). Основное уравнение динамики материальной точки (второй закон Ньютона) справедливо только по отношению к инерциальной системе отсчета. Возникает необходимость составить дифференциальное уравнение движения материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета.

Рассмотрим материальную точку M с массой m, на которую действует сила $\vec{F}$, являющаяся результатом механического взаимодействия точки с другими материальными телами. Другими словами, сила $\vec{F}$ представляет собой равнодействующую всех активных сил, приложенных к точке M, и всех сил реакций наложенных на точку связей. Составим дифференциальное уравнение движения точки по отношению к системе отсчета $Oxyz$, произвольно перемещающейся по отношению к инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 1.1).

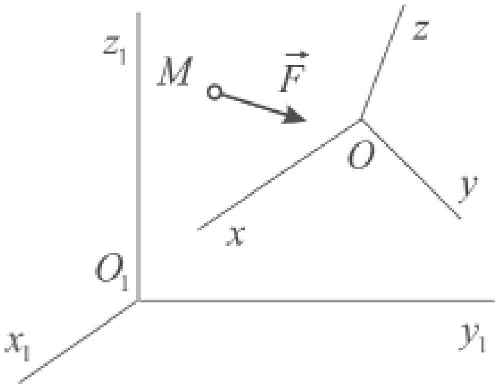

Рис. 1.1

В инерциальной системе отсчета справедлив второй закон Ньютона:

$$m\vec{W}_a = \vec{F}. \tag{1.6}$$

В соответствии с теоремой Кориолиса абсолютное ускорение точки складывается из ускорения относительного $\vec{W}_r$, ускорения переносного $\vec{W}_e$ и ускорения Кориолиса $\vec{W}_c$:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c, \text{ причем } \vec{W}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r, \tag{1.7}$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости подвижной системы отсчета. Подставляя (1.7) в (1.6), получаем:

$$m\vec{W}_r + m\vec{W}_e + m\vec{W}_c = \vec{F} \text{ или } m\vec{W}_r = \vec{F} + \left(-m\vec{W}_e\right) + \left(-m\vec{W}_c\right). \tag{1.8}$$

Обозначая

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_e; \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{W}_c, \tag{1.9}$$

получаем:

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \tag{1.10}$$

Величины $\vec{\Phi}_e$ и $\vec{\Phi}_c$, имеющие размерность силы, называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Уравнение (1.10) называется уравнением относительного движения материальной точки. Как видно, уравнение относительного движения составляется так же, как уравнение абсолютного движения, но к действующим на точку силам необходимо добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Пусть подвижная система отсчета движется по отношению к инерциальной системе поступательно равномерно и прямолинейно. При поступательном движении угловая скорость равна нулю и все точки подвижного пространства движутся одинаково. Ускорение Кориолиса и, следовательно, кориолисова сила инерции обращаются в нуль. Поскольку, кроме того, движение прямолинейное и равномерное, то и переносное ускорение, а значит, и переносная сила инерции также обращаются в нуль. В таком случае уравнение относительного движения (1.10) совпадает с уравнением абсолютного движения (1.6) и, следовательно, подвижная система отсчета также будет инерциальной. Таким образом, если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то их существует бесчисленное множество. Все они движутся друг относительно друга поступательно равномерно и прямолинейно. Из этого результата в свою очередь вытекает, что

> ***никаким механическим экспериментом нельзя установить, находится ли данная система отсчета в покое или движется поступательно равномерно и прямолинейно.***

Сформулированное утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея – Ньютона.

2. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

2.1. Постановка задачи

Пусть материальная точка M с массой m, в силу наложенных на нее связей, движется по известной траектории, на которой установлена криволинейная система отсчета (рис. 2.1). Начало отсчета дуговой

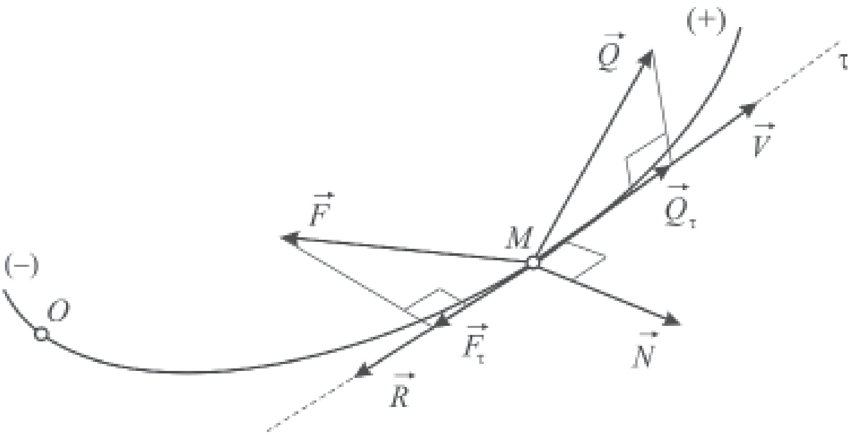

Рис. 2.1

координаты s совместим с положением равновесия точки O. Пусть среди сил, действующих на точку, есть восстанавливающая сила. Восстанавливающей называется сила, возникающая при смещении точки из положения равновесия и стремящаяся вернуть точку в равновесное положение. Такая сила всегда направлена в сторону положения равновесия, а ее модуль пропорционален величине смещения точки из положения равновесия. Проекцию восстанавливающей силы на направление касательной к траектории можно записать в виде $F_\tau = -cs,$ где c – коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом жесткости.

Природа таких сил весьма разнообразна (упругие, архимедовы, гравитационные силы и т.п.). В практическом отношении интересны задачи, в которых кроме восстанавливающей силы на точку действует сила сопротивления $\vec{R}$ и некоторая сила $\vec{Q}(t)$, которую называют возмущающей силой.

Поскольку траектория точки считается известной, для определения закона движения используем первое из уравнений (1.4), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$m\ddot{s} = F_\tau + R_\tau + Q_\tau. \qquad (2.1)$$

Ограничиваясь случаем пропорциональности силы сопротивления первой степени скорости (вязкое трение при малых скоростях), получаем: $R_\tau = -\mu\dot{s},$ где μ – коэффициент пропорциональности.

Рассмотрим случай периодической возмущающей силы:

$$Q_\tau = Q_o \sin(pt + \delta); \quad Q_o, p, \delta \ - \ const. \qquad (2.2)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{s} = -cs - \mu\dot{s} + Q_o \sin(pt + \delta) \ \text{ или } \ \ddot{s} + 2b\dot{s} + k^2 s = q \sin(pt + \delta), \quad (2.3)$$

где обозначено:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad b = \frac{\mu}{2m}; \quad q = \frac{Q_o}{m}.$$

Задача состоит в определении решения уравнения (2.3) при заданных начальных условиях:

$$\text{при } t = 0 \quad s = s_o; \;\; \dot{s} = v_o.$$

Следует отметить, что многие функции $Q_\tau(t)$ при определенных условиях могут быть представлены на интервале движения разложением в ряд Фурье, т.е. в виде суммы (вообще говоря, бесконечной), каждый член которой имеет вид (2.2). Поскольку уравнение движения линейное, его решение может быть представлено соответствующей суммой решений уравнений вида (2.2). Таким образом, рассматриваемый случай возмущающей силы является довольно общим.

2.2. Движение точки под действием восстанавливающей силы

Пусть на точку действует только восстанавливающая сила. Полагая в уравнении (2.3) $b = 0$ и $q = 0$, получаем:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем полагаем $s \equiv x$, имея в виду, что в учебной литературе обычно рассматривается случай прямолинейного движения, хотя все полученные результаты справедливы для движения точки по любой криволинейной траектории.

Уравнение (2.4) представляет собой обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид:

$$x = A\cos kt + B\sin kt, \tag{2.5}$$

где A и B – постоянные интегрирования.

Дифференцируя решение (2.5) по времени, получаем закон изменения скорости точки:

$$V = \dot{x} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt. \tag{2.6}$$

Для определения постоянных интегрирования A и B подставляем начальные условия, которые в принятых нами обозначениях имеют вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_o; \quad \dot{x} = V_o,$$

в уравнения (2.5) и (2.6). Получаем: $A = x_o$; $B = V_o k$, так что общее решение уравнения (2.4) принимает вид:

$$x = x_o \cos kt + V_o k \sin kt. \tag{2.7}$$

Решение в форме (2.5) или (2.7) удобно использовать при решении задач; при рассмотрении вопросов теории более удобна другая форма решения, дающая ясное представление о характере рассматриваемого движения. Вместо постоянных A и B введем другие постоянные интегрирования a и α, используя формулы:

$$A = a \sin \alpha; \quad B = a \cos \alpha.$$

Решение (2.5) принимает вид:

$$x = a(\cos kt \sin \alpha + \sin kt \cos \alpha)$$

или

$$x = a \sin(kt + \alpha). \tag{2.8}$$

Скорость точки при этом вычисляется по формуле:

$$V = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha). \tag{2.9}$$

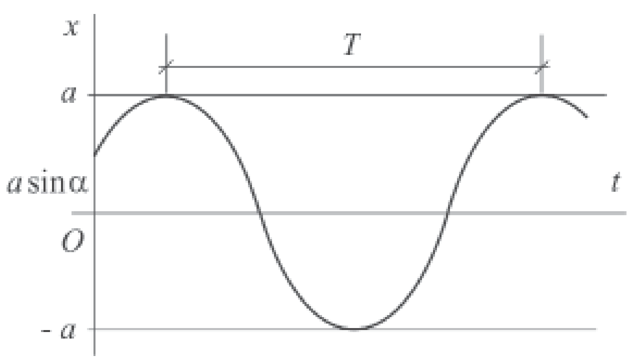

Рис. 2.2

Движение, совершаемое точкой под действием восстанавливающей силы, называется простым гармоническим, или свободным незатухающим колебанием (рис. 2.2).

Постоянная a определяет наибольшее отклонение точки от положения равновесия; ее называют амплитудой колебаний. Величина $kt + \alpha$, определяющая положение и скорость точки в данный момент времени, называется фазой колебаний; α – начальная фаза.

Как видно, движение будет периодическим. Периодом колебаний называется промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание:

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Величина k, пропорциональная ν, называется круговой, или циклической частотой колебаний.

2.3. Влияние постоянной силы на свободные незатухающие колебания

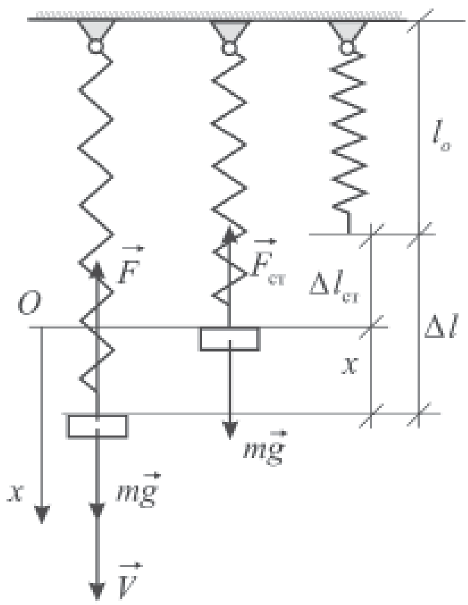

Рис. 2.3

Пусть кроме восстанавливающей силы на точку действует постоянная по модулю и направлению сила, например, сила тяжести. Для наглядности рассмотрим колебания груза, прикрепленного к концу пружины (рис. 2.3). На груз действуют две силы: сила тяжести и реакция пружины, величина которой пропорциональна удлинению пружины: $F = c\Delta l$.

Выберем начало отсчета в положении статического равновесия O; ось x направим вертикально вниз. Тогда $\Delta l = \Delta l_{ст} + x$. Дифференциальное уравнение движения точки принимает вид:

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{ст} + x). \qquad (2.10)$$

Учитывая условие статического равновесия: $mg = c\Delta l_{ст}$, приводим уравнение (2.10) к виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (2.11)$$

Таким образом, наличие постоянной силы не изменяет характера движения – оно остается простым гармоническим колебанием. Действие постоянной силы приводит только к тому, что центр колебаний смещается в сторону действия постоянной силы.

Движение точки при наличии сопротивления. Пусть кроме восстанавливающей силы на точку действует сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости. Дифференциальное уравнение движения принимает вид:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай малого сопротивления $(b < k)$. Решение уравнения (2.12) представляется в виде:

$$x = e^{-bt}\left(A\cos k^* t + B\sin k^* t\right), \tag{2.13}$$

где
$$k^* = \sqrt{k^2 - b^2},$$

или в виде:

$$x = ae^{-bt}\sin(k^* t + \alpha), \tag{2.14}$$

где A и B или a и α – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

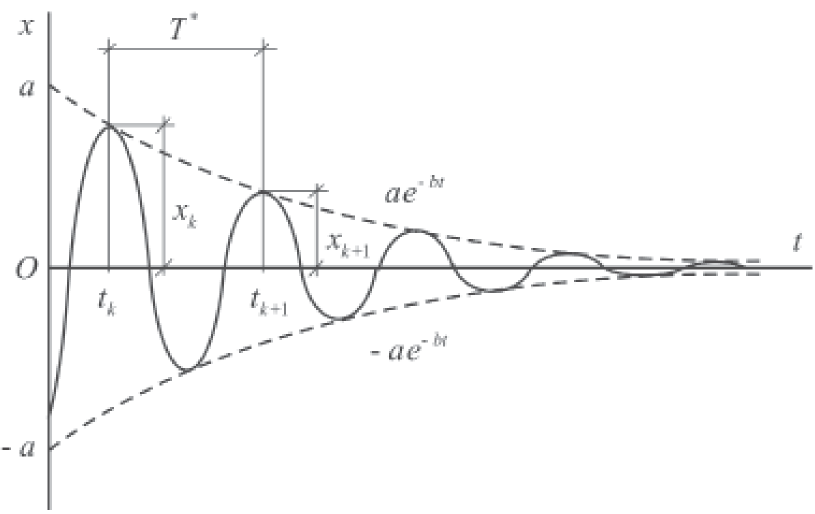

Рис. 2.4

Как видно из решения (2.14), рассматриваемое движение будет затухающим колебанием, поскольку благодаря наличию множителя e^{-bt} размахи колебаний будут со временем убывать, стремясь к нулю (рис. 2.4).

Случай большого сопротивления $(b > k)$. Обозначая $n = \sqrt{b^2 - k^2}$, получаем общее решение уравнения (2.12) в виде:

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}\right).$$

Как видно, колебаний в рассматриваемом случае не будет. Поскольку $b > n$, с течением времени x убывает, стремясь к нулю, т.е. точка со временем асимптотически приближается к положению равновесия. Примерный характер движения показан на рис. 2.5.

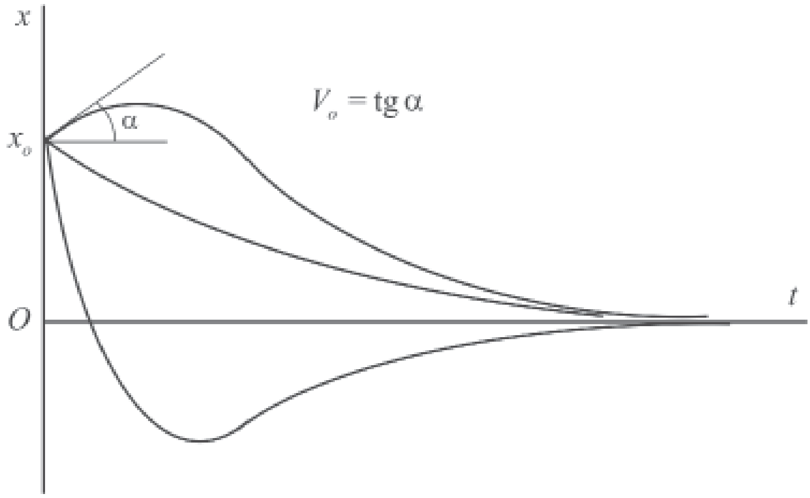

Рис. 2.5

Граничный случай $(b = k)$. Общее решение уравнения (2.12) имеет вид:

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-bt}.$$

Картина движения в этом случае будет качественно такой же, как в случае большого сопротивления (рис. 2.5).

2.4. Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления

Пусть на точку с массой m кроме восстанавливающей силы действует возмущающая сила вида (2.2). Влияние силы сопротивления мы рассмотрим в следующем параграфе. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx + Q_o \sin(pt + \delta) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = q \sin(pt + \delta), \qquad (2.15)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad q = \frac{Q_o}{m}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.15), как известно, складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (2.4) и любого частного решения $\tilde{x}$ уравнения (2.15). Частное решение $\tilde{x}$ будем искать в виде:

$$\tilde{x} = D \sin(pt + \delta), \qquad (2.16)$$

где D – любое число.

Подставляя предполагаемый вид решения (2.16) в уравнение (2.15), получаем:

$$D(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) = q \sin(pt + \delta).$$

Как видно, функция (2.16) действительно будет решением уравнения (2.15), если

$$D = \frac{q}{k^2 - p^2},$$

что возможно только при $p \neq k$.

Таким образом, если $p \neq k$, общее решение уравнения (2.15) имеет вид:

$$x = a\sin(kt + \alpha) + \frac{q}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta). \tag{2.17}$$

Как следует из полученного решения, движение точки в рассматриваемом случае представляет собой результат наложения двух колебаний: собственных с частотой *k*, амплитуда *a* и начальная фаза α которых определяются начальными условиями, и вынужденных с частотой *p*, равной частоте возмущающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

Если частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, т.е. если $p = k$, то рассмотренное частное решение не имеет смысла. Рассмотрим другое частное решение, которое получается из общего решения (2.17) при конкретных значениях произвольных постоянных.

$$\tilde{x} = \frac{q}{k^2 - p^2}\left[\sin(pt + \delta) - sin(kt + \delta)\right]. \tag{2.18}$$

При $p = k$ это частное решение имеет неопределенность вида 0/0, раскрывая которую (по правилу Лопиталя), находим:

$$\tilde{x} = q \cdot \lim_{p \to k} \frac{\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)}{k^2 - p^2} =$$

$$= q \cdot \lim_{p \to k} \frac{\frac{d}{dp}\left[\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)\right]}{\frac{d}{dp}\left(k^2 - p^2\right)}.$$

В результате получаем:

$$\tilde{x} = -\frac{qt}{2k}\cos(kt+\delta). \tag{2.19}$$

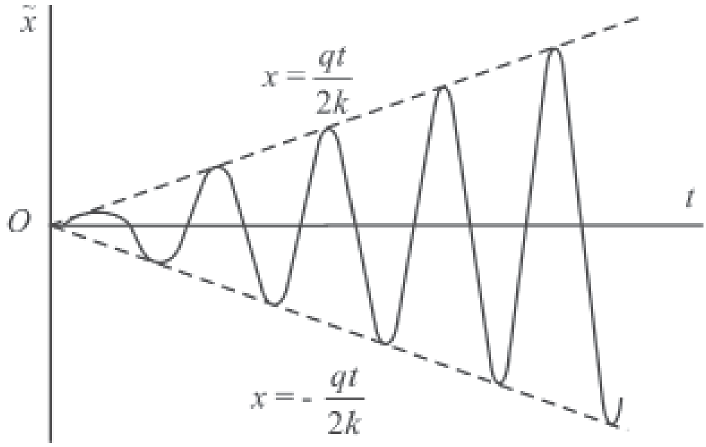

Рис. 2.6

Как видно, в том случае, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой, амплитуда вынужденных колебаний с течением времени неограниченно возрастает (рис. 2.6). Такое явление называется резонансом. Резонанс играет важнейшую роль в акустике, радиотехнике, динамическом расчете сооружений и т.д.

2.5. Вынужденные колебания при наличии сопротивления

Рассмотрим, наконец, общий случай движения точки под действием восстанавливающей силы и возмущающей силы при наличии вязкого сопротивления. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_o\sin(pt+\delta)$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = q\sin(pt+\delta), \tag{2.20}$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad b = \frac{\mu}{2m}; \quad q = \frac{Q_O}{M}.$$

Общее решение уравнения (2.20) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (2.12) (собственные колебания) и любого частного решения (вынужденные колебания). Как показано ранее, в случае малого сопротивления $(b<k)$ общее решение однородного уравнения имеет вид (2.14). Собственные колебания будут затухающими, так что по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом установления, точка будет совершать только вынужденные колебания, т.е. движение точки в

рассматриваемом случае определяется частным решением уравнения (2.20).

Частное решение уравнения (2.20) будем искать в виде:

$$\tilde{x} = D\cos(pt + \delta) + E\sin(pt + \delta),$$

где D и E – постоянные. Подставляя предполагаемый вид решения в уравнение, после ряда преобразований, которые мы здесь опускаем, получаем частное решение уравнения (2.20) в виде:

$$\tilde{x} = A\sin(pt + \delta + \beta).$$

Амплитуда вынужденных колебаний A и фазовый сдвиг β представляются в виде:

$$A = \frac{A_o}{\sqrt{\left(1-\lambda^2\right)^2 + 4h^2\lambda^2}}; \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{2bp}{k^2 - p^2}.$$

Здесь обозначено:

$$\lambda = \frac{p}{k}; \quad h = \frac{b}{k}; \quad A_o = \frac{q}{k^2} = \frac{Q_o}{c}.$$

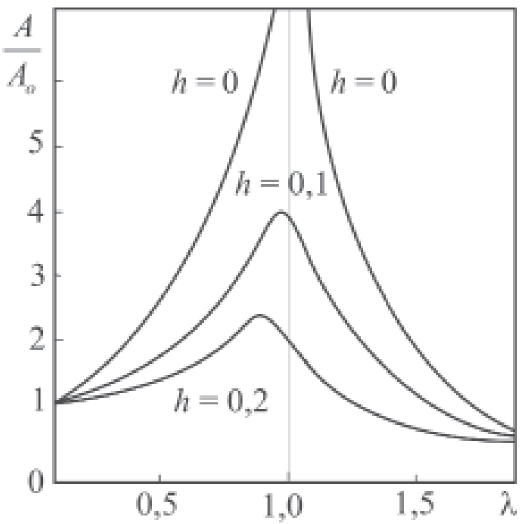

Рис. 2.7

Не проводя подробного анализа, приведем результат исследования зависимости амплитуды вынужденных колебаний от безразмерных параметров λ и h (рис. 2.7).

Как видно, при приближении частоты возмущающей силы к собственной частоте, амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает, имея ярко выраженный максимум. Значение λ, при котором наступает резонанс, тем меньше отличается от единицы, чем меньше h. При малых h, т.е. при малом сопротивлении, можно считать, что резонанс практически наступает при совпадении частот. При $\lambda > 1$ с увеличением частоты возмущающей силы амплитуда вынужденных колебаний убывает, стремясь к нулю при $\lambda \to \infty$. Что касается зависимости амплитуды от величины сопротивления, то, как видно, амплитуда вынужденных колебаний при заданной собственной частоте тем больше, чем меньше сопротивление, т.е. чем меньше h.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что называется материальной точкой?
2. Что называется механической системой?
3. В чем состоят основные законы механики (законы Ньютона)?
4. В чем состоят первая и вторая основные задачи динамики материальной точки?
5. Какая система отсчета называется инерциальной?
6. Как выглядит дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки?
7. В чем состоит принцип относительности Галилея?
8. Что называется восстанавливающей силой?
9. Что называется амплитудой, частотой и периодом свободных незатухающих колебаний?
10. При каких условиях возникают свободные затухающие колебания?
11. При каких условиях возникает апериодическое движение?
12. Что называется резонансом и когда он возникает?

Лекции 4–5 (17–18)

3. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

3.1. Возможные подходы к решению задачи об определении движения точек механической системы

Основная задача динамики механической системы состоит в том, чтобы, зная приложенные к системе силы (полностью или частично), определить движение каждой точки системы. Силы, действующие на механическую систему, можно разделить на внешние и внутренние.

Внутренними называют силы взаимодействия между точками данной механической системы.

Внешними называют силы, с которыми на точки данной механической системы действуют окружающие тела, не входящие в систему.

Часть внешних сил обычно заранее известна – задана. Эти силы называют активными. Как правило, не указывается, со стороны какого именно тела приложена та или иная сила, дан лишь результат механического взаимодействия с этим телом – т.е. сила.

Другую часть внешних сил составляют силы реакций связей. Это силы, с которыми на механическую систему действуют тела, находящиеся с ней в непосредственном контакте (связи). Реакции связей заранее неизвестны, они зависят от типа связи и приложенных активных сил. Для определения реакций связей необходимо решить соответствующую задачу механики.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть система движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Для любой точки механической системы справедлив второй закон Ньютона:

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i; \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{3.1}$$

где m_k – масса точки с номером k; $\vec{r}_k$ – ее радиус-вектор; $\vec{F}_k^e$ – равнодействующая всех внешних сил, как активных, так и реакций внешних связей, действующих на точку с номером k; $\vec{F}_k^i$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на точку.

Система (3.1) называется системой дифференциальных уравнений движения точек механической системы.

Прямое интегрирование системы уравнений (3.1) в большинстве случаев затруднительно, что связано как с возможно большим числом уравнений в системе, так и (в основном) с недостатком информации о внутренних силах. Однако во многих практически интересных случаях нет необходимости определять все интегралы системы (3.1), достаточно знать лишь некоторые из них. Это позволяют сделать общие теоремы динамики. Являясь прямым следствием системы (3.1), общие теоремы динамики устанавливают связь между основными кинематическими характеристиками механической системы и приложенными к ней внешними силами.