ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Основные теоретические сведения» – приводятся основные теоретические сведения с достаточной полнотой и доказательно (заголовок раздела опускается). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

Опорный конспект целесообразен для первичного, быстрого ознакомления с курсом математики, а далее нужно продолжить изучение теорию по разделу «Основные теоретически сведения», где все изложено с достаточной полнотой и доказательно. Опорный конспект полезен и для закрепления изученного материала, для восстановления в памяти нужных понятий при изучении последующих разделов курса и других дисциплин, опирающихся на математику.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

II. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Опорный конспект

1. Понятие определенного интеграла

Определение 1. ***Разбиением*** P отрезка $[a; b], a < b$, называется конечная система точек $x_0, x_1, \cdots, x_n$ этого отрезка такая, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ называются ***отрезками разбиения*** P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ разбиения называется ***параметром разбиения*** P.

Определение 2. Говорят, что имеется ***разбиение*** $(P; c)$ ***с отмеченными точками*** отрезка $[a; b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a; b]$ и в каждом из отрезков $[x_{k-1};\ x_k]$ разбиения P выбрано по точке $c_k \in [x_{k-1};\ x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Набор $\{c_1;\ c_2;\ \cdots, c_n\}$ обозначается одним символом c.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, где $a < b$.

Если:

1) на отрезок $[a; b]$ нанести разбиение $(P; c)$ с отмеченными точками.

2) Вычислить значения функции $f(x)$ в отмеченных точках и

3) Составить сумму

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k,$$

то она называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на ке $[a; b]$.

Геометрически сумма S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей прямоугольников, в основании которых лежат частичные отрезки Δx_k, а высоты равны $f(c_k)$.

По-разному деля отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков и ***по-разному выбирая в них отмеченные точки***, можно для всякой заданной функции $f(x)$ и всякого заданного отрезка $[a; b]$ составить ***бесчисленное множество различных интегральных сумм***.

При этом оказывается, что все эти различные интегральные суммы ***при***

неограниченном возрастании n и ***при стремлении к нулю параметра разбиения***, имеют один общий предел.

Определение. Число J называется пределом интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения P отрезка $[a; b]$ на части с длинами $\Delta x_k < \delta$ для всех $k = 1, 2, \cdots, n$ (т.е. $\lambda < \delta$), неравенство $|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k| < \varepsilon$ будет выполняться при любом выборе точек c_k.

Для **обозначения** предела интегральных сумм употребляется запись

$$J = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

Число δ зависит от выбора числа ε, и поэтому иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Определение. Если при любых разбиениях отрезка $[a; b], a < b$ на частичные отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$ и при любом выборе точек c_k в них, интегральные суммы $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$ имеют один и тот же конечный предел J, то этот предел называют определенным интегралом в смысле Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$.

Обозначение $\int_a^b f(x)dx$. Итак, по определению

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k.$$

- Числа a и b называются соответственно ***нижним и верхним пределами интеграла***;
- x называется ***переменной интегрирования***;
- $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***,
- $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

Так как определенный интеграл определен нами при условии, что выполнено условие $a < b$, то дополним его определение следующими соглашениями: будем считать, что

- Если $b = a$, то $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Если $b < a$, то $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

2. Условия интегрируемости функций

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$ называется интегрируемой на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то она ограничена на этом отрезке*.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции). *ция* $f(x)$, *непрерывная на отрезке* $[a;b]$, *интегрируема на этом отрезке*.

3. Свойства определенного интеграла

Перечислим некоторые свойства определенного интеграла. При этом будем считать, что все рассматриваемые функции непрерывны, а, следовательно, интегрируемы на отрезке $[a;b]$.

1. *Определенный интеграл не зависит от обозначений переменной интегрирования, т.е.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots.$$

Линейность определенного интеграла

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак (вносить под знак) определенного интеграла*:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых*:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx.$$

Следствие. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *то их линейная комбинация* $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ *также является интегрируемой на этом отрезке, причем*

$$\int_a^b \big(c_1f_1(x) + c_2f_2(x)\big)dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx.$$

4. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *то функция* $f_1(x)f_2(x)$ *также интегрируемы на отрезке* $[a;b]$.

5. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то она также интегрируема на любом отрезке* $[c;d] \subset [a;b]$.

6. **Аддитивность определенного интеграла**

Если функция $f(x)$ *интегрируема на наибольшем из отрезков* $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, *то она интегрируема на двух других отрезках, причем*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

при любом расположении a, b, c.

7. **Оценка интеграла**

Если $f(x) \geq 0, a < b$, *то* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

8. **Монотонность интеграла**

Если $f(x) \geq g(x), x \in [a;b], a < b$, *то*

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

9. **Общая оценка интеграла**

Если функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b], a < b$, *то ция* $|f(x)|$ *также интегрируема на отрезке* $[a;b]$ *причем*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. *Если* $m = \min_{x\in[a;b]} f(x), M = \max_{x\in[a;b]} f(x)$ *и* $a < b$, *то*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

11. **Теорема о среднем**

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то на этом отрезке существует хотя бы одна точка* $x = c, a \leq c \leq b$, *такая, что верно равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c))b-a).$$

Определение. Число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

называется ***средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то найдется ка $c \in [a;b]$ такая, что $\mu = f(c)$.

Интегрирование четных и нечетных функций в пределах симметричных относительно начала координат

1. *Если функция* $f(x)$ *– четная, то* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

2. Если же функция $f(x)$ *– нечетная, то* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

4. Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ одна из первообразных подынтегральной функции $f(x)$.

Вычислить $\int_{a}^{b} f(x)dx$ – значит найти, пользуясь известными методами интегрирования, одну из первообразных для функции $f(x)$ и вычислить разность ее значений на концах промежутка.

4.2. Интегрирование по частям определенного интеграла

Для интегралов вида $\int_{a}^{b} P_n(x)f(x)dx$, где $P_n(x)$ – многочлен, а $f(x)$ – основная элементарная функция, применяется формула интегрирования по частям.

Теорема. *Если функции* $U(x)$ *и* $V(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то*

$$\int_{a}^{b} UdV = UV\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} VdU.$$

Отличие от аналогичной формулы для неопределенного интеграла только в расстановке пределов.

Если $f(x)$ тригонометрическая или показательная функция, то

$$U = P_n(x), V = f(x)dx.$$

Во всех остальных случаях наоборот,

$$U = f(x), dV = P_n(x)dx.$$

Формула интегрирования по частям применима и для других интегралов, если интеграл справа проще интеграла слева.

4.3. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2. функция $x = \mathrm{g}(t)$ определена и непрерывна вместе с производной на отрезке $[\alpha; \beta]$, где $\mathrm{g}(\alpha) = a, \mathrm{g}(\beta) = b$, и $a \leq \mathrm{g}(t) \leq b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\mathrm{g}(t)\mathrm{g}'(t))dt.$$

Замена переменной в определенном интеграле требует осторожности и обязательного выполнения всех перечисленных условий, налагаемых на функцию $x = \mathrm{g}(t)$. При соблюдении этих требований важно отметить, что замена переменной в определенном интеграле приводит в общем случае **к интегралу с новыми пределами интегрирования**.

Эти пределы находятся так:

1) в функцию $x = \mathrm{g}(t)$ подставляется сначала нижний предел a заданного интервала и решается уравнение $a = \mathrm{g}(t)$. Значение t, найденное из него, и будет новым нижним пределом α. Если этому уравнению удовлетворяет не одно, а несколько значений t, то за значение α можно принять любое из них.

2) Затем для определения нового предела в функцию $x = \mathrm{g}(t)$ подставляется верхний предел b заданного интеграла и решается уравнение $b = \mathrm{g}(t)$. Найденное из этого уравнения значение t будет новым верхним пределом β. Если это уравнение имеет несколько корней, то за значение β можно принять любое из них.

3) Однако, свобода выбора чисел α и β ограничивается требованием, чтобы значения функции $\mathrm{g}(t)$ не выходили из отрезка $[a; b]$, в котором определена и непрерывна подынтегральная функция $f(x)$.

Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной, как это мы делали при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной.

Во многих случаях приходится вместо подстановки $x = \mathrm{g}(t)$, которая переменную интегрирования x заменяет функцией новой переменной, вводить новую переменную t как функцию старой переменной x, т.е. полагать $t = u(t)$.

В этом случае новые пределы интегрирования $\alpha = u(a)$, $\beta = u(b)$. Если соотношение $t = u(t)$ разрешить относительно x, то окажется, что $x = \mathrm{g}(t)$, причем необходимо, чтобы для функции $\mathrm{g}(t)$ были соблюдены все указанные выше условия.

Итак, замена переменной в определенном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в неопределенном интеграле, только ***нет обратного перехода*** к исходной переменной, и ***есть новая операция*** – замена пределов интегрирования (новые пределы интегрирования вычисляются по старым пределам через замену).

5. Вычисление несобственных интегралов

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ рассматривался при следующих предположениях:

- отрезок $[a; b]$ интегрирования конечен,
- подынтегральная функция на этом отрезке непрерывна.

При таких предположениях этот интеграл называется интегралом в «собственном смысле», или «собственным» интегралом. В том же случае, когда отрезок интегрирования бесконечен или конечен, но подынтегральная функция на этом отрезке терпит разрыв, интеграл называется интегралом в «несобственном смысле», или «несобственным» интегралом.

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода) определяются посредством предельного перехода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx\,, \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное вещественное число.

Замечание. При вычислении несобственных интегралов с бесконечным промежутком интегрирования часто пользуются символическим равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

где $F'(x) = f(x)$ и $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Если существует определенный конечный предел в правой части, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, а функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на бесконечном промежутке.

Если же этот предел бесконечен или не существует, то интеграл называется ***расходящимся***.

Если отыскать первообразную функцию для $f(x)$ трудно или если она в конечном виде не может быть вычислена, то существуют признаки, позволяющие решить вопрос о сходимости или расходимости несобственного интеграла.

II. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода:
а) если функция $f(x)$ неограниченно возрастает, т.е.

$$f(x) \to \pm\infty, \text{ когда } x \to b, \text{ то}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

если функция $f(x)$ неограниченно возрастает, т.е.

$$f(x) \to \pm\infty, \text{ когда } x \to a, \text{ то}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

б) Если подынтегральная функция перестает быть ограниченной внутри отрезка интегрирования, например, при $x = c$, то эту точку «вырезают», а интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяют в предположении, что $F(x)$– первообразная функция для $f(x)$, так

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to+0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx,$$

где ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга.

Если оба предела в правой части существуют и конечны при не зависящем друг от друга стремлении ε_1 и ε_2 к нулю, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неограниченной функции $f(x)$ называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

6. Приложение определенных интегралов к задачам геометрии

Определенный интеграл, вследствие абстрактности его понятия, широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Величины, которые можно найти с помощью определенного интеграла, должны обладать свойством аддитивности.

Величина $u(\lambda)$ называется ***аддитивной относительно*** λ, если из $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ вытекает $u(\lambda) = u(\lambda_1) + u(\lambda_2)$

Аддитивными величинами являются площадь, объем, длина дуги, площадь поверхности вращения, работа, давление и др.

Существуют две схемы применения определенного интеграла для определения различных величин. Одна из них, повторяющая алгоритм получения определенного интеграла по заданной функции, наиболее приемлема в теории. Другая схема носит название дифференциального метода и наиболее приемлема в практике.

Для определения какой-либо величины $u = u(x)$ по дифференциальному методу нужно:

1. Найти дифференциал этой величины du из условий задачи, как главную часть приращения функции Δu
2. Определить пределы интегрирования, если они не заданы,
$$a < x < b.$$
3. Вычислить интеграл $u = \int_a^b f(x)dx$.

6.1. Вычисление площадей плоских фигур

Плоской фигурой будем называть любое ограниченное множество точек плоскости.

Так как площадь – аддитивная величина, то ее можно вычислить с помощью определенного интеграла.

Воспользуемся ***дифференциальным методом***.

1. Найти дифференциал площади $dS = f(x)dx$ или $dS = \mathrm{g}(y)dy$.
2. Определить пределы интегрирования $a < x < b$ или $c < y < d$.
3. Вычислить площадь $S = \int_a^b f(x)dx$ или $S = \int_c^d \mathrm{g}(y)dy$.

Перед решением задачи на вычисление площадей необходим чертеж, для построения которого нужно исследовать поведение функции или воспользоваться тем, что вид графика известен, и построить линию по нескольким точка.

6.1.1. Вычисление площади в прямоугольной системе координат

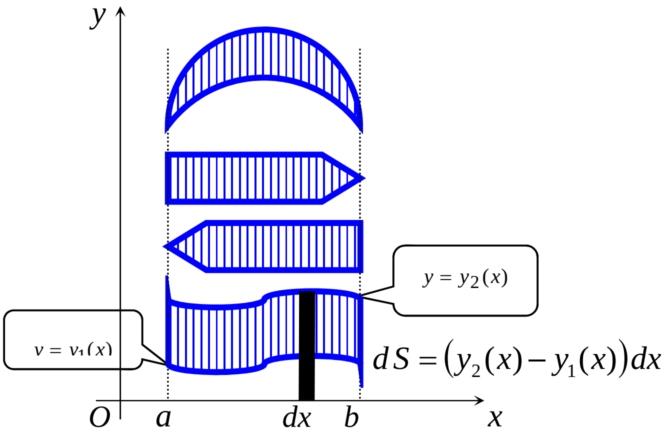
Дифференциал площади в прямоугольной системе координат – площадь прямоугольника с бесконечно малым основанием и переменной высотой. Форма записи дифференциала зависит от способа задания фигуры, от условий задачи.

Пусть Oxy – прямоугольная декартова система координат. Фигуры будем задавать с помощью неравенств или систем неравенств.

Определение. Область называется ***правильной*** (***стандартной***) ***относительно оси*** Ox(Oy), если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках.

Если область правильная относительно осей Ox и Oy, то она просто называется ***правильной*** областью.

Условимся дальше области, правильные относительно оси Oy(Ox), штриховать линиями, параллельными оси Oy(Ox).



Область правильная относительно оси Oy.

Если область G, правильная относительно оси Oy, проектируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$, то ее граница разбивается на две линии:

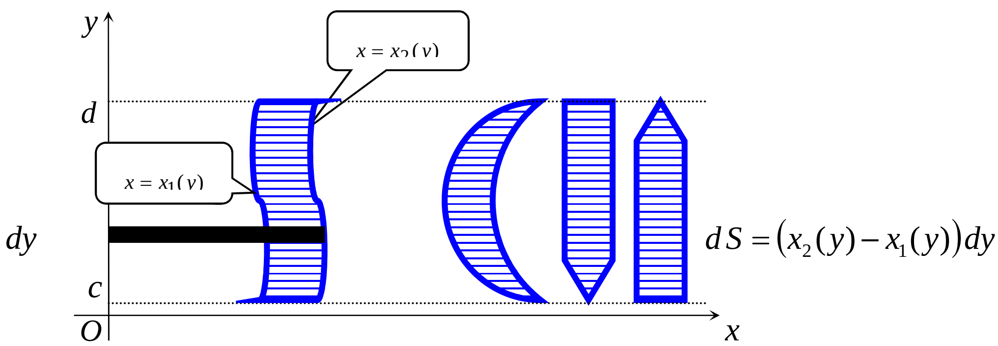
- нижнюю границу области, задаваемую уравнением $y = y_1(x)$ и
- верхнюю, задаваемую уравнением $y = y_2(x)$.

Тогда область G определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}$$

а площадь S вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx.$$



Область правильная относительно оси *Ox*.

Если область *G*, правильная относительно оси *Ox*, проектируется на ось *Oy* в отрезок $[c; d]$, то ее граница разбивается на две линии:

- левую границу области, задаваемую уравнением $x = x_1(y)$ и
- правую, задаваемую уравнением $x = x_2(y)$.

В этом случае область *G* определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y), \\ c \le x \le d, \end{cases}$$

а площадь *S* вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \big(x_2(y) - x_1(y)\big)dy.$$

6.1.2. Вычисление площадей при параметрическом задании линий, ограничивающих фигуру

В задачах такого типа последовательность действий сохраняется, чаще всего усложняется отыскание пределов.

Пусть граница плоской области фигуры *G* – простая замкнутая кривая, заданная параметрически уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2,$$

причем точка$\big(x(t);\ y(t)\big)$ при изменении *t* от t_1 до t_2 пересекает границу области *G* так, что фигура *G* остается слева от движущейся точки. Тогда площадь фигуры *G* может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$S =-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,, S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)dt.$$

6.1.3. Вычисление площадей в полярной системе координат

Вычисление площадей в полярной системе координат производится по дифференциальному методу без каких-либо изменений в его операциях и их последовательности.

Дифференциалом площади в полярной системе координат является площадь кругового сектора с бесконечно малым центральным углом $d\varphi$ и переменным радиусом $r = r(\varphi)$:

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Форма записи дифференциала площади зависит от способа задания фигуры в полярной системе координат.

$$\text{I. } G:\begin{cases}0\le r\le r(\varphi),\\ \alpha\le\varphi\le\beta.\end{cases}\qquad \text{II. } G:\begin{cases}r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi),\\ \alpha\le\varphi\le\beta.\end{cases}$$

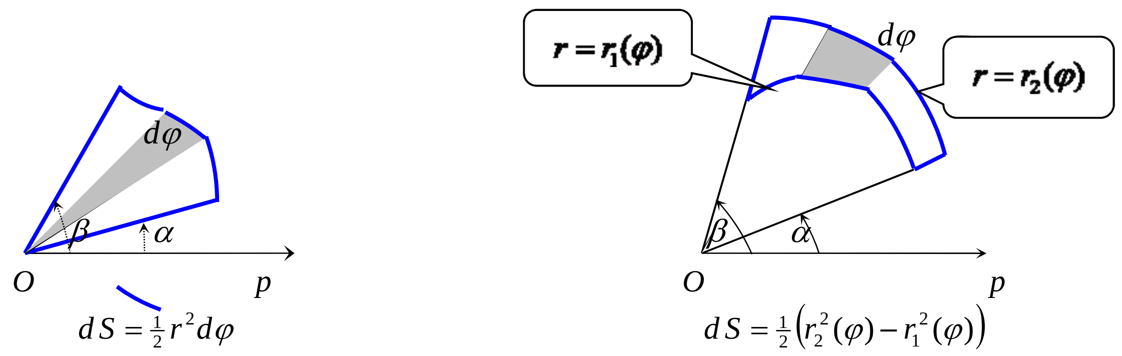


Рис. 6.1.3

6.2. Вычисление объемов тел вращения

Телом будем называть любое ограниченное множество точек пространства.

Тело вращения – тело, полученное в результате вращения фигуры вокруг некоторой оси (оси вращения).

Объем тела вращения – аддитивная величина, следовательно, объем тела вращения можно определить с помощью определенного интеграла.

6.2.1. Вычисление объема в прямоугольной системе координат

Если тело образуется при вращении вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси *Ox* будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y=f(x)$.

Площадь сечения $S(x)$, соответствующего абсциссе *x*, как площадь круга, равна πy^2. Дифференциал объема тела, соответствующий приращению dx, будет $dV=\pi y^2dx$.

Если тело образуется при вращении вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, прилежащей к оси *Oy*, то $dV=\pi x^2dy$.

Воспользуемся дифференциальным методом.

1. Найти дифференциал объема

$$dV = S(x)dx \text{ или } dV = S(y)dy$$

как главную часть приращения объема.

2. Определить пределы интегрирования $a \le x \le b$ или $c \le y \le d$.
3. Вычислить объем

$$V_{Ox} = \int_a^b S(x)dx \text{ или } V_{Oy} = \int_c^d S(y)dy.$$

Дифференциал объема в прямоугольной системе координат – объем цилиндра с бесконечно малой высотой и переменным основанием.

Форма записи дифференциала объема зависит от условий задачи – от того, как задана фигура, которая в результате вращения образует тело, и что принято за ось вращения.

Ось вращения будем отмечать дугой со стрелкой. На всех рассматриваемых четырех чертежах изображено сечение тела плоскостью чертежа.

1. $a \le x \le b,$ $0 \le y \le f(x),$ $dV = \pi y^2 dx.$

2. $a \le x \le b,$ $y_1(x) \le y \le y_2(x),$ $dV = \pi(y_2^2(x) - y_1^2(x))dx$

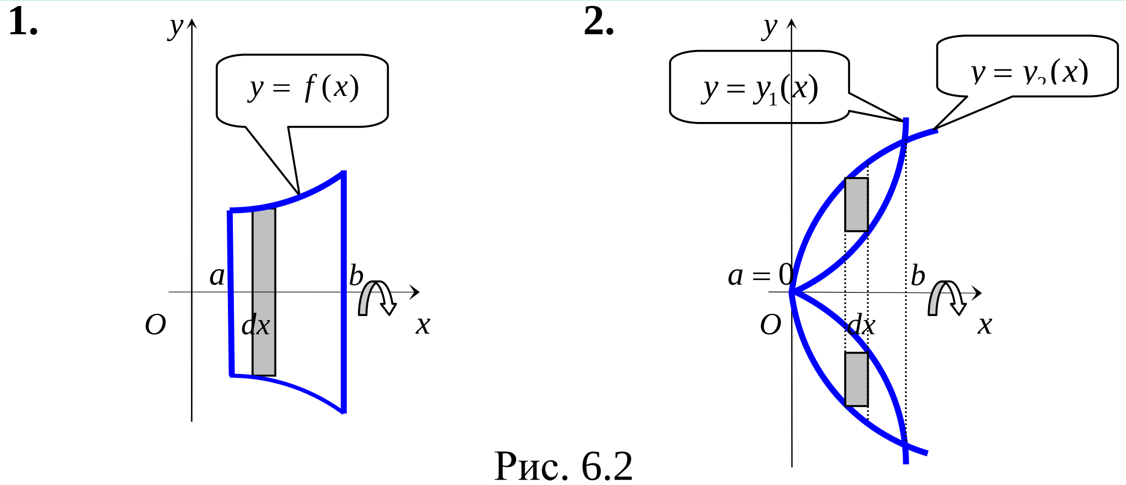
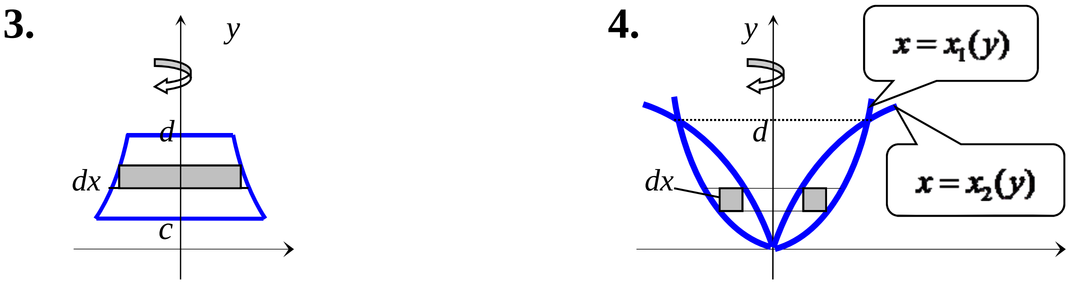


Рис. 6.2



O x $c = 0$ O x

3. $0 \le x \le x(y)$,
$c \le y \le d$.
$dV = \pi x^2 dy$.

4. $x_1(y) \le x \le x_2(y)$,
$c \le y \le d$.
$dV = \pi(x_2^2(y) - x_1^2(y))dy$.

6.3. Вычисление длин плоских кривых при различных способах задания линий

6.3.1. Длина кривой

Рассмотрим на плоскости кривую λ, заданную параметрически:

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, причем различным значениям $t \in [\alpha;\ \beta]$ соответствуют различные точки $(x; y)$ (т.е. нет кратных точек).

Такую кривую назовем ***простой*** (***плоской***) ***незамкнутой кривой***.

Если точки $A\big(x(\alpha); y(\alpha)\big)$ и $B\big(x(\beta); y(\beta)\big)$ совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая λ называется ***простой замкнутой кривой***.

Длина дуги – аддитивная величина, следовательно, ее можно найти с помощью определенного интеграла. Воспользуемся дифференциальным методом.

1. Найти дифференциал дуги $d\lambda$ в зависимости от способа задания кривой.
2. Определить пределы интегрирования.
3. Вычислить интеграл от дифференциала дуги.

6.3.2. Длина кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x), a \le x \le b$, причем функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;\ b]$ непрерывную производную, то дифференциал дуги вычисляется по формуле

$$d\lambda = \sqrt{1 + (f')^2}dx,$$

а длина кривой по формуле

$$\lambda = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}dx.$$

Если кривая задана уравнением $x = \mathrm{g}(y), c \leq y \leq d$, причем функция $\mathrm{g}(y)$ имеет на отрезке $[c;\ d]$ непрерывную производную, то дифференциал дуги вычисляется по формуле

$$d\lambda = \sqrt{1 + (\mathrm{g}')^2} dy,$$

а длина кривой по формуле

$$\lambda = \int_a^b \sqrt{1 + (\mathrm{g}')^2} dy.$$

6.3.3. Длина кривой, заданной параметрически

Пусть кривая λ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют на отрезке $[\alpha;\ \beta]$ непрерывные производные. Тогда дифференциал дуги выражается формулой

$$d\lambda = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$$

а длина кривой

$$\lambda = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

6.3.4. Длина кривой в полярных координатах

Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $r(\varphi)$ имеет на отрезке $[\alpha;\ \beta]$ непрерывную производную, дифференциал дуги выражается формулой

$$d\lambda = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi,$$

а длина кривой

$$\lambda = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое разбиение отрезка $[a;\ b]$?
2. Что такое интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$?
3. Дайте определение предела интегральных сумм при измельчении разбиений($\lambda(P) \to 0$) отрезка $[a;\ b]$.
4. Что такое определенный интеграл?
5. Укажите геометрический смысл определенного интеграла.
6. Какая функция называется интегрируемой?
7. Докажите, что неограниченная функция не интегрируема.

8. Интегрируема ли функция$f(x)=\frac{1}{x}$ на отрезке $[1;\ 2]$? На ке $[-1;\ 1]$?

9. Интегрируема ли функция $f(x)=\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right]$? На отрезке $[-1;\ 1]$?

10. Интегрируема ли функция $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ на отрезке $[-3;\ -2]$? На отрезке $[-1;\ 0]$? На отрезке $[-1;\ 1]$?

11. Пусть$\int_a^b f(x)dx=0, f(x)\neq 0$. Как это истолковать геометрически?

12. Перечислите свойства определенного интеграла.

13. Следует ли из интегрируемости суммы интегрируемость слагаемых?

14. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

15. Интегрируема ли сумма двух функций, если одно слагаемое интегрируемо, а другое нет?

16. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

17. Интегрируема ли сумма двух интегрируемых функций?

18. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\ c]$ и не интегрируема на отрезке $[c;\ b]$. Что можно сказать о её интегрируемости на отрезке $[a;\ b]$?

19. При каких условиях справедлива формула Ньютона-Лейбница?

20. Перечислите условия, при выполнении которых справедливы:

а) формула замены переменной;

б) формула интегрирования по частям.

21. С помощью, каких подстановок вычисляются интегралы, содержащие дробно-линейные иррациональности?

22. Для вычисления, каких типов интегралов удобны тригонометрические подстановки?

23. Для вычисления, каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям?

24. Что такое плоская фигура?

25. Сформулируйте свойство аддитивности.

25. Сформулируйте дифференциальный метод.

26. Зависит ли форма записи дифференциала площади от условий задачи?

27. Как вычисляются площади в полярной системе координат?

28. Что является дифференциалом площади в этой системе?

29. Изменится последовательность действий в дифференциальном методе вычисления площадей?

Примеры решения задач

3. Свойства определенного интеграла

Пример 3.1. Оценить интеграл $\int_0^{\pi}(3+\sin^6 x)dx$.

▲ Поскольку в данном случае $a=0, b=\pi, b-a=\pi$, для функции

$$f(x)=3+\sin^6 x$$

$$m=\min_{0\le x\le\pi}(3+\sin^6 x)=(3+\sin^6 x)\Big|_{\substack{x=0\\ x=\pi}}=3,$$

$$M=\max_{0\le x\le\pi}(3+\sin^6 x)=(3+\sin^6 x)\Big|_{\substack{x=0\\ x=\frac{\pi}{2}}}=4,$$

то согласно свойству 10 имеем

$$3\pi\le\int_0^{\pi}(3+\sin^6 x)dx\le 4\pi.$$ ▼

Пример 3.2. Найти среднее значение функции на заданном отрезке:
а) $f(x)=\cos x$ на $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ на $[-1;\ 2]$.

а) ▲ По определению получаем:

$$\mu=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos x dx=\frac{2}{3\pi}\sin x\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{2}{3\pi}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 0\right)=-\frac{2}{3\pi}.$$

Отметим, что непрерывная функция $\cos x$ принимает на ке $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ значение $\mu=-\frac{2}{3\pi}$, а именно $\cos c=-\frac{2}{3\pi}$, в точке

$$c=\arccos\left(-\frac{2}{3\pi}\right)\in\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right].$$ ▼

б) ▲ $\mu=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}\operatorname{sgn} x dx=\frac{1}{3}|x|\Big|_{-1}^{2}=\frac{1}{3}(|2|-|-1|)=\frac{1}{3}.$

В данном случае разрывная функция

$$\operatorname{sgn}x=\left[\begin{array}{l}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0, x\in[-1;1]\\ -1 \text{ при } x<0\end{array}\right.$$

не принимает на отрезке $[-1;\ 2]$ значение $\mu=\frac{1}{3}$. ▼

Пример 3.3. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \text{ или} \int_0^1 e^{-x}dx.$$

▲ На отрезке $0 \le x \le 1$ имеем $x^2 \le x$, откуда $-x \le -x^2$, и так как число $e > 1$, то $e^{-x} \le e^{-x^2}$ и по свойству 8

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \ge \int_0^1 e^{-x}dx. \text{ ▼}$$

4. Вычисление определенного интеграла

4.1. Непосредственное интегрирование

Пример 4.1. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x^4};\ 2)\ \int_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx;\ 3)\ \int_{-1}^{7}\frac{dt}{\sqrt{3t+4}};\ 4)\ \int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};\ \ 5)\ \int_0^2\frac{x+3}{x^2+4}dx.$$

1) ▲ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x^4}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^{-4}dx=-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2^3}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right)=-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{8}-8\right)=\underline{\underline{\tfrac{21}{8}}}.$ ▼

2) ▲ $\displaystyle\int_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx=\int_0^4 dx+4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}d\left(\tfrac{1}{4}x\right)=\left(x+4e^{\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4=4+4(e-1)=\underline{\underline{4e}}.$ ▼

3) ▲ $\displaystyle\int_{-1}^{7}\frac{dt}{\sqrt{3t+4}}=\tfrac{1}{3}\int_{-1}^{7}(3t+4)^{-\frac{1}{2}}d(3t+4)=\tfrac{1}{3}\frac{(3t+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{-1}^{7}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3t+4}\Bigg|_{-1}^{7}=$

$=\tfrac{2}{3}\left(\sqrt{3\cdot 7+4}-\sqrt{3\cdot(-1)+4}\right)==\tfrac{2}{3}(5-1)=\underline{\underline{\tfrac{8}{3}}}.$ ▼

4) ▲ $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\left\{d(\ln x)=\frac{dx}{x}\right\}=\int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\arcsin\ln x\Big|_1^e=$

$=\arcsin\ln e-\arcsin\ln 1=\underline{\underline{\tfrac{\pi}{2}}}.$ ▼

5) ▲ $\displaystyle\int_0^2\frac{x+3}{x^2+4}dx=\tfrac{1}{2}\int_0^2\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+3\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=\left(\tfrac{1}{2}\ln(x^2+4)+\tfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2=$

$=\tfrac{1}{2}\left(\ln(2^2+4)-\ln 4\right)+\tfrac{3}{2}\left(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0\right)=$

$=\tfrac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)+\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4}=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}\ln 2-\tfrac{3}{8}\pi}}.$ ▼

4.2. Интегрирование по частям определенного интеграла

Пример 4.2. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx;\ 2)\ \int_1^e \ln x\,dx;\ 3)\ \int_0^2 x e^x dx;\ 4)\ \int_1^e (1+\ln x)^2 dx;$$

1) ▲ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \sin x dx, & V = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$

$= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0\cdot\cos 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \underline{\underline{1}}.$ ▼

2) ▲ $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} U = \ln x, & dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx, & V = x \end{matrix}\right\} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} =$

$= e\ln e - 1\cdot\ln 1 - x\Big|_0^2 = e - (e-1) = \underline{\underline{1}}.$ ▼

3) ▲ $\displaystyle\int_0^2 x e^x dx = \left\{\begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV = e^x dx, & V = e^x \end{matrix}\right\} = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - 0\cdot e^0 - e^x\Big|_0^2 =$

$= 2e^2 - (e^2 - e^0) = \underline{\underline{e^2 + 1}}.$ ▼

4) ▲ $\displaystyle\int_1^e (1+\ln x)^2 dx = \left\{\begin{matrix} U = (1+\ln x)^2, \ dU = 2(1+\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dV = dx, \qquad V = x \end{matrix}\right\} =$

$\displaystyle = x(1+\ln x)^2\Big|_1^e - 2\int_1^e (1+\ln x)dx = \left\{\begin{matrix} U = 1+\ln x, \ dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = dx, \quad V = x \end{matrix}\right\} =$

$\displaystyle = e(1+\ln e)^2 - 1\cdot(1+\ln 1)^2 - 2\left(x(1+\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} \right) =$

$= 4e - 1 - 2\left(e(1+\ln e) - 1\cdot(1+\ln 1) - x\Big|_1^e\right) =$

$= 4e - 1 - 2\left(2e - 1 - (e-1)\right) = \underline{\underline{2e - 1}}.$ ▼

4.3. Замена переменной в определенном интеграле

Пример 4.3. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}};\ 2)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}};\ 3)\ \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}};\ 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru