

ВВЕДЕНИЕ

Трудно представить современную жизнь без электрической энергии, а ведь совсем недавно, по историческим меркам, люди вместо электрического освещения использовали свечи и керосиновые лампы. Радио и телевидение, не говоря о компьютерах, — представить не могли. А как страшен был заводской цех, когда от одного ведущего вала с помощью длинных кожаных ремней вращались валы токарных или ткацких станков. Электричество сделало все чище и безопаснее.

Физику электричества вы уже изучали в школе и в вузе. Чем же отличается наш курс **теоретических основ электротехники** (ТОЭ) от обычной физики электрических явлений? Работа огромного количества электротехнических устройств объясняется законами и принципами, которые невозможно уместить в обычный курс физики. Кроме того, физика изучает общие закономерности, инженер же имеет дело с практическим применением электромагнитных явлений, и основная задача инженерной науки — расчет и конструирование новых устройств, грамотное использование и обслуживание электротехнического оборудования. Что дает курс ТОЭ: понимание физики электромагнетизма, применение методов ТОЭ к расчету электрических цепей и устройств; ТОЭ — это как бы «пропуск» в другие специальные разделы электротехники: электромеханику, электрические машины и аппараты, электронику, микропроцессорную технику, электропривод, электроснабжение и т. д.

Курс ТОЭ состоит из двух больших частей: теории цепей и теории поля. В настоящее время возникла потребность в третьей части — компьютерном моделировании электрических цепей и электромагнитных полей, но пока официально этого раздела в нашем курсе нет. С этим можно было бы согласиться 30 лет назад, когда о личных компьютерах даже не мечтали, да и соответствующих программ не было. Сейчас есть всё, даже бесплатные программы, требуется только желание.

Можно сожалеть, но курс ТОЭ нельзя отнести к простым дисциплинам хотя бы потому, что здесь много физики и математики. Но основная сложность курса в уровне изучения. Вообще, несколько условно, восприятие знаний человеком можно разделить на следующие уровни: *первый — узнавания* («А..., было-было, рассматривали»), *второй — воспроизведения* (может рассказать о том, что изучали), *третий — понимания и применения*, *четвертый — критика* («А я предлагаю не такое доказательство, а вот такое»). Очень часто изучение останавливается на втором и частично третьем уровне. Наш курс — основа профессиональных знаний — весь целиком на третьем уровне. Недостаточно повторить услышанное или прочитанное, наша задача — понимать и применять. Поэтому курс ТОЭ включает кроме лекций практические занятия (в основном решение различных задач, когда по-настоящему складывается понимание того или иного вопроса), работу за компьютером по моделированию электрических цепей и электромагнитных полей и лабораторные работы с реальными индуктивностями, емкостями, напряжениями, когда можно, что назы-

вается, «руками пощупать, понюхать и испугаться» и поверить теорию. Подведение итогов всего — индивидуальные задания. Систематическое выполнение перечисленного и является гарантией успешного профессионального освоения курса ТОЭ.

Немного истории

Хотя явления электричества и магнетизма были известны с древнейших времен, все основные законы, составившие полную систему уравнений Максвелла, открыты в XIX в. Соответствующие технические изобретения появлялись через несколько лет.

Основные даты становления физики электричества

- 1819 г. — механическое воздействие тока на магнитную стрелку, Эрстед
1831 г. — явление электромагнитной индукции, Фарадей
1834 г. — закон Джоуля — Ленца
1873 г. — «Трактат об электричестве и магнетизме» Дж. К. Максвелла
1888 г. — опыты Герца

Приложения физики к электротехнике

- 1832 г. — электромагнитный телеграф, Шиллинг
1845 г. — законы Кирхгофа
1876 г. — начало применения переменного тока, Яблочков
1889 г. — первый трехфазный двигатель Доливо-Добровольского
1895 г. — радио Попова

Курс ТОЭ в России.

1904 г. — в Петербурге в политехническом институте профессор В. Ф. Мицкевич начал читать курс «Теория электрических и магнитных явлений».

1905 г. — в Москве в высшем техническом училище К. А. Круг начал читать курс «Теория переменных токов».

1916 г. — издана первая в России книга «Основы электротехники». Автор — К. А. Круг.

ТОЭ как наука сложилась давно и переворотов здесь не ожидается. Более того, всякие опровержения электротехники, которые периодически то появляются в печати, то их и приносят некоторые изобретатели, увы, происходят от плохого понимания ТОЭ. Не было еще ни одного эксперимента, который при глубоком рассмотрении, не объяснялся бы уравнениями Максвелла (конечно, сюда не относятся квантomeханические явления или шаровая молния, одна из теорий которой, кстати, тоже квантовая).

Что дальше?

В настоящее время основным аппаратом в ТОЭ стал компьютер. Можно рассчитать практически все: от сложнейших нелинейных схем до СВЧ¹ устройств и трехмерных моделей электрических двигателей. Но это не значит, что традиционный курс ТОЭ теперь не нужен. Как это не парадоксально, но для грамотного применения компьютерных программ нужно знать гораздо больше, чем при ручных расчетах. Да, рутинные вычисления не нужны, но зато нужно

¹ СВЧ — сверхвысокочастотные.

понимать, что же выдал компьютер и можно ли доверять полученным значениям, а это неизмеримо сложнее — ведь сложнее задача. Еще одна особенность численных расчетов — нет общих закономерностей. Чтобы их получить, требуются многократные вычисления, да и то не всегда это помогает. Удастся ли это исправить с помощью искусственного интеллекта? Поживем — увидим.

1. ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ

1.1. Линейные цепи постоянного тока

С тех пор как Евклид создал свои «Начала», положив основу геометрии, все науки стремятся к аксиоматизации, т. е. небольшому количеству постулатов, из которых путем логических доказательств получают все остальные соотношения. Не избежала этого и теория цепей. Мы не будем делать упор на постулаты и аксиомы, но без основных определений и представлений не обойтись. В ТОЭ речь идет о протекании тока в различных, в основном технических, устройствах. Под *цепью* будем понимать совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока. Обычно цепь — это какая-то схема, будь то телевизор, утюг, линия электропередач и т. д. А вот это что такое (рис. 1.1)? К сожалению, это тоже электрическая цепь и подобные задачи иногда приходится решать.

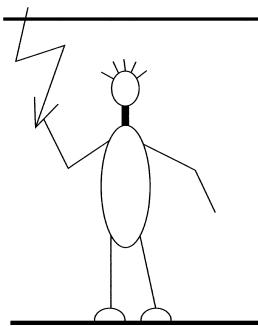


Рис. 1.1

Определения, которые мы сделаем, носят интуитивный характер и вытекают из опыта, эксперимента.

Ветвь — участок цепи, по которому протекает один и тот же ток.

Узел — точка соединения нескольких ветвей (обычно не менее 3, но может быть и 2).

Элемент цепи — некоторый объект, имеющий не менее 2 выводов.

Пассивные элементы — элементы, не вырабатывающие электрическую энергию.

Активные элементы — источники энергии или элементы, содержащие источники энергии внутри.

Двухполюсники — элементы, имеющие два вывода.

Многополюсники — элементы, имеющие несколько выводов (трехполюсники, четырехполюсники и т. д.).

Планарные схемы — схемы, которые можно нарисовать на плоскости без пересечения ветвей (пересекаются, но не соединяются). Если это сделать нельзя — *непланарные*.

Точечные элементы — элементы, размеры которых не входят в уравнения, описывающие элемент.

Элементы с распределенными параметрами — в уравнениях, описывающих элемент, присутствует пространственная координата.

Элементы электрической цепи соединяются проводниками. Принято считать, что проводники не имеют сопротивления. Если несколько узлов соединены «чистыми» проводниками, то все они имеют один и тот же потенциал и их можно заменить одним узлом.

Мы будем пока рассматривать цепи с сосредоточенными (точечными) параметрами.

Самое поразительное в теории цепей, что каким бы сложным и многополюсным ни было устройство, схема замещения будет состоять из небольшого набора однотипных элементов — идеальных двухполюсников.

1.1.1. Элементы электрических цепей

В цепях постоянного тока этих элементов три: сопротивление, источник напряжения и источник тока².

Сопротивление

Обычное линейное сопротивление обозначается буквой R или r , измеряется в Омах (Ом), а также $1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$, $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ и т. д. Постоянные токи и напряжения обозначают большими буквами. По закону Ома ток I при прохождении по сопротивлению R вызовет падение напряжения

$$U = R \cdot I$$

для линейного сопротивления и

$$U = f(I)$$

— для нелинейного. Эту зависимость можно изобразить графически в виде вольт-амперной характеристики (рис. 1.2).

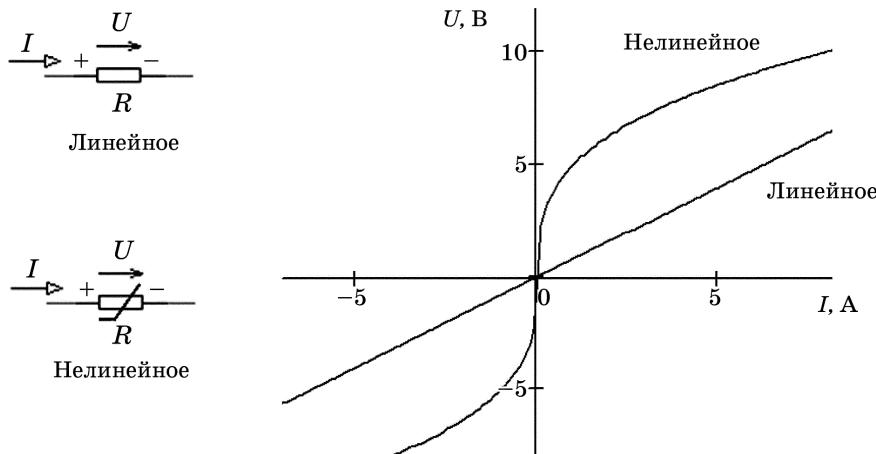


Рис. 1.2

Принято на схемах изображать токи и напряжения так, как будто они положительные, хотя в расчетах могут получиться и отрицательные значения. Знак

² В действительности есть еще элементы, но не двухполюсники, о них мы поговорим позже.

падения напряжения зависит от направления тока, причем стрелка падения напряжения направлена от «+» к «-».

Замечание:

1) если в расчете получился отрицательный ток, не изменяйте его направление на схеме. Это может привести к путанице и ошибкам. Пусть останется отрицательным;

2) в сопротивлении в виде тепла выделяется энергия. В единицу времени это составит

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2$$

— электрическая мощность. Измеряется в ваттах (Вт, кВт, МВт и т. д.);

3) величина обратная сопротивлению называется проводимостью:

$$g = 1/R.$$

Измеряется в сименсах (См) или Ом^{-1} .

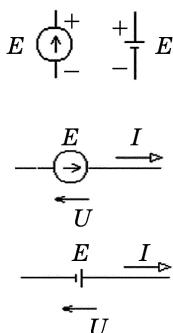
Источник ЭДС³ — идеальный источник напряжения. Допускается изображение в виде электрической батареи (рис. 1.3). Вольт-амперная характеристика идеального источника ЭДС — прямая линия, параллельная оси токов, т. е. каким бы ни был ток (нагрузка), напряжение на источнике не меняется. Такое свойство может иметь лишь источник бесконечной мощности. Каким будет внутреннее сопротивление источника ЭДС?

Определим его как $R_{\text{вн}} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I}$, т. е. как отношение приращения напряжения ΔU к приращению тока ΔI . Так как напряжение не меняется при любом приращении тока, то $R_{\text{вн}} = 0$. У реального источника внутреннее сопротивление нулю не равно. Следовательно, в схеме замещения (рис. 1.3) появится ненулевое сопротивление $R_{\text{вн}}$. Падение напряжения на $R_{\text{вн}}$ уменьшает напряжение на источнике ЭДС, поэтому

$$U = E - R_{\text{вн}} \cdot I.$$

Когда нет нагрузки, холостой ход, напряжение на зажимах источника: $U_{ab} = U = E$.

Идеальный



Реальный

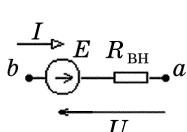


Рис. 1.3

³ ЭДС — электродвижущая сила.

На рисунке 1.3 часть вольт-амперной характеристики реального источника показана пунктиром — недопустимый режим работы.

У реального источника мощность всегда меньше $E \cdot I$, так как часть энергии $R_{\text{вн}} \cdot I^2$ идет на нагрев самого источника. Практически все источники, которыми мы пользуемся, — источники ЭДС.

Источник тока

Элементы, что мы рассмотрели, знакомы вам из курса физики. Этот же элемент новый. В ТОЭ вводится идеальный источник тока. Вольт-амперная характеристика идеального источника тока — прямая линия (рис. 1.4), параллельная оси напряжений, т. е. каким бы ни было напряжение на источнике, ток через него остается постоянным $I = J$. Это тоже источник бесконечной мощности. Внутреннее сопротивление источника

$$R_{\text{вн}} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I} = \infty,$$

так как $\Delta I = 0$. Реальный источник тока имеет конечное сопротивление, поэтому

$$U = R_{\text{вн}} \cdot (J - I).$$

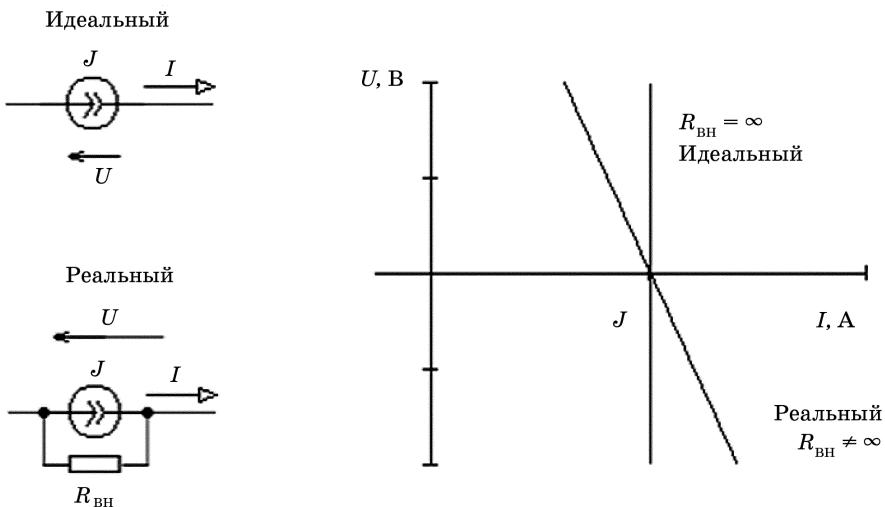


Рис. 1.4

Нормальный режим работы источника тока — короткое замыкание. Конечно, это необычный режим, но и источник тока — необычный источник. Есть ли такие источники в природе?

Обычно источник тока — это система автоматического регулирования с обратными связями. Работает в определенном диапазоне изменения нагрузки. Из природных элементов на очень короткое время идеальным источником тока можно считать катушку индуктивности с током.

Замечание. С появлением компьютерного моделирования, в основе которого лежит математическое, аксиоматизация может показаться первым приближением точного описания. На самом деле это не так. В теории цепей все слож-

ные модели, оказывается, можно построить из простых идеальных элементов. То есть идеальные элементы и их свойства являются основой модели любой сложности.

1.1.2. Эквивалентность реального источника тока и реального источника ЭДС

Оказывается, реальные источники тока и напряжения при определенных условиях полностью тождественны. Поместим в один ящик реальный источник тока, а в другой — реальный источник ЭДС (рис. 1.5). Когда тождественны эти два источника? Когда никакими опытами нельзя определить, в каком ящике источник тока, а в каком ЭДС (естественно, не разрушая ящики). Как должны относиться параметры источников?

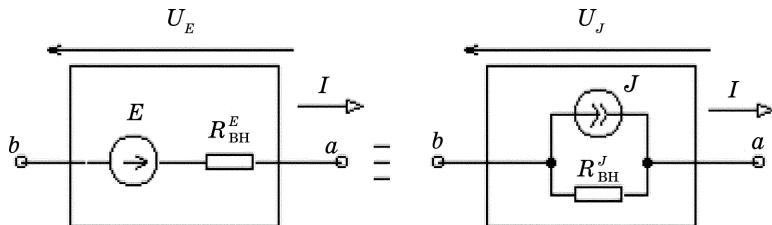


Рис. 1.5

Для этого «проделаем» два крайних опыта: холостой ход и короткое замыкание (если в этом случае они равны, то под обычной нагрузкой и подавно). Число опытов должно быть равно числу неизвестных. В каждом источнике неизвестных два.

На холостом ходу

$$U_E = E, \quad U_J = R_{\text{BH}}^J J,$$

и они должны быть равны

$$E = R_{\text{BH}}^J J.$$

При коротком замыкании

$$I_E = \frac{E}{R_{\text{BH}}^E}, \quad I_J = J,$$

откуда

$$J = \frac{E}{R_{\text{BH}}^E}.$$

Следовательно, два источника тождественны, если равны их внутренние сопротивления $R_{\text{BH}}^E = R_{\text{BH}}^J = R_{\text{BH}}$ и выполняется равенство

$$E = R_{\text{BH}} \cdot J.$$

Замечание:

- 1) мощности идеальных источников не равны, но мощности на зажимах, конечно, одинаковые;
- 2) в зарубежной литературе источник электрической энергии в виде источника напряжения называют представлением Тевенина, а в виде источника тока — Нортоном.

1.1.3. Законы Кирхгофа

Основные законы электрической цепи.

Первый закон Кирхгофа. В любом узле электрической цепи алгебраическая⁴ сумма токов, сходящихся к узлу, равна нулю. Для данного узла (рис. 1.6а):

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

В общем виде этот закон обычно записывают так:

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0.$$

Из какого более фундаментального закона вытекает первый закон Кирхгофа? Из закона *сохранения заряда*. Поэтому первый закон Кирхгофа выполняется и для любого замкнутого пространства: сколько зарядов притекает в это пространство, столько и уходит из него.

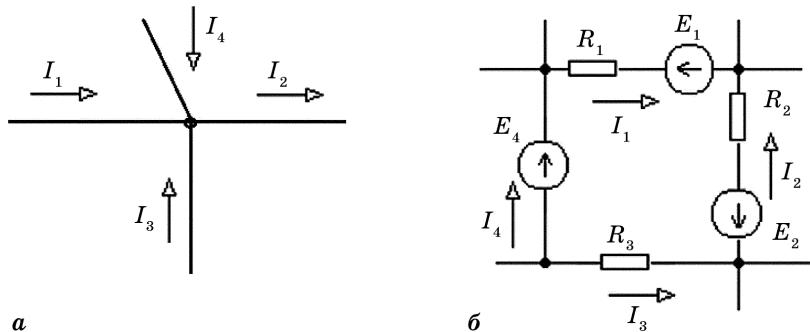


Рис. 1.6

Второй закон Кирхгофа. В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжений на сопротивлениях контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n E_k.$$

Направление обхода контура произвольное. Если направление обхода и направление тока совпадают — знак падения напряжения «+». Аналогично и для ЭДС: направления обхода и ЭДС одинаковы — знак у ЭДС «+».

Для данной схемы (рис. 1.6б) второй закон Кирхгофа запишется в следующем виде:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = -E_1 + E_2 + E_4.$$

Из какого более фундаментального закона физики вытекает второй закон Кирхгофа? Когда изучают физику, то кажется, что этот закон и не нужен, — *потенциальность* электрического поля. Работа по перемещению заряда в электрическом поле из одной точки в другую не зависит от пути перемещения, по-

⁴ Алгебраическая — с учетом знака.

этому работа по любому замкнутому контуру дает ноль. Ведь в сопротивлениях и в ЭДС присутствуют электрические поля, а ток — это те же заряды, а напряжение — это работа по перемещению единичного заряда.

Законы Кирхгофа в общем виде применимы к любым цепям линейным и нелинейным, постоянного и переменного тока.

1.1.4. Потенциальная диаграмма

Для наглядного изображения распределения потенциалов в электрической цепи применяют потенциальную диаграмму. Выделим в рассчитанной схеме (рис. 1.7а) замкнутый контур (можно и разомкнутый и, вообще, любую последовательность соединенных точек). Токи в ветвях известны. Чему равны потенциалы всех точек в этом контуре? На этот вопрос однозначно ответить нельзя, пока мы не установим значение потенциала какой-либо точки схемы, ведь потенциал — функция, определенная с точностью до константы. Часто в реальных установках обязательно должно быть заземление, тогда потенциал заземленных точек, как вы знаете, принимается равным нулю. В расчетах нулевую точку можно выбирать произвольно или как наиболее удобную. В данной схеме все точки обозначены, нулевая заземлена: $\varphi_0 = 0$, тогда потенциал точки a : $\varphi_a = \varphi_0 - R_1 I_1$. Почему « \rightarrow » перед падением напряжения на R_1 ? Еще раз напомним о падении напряжения на R (рис. 1.7б).

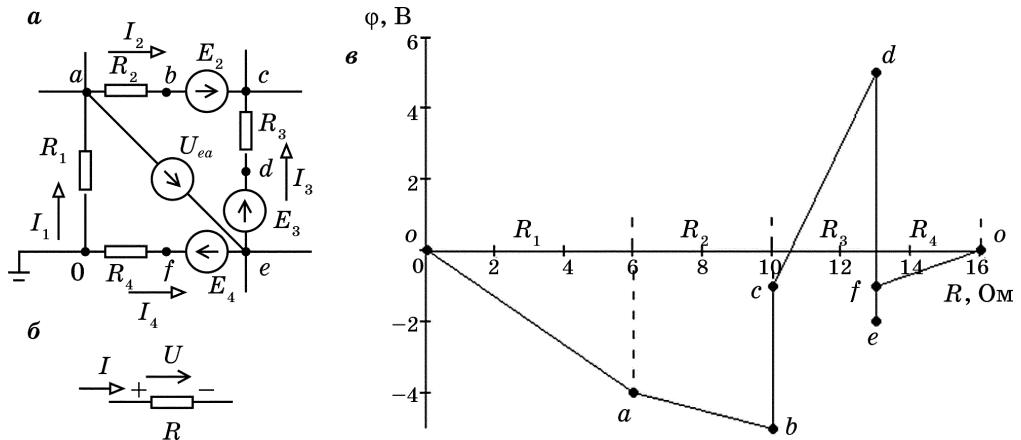


Рис. 1.7

Поэтому потенциал точки 0 будет больше, чем точки a . Аналогично для точки b : $\varphi_b = \varphi_a - R_2 I_2$. Потенциал точки c будет больше на величину идеальной ЭДС E_2 : $\varphi_c = \varphi_b + E_2$. Запишем значения потенциалов остальных точек: $\varphi_d = \varphi_c + R_3 I_3$, $\varphi_e = \varphi_d - E_3$, $\varphi_f = \varphi_e + E_4$, $\varphi_0 = \varphi_f + R_4 I_4$. Так как контур замкнут, то мы опять должны получить нулевое значение в последней формуле.

Изобразим все это графически (рис. 1.7б). Значения потенциалов во всех точках отложим по оси y , а по оси x — сопротивления. Чтобы графики не накладывались один на другой, следующее сопротивление будем добавлять к предыдущему. Сопротивления идеальных источников ЭДС равны нулю.

На практике потенциальная диаграмма используется значительно реже, чем векторная, которую мы рассмотрим позже, но построение потенциальной диа-

грамм — тренировка по нахождению разности потенциалов между двумя любыми точками схемы. Например, между точками a и e включен вольтметр. Определить его показание. Это можно сделать несколькими способами:

1) непосредственно по потенциальной диаграмме

$$\varphi_e - \varphi_a = -2 - (-4) = 2;$$

2) рассчитаем по схеме, используя те же приемы, что и при построении потенциальной диаграммы: $\varphi_a + R_1 I_1 - R_4 I_4 - E_4 = \varphi_e$, т. е. добавив к потенциалу точки a значение падения напряжения на R_1 , мы получаем потенциал точки 0, затем точки f и т. д., пока не дойдем до конечной точки e . Переносим φ_a в правую часть — получаем разность потенциалов между точками e и a . То же самое значение будет, если пройти по второму пути $a-b-c-d-e$;

3) есть еще один способ — второй закон Кирхгофа. Представим, что между точками e и a включен источник ЭДС U_{ea} . Тогда по второму закону Кирхгофа для левого контура:

$$R_1 I_1 - R_4 I_4 = E_4 + U_{ea}.$$

Замечание. Из-за неправильного определения разности потенциалов часто возникают очень серьезные ошибки, например, при расчете переходных процессов, при построении векторных диаграмм и т. д.

Падение напряжения на соединении линейных сопротивлений и ЭДС называют *законом Ома для участка цепи*.

1.1.5. Баланс мощностей в электрической цепи

Главный закон в физике — это закон сохранения энергии. В электрической цепи сигнал распространяется так быстро, что суммарная мгновенная энергия отдаваемая источниками, будет равна потребляемой всеми элементами мощности — энергии в тот же момент. Это относится не только к цепям постоянного, но и переменного тока⁵. Записывается этот баланс в виде

$$\sum_{k=1}^N P_{k,\text{ист}} = \sum_{k=1}^M P_{k,\text{потр}}$$

или

$$\sum_{k=1}^{N_e} E_k \cdot I_k + \sum_{j=1}^{N_J} U_j \cdot J_j = \sum_{k=1}^M R_k \cdot I_k^2,$$

где N_e — число источников ЭДС; N_J — число источников тока; M — число потребителей; U_j — падения напряжения на источниках тока. Сопротивления — всегда потребители, источники могут быть генераторами энергии, а могут — потребителями (зарядка аккумулятора и т. д.).

⁵ В тепловых сетях, если их представить подобием электрических, баланс мгновенной энергии не выполняется. Например, при увеличении температуры теплоносителя источник (котел) выделяет больше энергии, чем потребитель (жилой микрорайон) получает. Процесс идет с задержкой во времени. Но если учесть сам трубопровод, то баланс соблюдается. Нечто похожее, может быть, и в электрических цепях с распределенными параметрами.

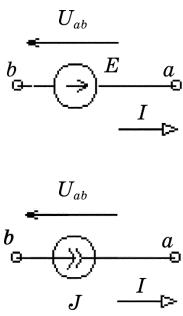


Рис. 1.8

Мощность любого участка цепи ab равна

$$P_{ab} = U_{ab} \cdot I_{ab}.$$

Если знак падения напряжения U_{ab} и знак тока I_{ab} совпадают ($P_{ab} > 0$), то участок цепи потребляет энергию, если нет ($P_{ab} < 0$) — то выдает энергию.

Для идеальных источников (рис. 1.8):

1) у ЭДС $U_{ab} = E$, если ток $I > 0$ — источник энергии, если $I < 0$ — потребитель энергии;

2) у источника тока $I = J$, поэтому если $U_{ab} > 0$ — источник энергии, если $U_{ab} < 0$ — потребитель.

1.2. Методы расчета линейных электрических цепей

Что значит рассчитать электрическую схему и зачем это нужно? Представьте, что вы проводите электричество в дом. Какого сечения выбрать провода? Если взять тонкие, то при включении стиральной машины с подогревом, проводка может сгореть, если взять толстые, то проводка будет дорогой, да и монтировать сложно.

Различают прямую и обратную задачи. Прямая — известны токи, нужно определить параметры источников. Обратная — известны источники, нужно определить токи в ветвях. Обычно с расчетом цепи связывается обратная задача.

1.2.1. Использование уравнений Кирхгофа

Уравнения Кирхгофа — самый универсальный метод. Используется тогда, когда другие методы не применимы (индуктивно связанные цепи, цепи с зависимыми источниками, нелинейные и т. д.). Сколько уравнений должно быть? Очевидно, что число уравнений равно числу неизвестных токов. В данном примере (рис. 1.9) число неизвестных пять. Перед записью уравнений произвольно указываются токи в ветвях, нумеруются узлы. Число уравнений по первому закону Кирхгофа $n_1 = n_y - 1$ на единицу меньше числа узлов n_y . Это связано с замкнутостью электрической цепи. Для последнего узла уравнение получается из $n_y - 1$ предыдущих, если их все сложить.

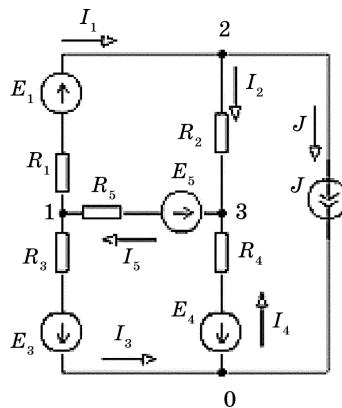


Рис. 1.9

Для данной схемы $n_l = 3$

$$\begin{aligned}-I_1 - I_3 + I_5 &= 0; \\ I_1 - I_2 - J &= 0; \\ I_2 + I_4 - I_5 &= 0.\end{aligned}$$

Число уравнений по второму закону Кирхгофа:

$$n_{II} = n_b - n_J - n_l,$$

где n_b — число ветвей, n_J — число ветвей с источниками тока, n_l — число уравнений по первому закону Кирхгофа. Величина эта очевидна: число ветвей — это число токов, если в ветви источник тока, то ток известен, т. е. $n_b - n_J$ — число неизвестных. В данном случае $n_{II} = 6 - 1 - 3 = 2$. Эквивалентное определение числа уравнений по второму закону Кирхгофа — число замкнутых контуров, не содержащих источников тока и отличающихся хотя бы одной ветвью. Например, в данной схеме можно взять контуры с ветвями 1–2–5; 5–4–3 и 1–2–4–3. Но один из контуров лишний: контур 1–2–4–3 не содержит ветвей, которых бы не было в двух предыдущих. Таким образом:

$$\begin{aligned}R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5 &= E_1 - E_5; \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5 &= E_3 - E_4 - E_5.\end{aligned}$$

Полученную систему уравнений запишем в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ E_1 - E_5 \\ E_3 - E_4 - E_5 \end{bmatrix}.$$

Систему линейных алгебраических уравнений легко решить, например, в Mathcad. Для этого обозначим квадратную матрицу через R , правую часть через E . Тогда токи находятся из выражения $I = R^{-1} \cdot E$.

1.2.2. Метод контурных токов

Этот метод предложил еще Максвелл. Рассмотрим идею метода на примере простейшей двухконтурной схемы (рис. 1.10). Запишем уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 + E_3; \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 + E_3. \end{cases}$$

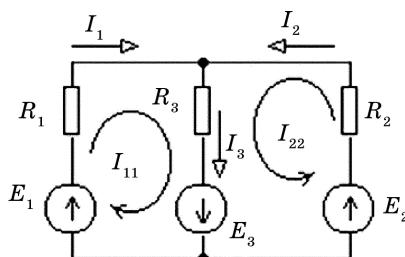


Рис. 1.10

В полученной системе уравнений исключим уравнение, записанное по первому закону, т. е. ток $I_3 = I_1 + I_2$, следовательно:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 (I_1 + I_2) &= E_1 + E_3; \\ R_2 I_2 + R_3 (I_1 + I_2) &= E_2 + E_3. \end{aligned}$$

Сгруппируем коэффициенты при токах:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_2 = E_1 + E_3; \\ R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 = E_2 + E_3. \end{cases}$$

Вместо первой системы из трех уравнений, получили эквивалентную систему из двух уравнений. В более сложных схемах сокращение числа уравнений может быть значительным. Кроме того, можно сразу записывать систему уравнений по *методу контурных токов* (МКТ) без промежуточных преобразований. Для этого введем фиктивные токи, называемые контурными, которые протекают в каждом из контуров. В данном случае эти токи совпадают с токами I_1 и I_2 — токами в несмежных ветвях (смежная ветвь — ветвь между контурами):

$$I_{11} = I_1; \quad I_{22} = I_2,$$

тогда первое уравнение примет вид

$$(R_1 + R_3) I_{11} + R_3 I_{22} = E_1 + E_3.$$

Можно сформулировать правило, по которому записывается уравнение: при токе I_{11} контура, относительно которого записывается уравнение, стоит арифметическая (без учета знака) сумма сопротивлений $R_1 + R_3$, взятых по контуру, плюс (минус) произведение сопротивления смежной ветви R_3 на ток I_{22} смежного контура. Знак «плюс», если токи в смежной ветви направлены одинаково. Если таких смежных контуров было бы несколько, то учитывались бы они все. В правой части — алгебраическая сумма ЭДС этого контура (второй закон Кирхгофа).

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 + E_3 \\ E_2 + E_3 \end{bmatrix}.$$

Обычно эту систему уравнений записывают в стандартной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \end{bmatrix},$$

где $R_{11} = R_1 + R_3$ — суммарное сопротивление первого контура, $R_{12} = R_3$ — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, $R_{21} = R_3$ — сопротивление смежной ветви между вторым и первым контурами, $R_{22} = R_2 + R_3$ — суммарное сопротивление второго контура. Очевидно, что $R_{12} = R_{21}$. В правой части $E_{11} = E_1 + E_3$ и $E_{22} = E_2 + E_3$. Отметим, что матрица сопротивлений симметрична относительно главной диагонали.

В свернутой форме матричное уравнение по МКТ:

$$[R] \cdot [I] = [E]$$

представляет собой обычный закон Ома. Число уравнений по МКТ равно числу уравнений по второму закону Кирхгофа.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru