

---

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

**П**редлагаемый читателям учебник основан на одноименном курсе лекций, который автор читал в Новосибирском государственном техническом университете студентам, специализирующимся в области оптики, оптико-электронных систем и информационных технологий. Изложение материала ведется в рамках теории линейных систем, язык которой понятен и физикам, и инженерам. Успех в науке и технике часто определяется ассоциацией идей и аналогией методов из самых различных областей знаний. В частности, из таких аналогий возникла фурье-оптика, быстро развившаяся в теорию систем и преобразований в оптике как базу современных информационных и измерительных технологий. Цель учебника состоит в адаптации этой теории для вузовского образования.

Книга написана под влиянием превосходных в методическом и научном отношении работ, указанных в списке рекомендованной литературы. Излагаются необходимые сведения о сигналах, их спектральных, энергетических и корреляционных характеристиках, основные понятия о линейных системах. Физически обосновывается применение линейных систем в оптике, рассматриваются особенности преобразования оптических сигналов. Описываются распространение и трансформация оптических сигналов в свободном пространстве, оптическое преобразование Фурье, его свойства и различные способы реализации, гауссовые пучки, дается понятие о дуальности оптических систем. Рассматривается оптическое преобразование Гильberta.

Обсуждается преобразование Ганкеля для оптических сигналов с круговой симметрией и произвольных оптических полей, принцип и соотношения неопределенностей для спектрально-ограниченных сигналов, разложение сигналов в ряд Котельникова. Преобразования случайных сигналов в оптике описываются в рамках корреляционной теории. Рассматриваются методы согласованной, избирательно-согласованной и инверсной фильтрации оптических сигналов, а также свойства фильтров с оптической обратной связью. Приводятся сведения о частотно-координатном преобразовании сигналов и вейвлет-преобразовании в оптике. Изложение сопровождается примерами и задачами. Содержание данной книги ограничивается изложением теории линейных систем и преобразований в оптике в самодостаточной форме, не требуя при изучении основных положений обращения к другим источникам учебного и справочного характера.

Учебник предназначен для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по направлениям «Оптотехника», «Фотоника и оптоинформатика», «Приборостроение», «Лазерные системы», «Радиотехника», «Инноватика», и может быть полезен всем интересующимся оптическими системами и их приложениями.

Автор глубоко признателен Р. Г. Надыровой за неоценимую помощь в подготовке рукописи.

---

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Т**еория и преобразование сигналов в оптических системах появились как результат плодотворного синтеза идей и методов, развиваемых в оптике и радиотехнике. Она составляет базу для современных информационных и измерительных технологий.

Понятие «система» в оптике часто определяется как устройство, преобразующее входные сигналы в выходные. При этом свойства системы не определяются простой суммой свойств частей и элементов, ее составляющих, а характеризуются новым качеством. Под сигналом в оптике обычно понимают параметры и функции, характеризующие пространственно-временное состояние светового поля, несущего информацию об изучаемом объекте. Отличительной особенностью оптических сигналов является их преимущественно пространственный характер, поскольку информационными параметрами может служить пространственное (обычно двумерное) распределение амплитуды, фазы, частоты или интенсивности светового поля.

Оптические системы осуществляют многоканальные преобразования и параллельную обработку пространственных сигналов с очень высоким быстродействием, поскольку физическим носителем сигнала является поле, распространяющееся со скоростью света. Например, оптический анализатор спектра выполняет полное двумерное преобразование Фурье за несколько наносекунд. В оптических системах носителем информации является нейтральная

частица-фотон, тогда как в электрических перенос информации осуществляется заряженной частицей-электроном. Этим объясняется высокая устойчивость оптических информационных систем в сравнении с электронными к электромагнитным помехам. Плодотворность системного подхода при анализе оптических процессов выявляется при использовании методов, разработанных в теории линейных систем, и соответствующего аппарата интегральных преобразований. В современной оптике преобразования Фурье и Гильberta составляют методическую базу фундаментальных и прикладных исследований. Преобразования Гильберта лежат в основе традиционных и современных методов визуализации полей фазовой оптической плотности и широко используются в науке и технике. В последнее время они интегрировались в диагностику газовых и конденсированных сред как одно из направлений развития прикладной оптики.

С появлением лазеров стали интенсивно развиваться методы когерентной и некогерентной оптики, нашедшие мощные приложения в различных системах обработки информации, лазерной локации, в измерительной технике и связи. Методы теории систем и преобразований в оптике получили широкое распространение благодаря своей универсальности, которая обеспечивает единый подход в решении самых разнообразных задач, непосредственно связанных с анализом и синтезом математических моделей, подробно описывающих распространение и дальнейшую трансформацию оптических сигналов.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СИГНАЛОВ

**С**лово «сигнал» ведет свое происхождение от латинского слова *signum* — «знак», имеющего широкий смысл. В обычном понимании сигнал отражает состояние физической системы.

*Сигналом* называют процесс изменения во времени или в пространстве физического состояния какого-либо объекта или среды, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений (информации). Теоретический анализ сигналов различной физической природы возможен, если выбран способ их математического описания. Математической моделью оптического сигнала является адекватная функциональная зависимость от временного и пространственного аргументов. По ходу изложения, если не требуются уточнения временного или пространственного характера сигнала, будем пользоваться для аргумента обозначением  $x$ .

Размерность сигнала определяется числом описывающих его независимых функций.

*Многомерный сигнал* — упорядоченная совокупность одномерных сигналов.

В общем случае сигналы с разным порядком следования компонент не равны друг другу:  $\{s_1, s_2\} \neq \{s_2, s_1\}$ .

*Детерминированный сигнал* описывается функциональной зависимостью, позволяющей точно установить его параметры при заданном значении аргумента.

*Случайный сигнал* статистически связан со значением аргумента.

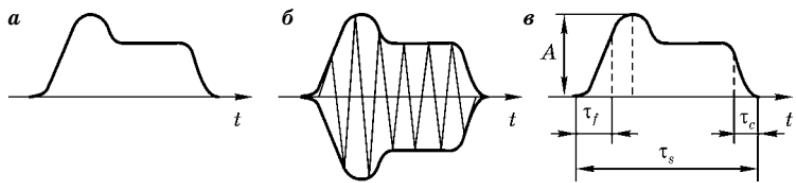


Рис. 1.1

*Импульсный сигнал* существует на конечном интервале значений аргумента (временного или пространственного). В радиотехнике различают видеоимпульсы (рис. 1.1 $a$ ) и радиоимпульсы (рис. 1.1 $b$ ). Если  $s_v(t)$  — видеоимпульс, то ему соответствует радиоимпульс

$$s_r(t) = s_v(t)\cos(\omega t + \phi).$$

Радиоимпульсы отличаются от видеоимпульсов высокочастотной несущей  $\cos(\omega t + \phi)$ , где  $\omega$  — частота;  $\phi$  — фаза. Параметры, характеризующие импульсный сигнал, показаны на рис. 1.1 $c$ , где  $A$  — амплитуда;  $\tau_s$ ,  $\tau_f$ ,  $\tau_c$  — длительность импульса, фронта и среза соответственно. Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

*Аналоговый сигнал* является непрерывной функцией аргумента. *Дискретный сигнал* определяется на счетном множестве значений аргумента. Интервал между соседними значениями аргумента называется *шагом дискретизации*.

*Цифровой сигнал* — разновидность дискретного, представленного в отсчетных точках в виде чисел.

## 1.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО СИГНАЛОВ

Пусть  $M = \{s_1(x), s_2(x), \dots, s_N(x)\}$  — некоторое множество сигналов, объединенных каким-либо общим свойством. Отличительные свойства сигналов выявляются, если прослеживается взаимосвязь отдельных сигналов, входящих во множество  $M$ .

**Структура линейного множества сигналов.** Вещественное линейное множество сигналов должно удовлетворять следующим условиям.

1. Любой сигнал  $s \in M$  при любых значениях аргумента может принимать лишь вещественные значения.

2. Для любых  $s \in M$  и  $v \in M$  существует их сумма  $w = s + v$ , причем  $w \in M$ . Операция суммирования коммутативна,

$$s + v = v + s,$$

и ассоциативна,

$$u + (v + s) = (u + v) + s.$$

3. Для любого сигнала  $s \in M$  и любого вещественного числа  $\alpha$  определен сигнал  $\alpha s \in M$ .

4. Множество  $M$  содержит нулевой элемент  $\emptyset$  такой, что  $s + \emptyset = s$  для всех  $s \in M$ .

В случае, когда математические модели сигналов допускают комплексные значения, а свойства 2–4 остаются справедливыми, можно говорить о *комплексном линейном множестве сигналов*.

*Пример 1.1.* Множество  $M$  образовано сигналами  $s_i$ , модули которых не превосходят  $s_0$ . Можно ли считать данное множество  $M$  линейным? Ответ отрицателен, так как

$$\left| \sum_i^n s_i \right| \text{ может быть больше } s_0.$$

**Нормированное линейное множество сигналов.** Линейное пространство  $L$  является нормированным, если каждому сигналу  $s \in L$  однозначно сопоставлено число  $\|s\|$  — норма этого сигнала. При этом должны выполняться следующие аксиомы.

1. Норма неотрицательна, т. е.  $\|s\| \geq 0$ , причем  $\|s\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $s = \emptyset$ .

2. Для любого числа  $\alpha$  справедливо равенство  $\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$ .

3. Если  $s$  и  $p$  — два элемента из  $L$ , то выполняется неравенство треугольника

$$\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|.$$

Норма сигнала является аналогом длины вектора в векторном пространстве. Для вещественных сигналов

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx}.$$

Комплексные сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} ss^* dx}.$$

Здесь и далее \* означает комплексное сопряжение.

Энергия сигнала определяется как квадрат нормы:

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx.$$

*Пример 1.2.* Найти энергию  $E_s$  и норму сигнала  $s(x)$ , представляющего собой отрезок синусоиды на интервале  $[0, x_0]$  (рис. 1.2):

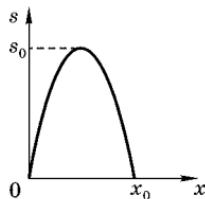


Рис. 1.2

$$s(x) = s_0 \sin \frac{\pi x}{x_0}, \quad 0 \leq x \leq x_0;$$

$$E_s = s_0^2 \int_0^{x_0} \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} dx = \\ = \frac{s_0^2}{2} \int_0^{x_0} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{x_0} \right) \right] dx = \frac{1}{2} s_0^2 x_0;$$

$$\|s\| = s_0 \sqrt{\frac{x_0}{2}}.$$

*Пример 1.3.* Найти энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей (рис. 1.3):

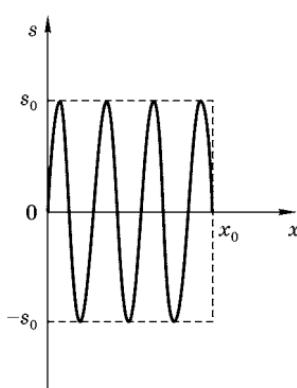


Рис. 1.3

$$s(x) = s_0 \sin(\omega_0 x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_0, \\ 0, & x > x_0, x < 0; \end{cases}$$

$$E_s = s_0^2 \int_0^{x_0} \sin^2(\omega_0 x) dx = \\ = \frac{1}{2} s_0^2 \int_0^{x_0} x [1 - \cos(2\omega_0 x)] dx = \\ = \frac{1}{2} s_0^2 x_0 + \frac{1}{4} \frac{s_0^2}{\omega_0} \sin(2\omega_0 x_0) =$$

$$= \frac{1}{2} s_0^2 x_0 \left[ 1 + \frac{1}{2x_0 \omega_0} \sin(2\omega_0 x_0) \right].$$

Если  $x_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,  $x_0\omega_0 \gg 2\pi$ , то  $E_s \approx \frac{1}{2}s_0^2x_0$  независимо от значений  $\omega_0$ .

Из определения нормы через энергию,  $\|s\| = \sqrt{E_s}$ , следует, что о величине сигнала можно судить по суммарному энергетическому эффекту. Вводимая таким образом энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, временным или пространственным, на относительно малом интервале.

**Метрическое пространство.** Нормированное линейное множество сигналов является *метрическим*, если каждой паре элементов  $u, v \in L$  может быть сопоставлено неотрицательное число  $\rho(u, v)$ , называемое метрикой. Метрика трактуется как расстояние между элементами. Поэтому множество сигналов, в котором задана метрика, приобретает геометрические свойства. Метрика подчиняется аксиомам метрического пространства: 1)  $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ ; 2)  $\rho(u, u) = 0$  при любых  $u \in L$ ; 3) каков бы ни был элемент  $w \in L$ , всегда  $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ .

Обычно метрика определяется как *норма разности двух сигналов*:  $\rho(u, v) = \|u - v\|$ . Норма, в свою очередь, трактуется как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом  $\|u\| = \rho(u, \emptyset)$ . Нормированное линейное множество сигналов, в котором определена метрика, получило название *метрического пространства*.

**Координатный базис.** Линейное пространство (по аналогии с обычным трехмерным пространством) может содержать специальную структуру, играющую роль системы координат. Совокупность векторов  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}$ , принадлежащих  $M$ , является линейно независимым координатным базисом, если равенство  $\sum_i \alpha_i l_i = 0$  возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов  $\alpha_i$ .

Если дано разложение некоторого сигнала в виде  $s = \sum_i c_i l_i$ , то числа  $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$  являются проекциями сигнала  $s$  относительно выбранного базиса.

Число базисных векторов может быть неограниченно велико. Такие линейные пространства называются *бесконечномерными*.

*Пример 1.4.* Линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка:  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ . Координатным базисом в этом пространстве служит система функций

$$\{l_0 = 1, \quad l_1 = x, \quad l_2 = x^2, \quad \dots\}.$$

В метрическом пространстве норма является аналогом длины вектора в векторном пространстве.

**Скалярное произведение сигналов.** Вычислим энергию суммы двух вещественных сигналов:

$$E_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dx = E_u + E_v + E_{uv}.$$

Энергии сигналов не аддитивны — энергия суммарного сигнала содержит в себе взаимную энергию

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dx.$$

По аналогии с суммой векторов в линейном векторном пространстве

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2 + 2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

скалярное произведение сигналов  $u$  и  $v$  определяется формулой

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} uv dx.$$

Косинус угла между сигналами  $\cos \psi_{uv} = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$ ; аналогия  $\cos(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|}$ .

Свойства скалярного произведения:

$$(u, u) \geq 0, \quad (u, v) = (v, u), \quad (\lambda u, v) = \lambda(u, v),$$

где  $\lambda$  — произвольное число,

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w). \quad (1.1)$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *гильбертовым пространством*. Если сигналы принимают комплексное значение, то можно

определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в него скалярное произведение по следующей формуле:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v^*(x)dx.$$

Отсюда следует

$$(u, v) = (v, u)^*.$$

*Пример 1.5.* Пусть сигналы  $u$  и  $v$  являются элементами гильбертова пространства. Доказать, что в гильбертовом пространстве справедливы неравенство Шварца и неравенство Коши–Буняковского

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v), \quad (1.2)$$

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (1.3)$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения (1.1). Применим эти свойства к сигналу вида  $u + \alpha v$ , где  $\alpha$  — произвольный скалярный множитель. Энергия этого сигнала выражается формулой

$$(u + \alpha v, u + \alpha v) = (u, u) + \alpha(u, v) + \alpha^*(u, v) + |\alpha|^2(v, v) \geq 0.$$

Образуем скалярное произведение

$$[(u + \alpha v)v] = (u, v) + \alpha(v, v) \geq 0.$$

Отсюда  $\alpha \geq -(u, v)/(v, v)$ . Подставим эту оценку  $\alpha$  в выражение для энергии сигнала:

$$(u, u) - \frac{(u, v)(v, u)}{(v, v)} - \frac{(u, v)^*(u, v)}{(v, v)} + \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} \geq 0.$$

С учетом  $(u, v)^* = (v, u)$  получаем

$$\begin{aligned} (u, u) - \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} - \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} + \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} &\geq 0, \\ (u, u) - \frac{|(u, v)|^2}{(v, v)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство Шварца (1.2). Извлекая квадратный корень из правой и левой частей неравенства Шварца, приходим к неравенству Коши–Буняковского (1.3).

**Ортогональность сигналов.** Два сигнала  $u$  и  $v$  называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} uv^* dx = 0.$$

*Пример 1.6.* Пусть  $u$  и  $v$  — сигналы в вещественном гильбертовом пространстве. Какими свойствами они должны обладать, чтобы сигналы  $s_1 = u + v$  и  $s_2 = u - v$  были ортогональны?

$$\begin{aligned} (s_1, s_2) &= (u + v, u - v) = \\ &= (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (u, u) - (v, v). \end{aligned}$$

Сигналы  $s_1$  и  $s_2$  ортогональны, если энергии сигналов  $u$  и  $v$  равны:

$$(u, u) - (v, v) = 0.$$

*Пример 1.7.* Сохранится ли ортогональность сигналов  $s_1$  и  $s_2$  (см. пример 1.6) в комплексном гильбертовом пространстве?

$$\begin{aligned} (s_1, s_2) &= (u + v, u - v) = \\ &= (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (v, u) - (u, v). \end{aligned}$$

Сигналы  $s_1$  и  $s_2$  ортогональны, если обменная энергия комплексных сигналов  $u$  и  $v$  вещественна:  $(v, u) - (u, v) = 0$ .

**Обобщенный ряд Фурье.** Пусть в гильбертовом пространстве сигналы с ограниченным значением энергии определены в интервале  $[x_1, x_2]$ , конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же интервале задана бесконечная система функций  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ , попарно ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Это означает, что в гильбертовом пространстве сигналов  $s(x)$  задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал в ряд

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i. \quad (1.4)$$

Это выражение является представлением сигнала обобщенным рядом Фурье в выбранном базисе.

**Нахождение коэффициентов  $c_i$ .** Умножим скалярно обе части равенства (1.4):

$$(s, u_k) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i, u_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (u_i, u_k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ik} = c_k.$$

Отсюда

$$c_k = (s, u_k).$$

Таким образом, обобщенный ряд Фурье позволяет представлять сигнал через счетное множество коэффициентов, которые определяют проекции вектора  $s(x)$  в гильбертовом пространстве на базисные направления.

**Пример 1.8.** Записать разложение сигнала  $s(t)$ , заданного на интервале  $[-T/2, T/2]$ , в ряд Фурье по ортонормированной системе гармонических функций  $u_n(t) = e^{jn\omega_1 t}$ . Какой вид это разложение принимает для физического сигнала?

В соответствии с (1.4)

$$s(t)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t},$$

$$\text{где } \omega_1 = 2\pi/T; c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Другая форма записи этого ряда:

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_1 t) + j \sin(n\omega_1 t)] = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n [\cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt;$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt;$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n); c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).$$

В случае физического сигнала  $s(t)$  — действительная функция. Поэтому коэффициенты разложения

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ и } b_n = j(c_n - c_{-n})$$

должны быть действительными числами, что имеет место при  $c_{-n} = c_n^*$ .

*Пример 1.9.* Записать разложение сигналов

$$s_1(t) = t \text{ и } s_2(t) = t^2,$$

заданных на интервале  $[-T/2, T/2]$ , в ряд Фурье.

Поскольку  $s_1(t) = t$  — нечетная функция,  $a_n = 0$ ,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{2}{n\omega_1} \cos(n\pi) = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\omega_1}.$$

Отсюда

$$s_1(t) = t = \frac{2}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\omega_1 t)$$

или

$$x = \omega_1 t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Сигнал  $s_2(t) = t^2$  — четная функция. Поэтому  $b_n = 0$ ;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{n^2 \omega_1^2} \cos(n\pi) = \frac{4}{n^2 \omega_1^2} (-1)^n;$$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt = \frac{T^2}{3 \cdot 4}.$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{T^2}{3 \cdot 4} + \frac{4}{\omega_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

или

$$t^2 \omega_1^2 = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Дифференцируя этот ряд по  $x$ , получаем ранее полученное разложение в ряд Фурье для сигнала  $x = \omega_1 t$ .

*Пример 1.10.* Пусть в гильбертовом пространстве сигналов задан ортонормированный базис  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Покажем

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно  
в интернет-магазине  
«Электронный универс»  
[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)