ПРЕДИСЛОВИЕ

В современном строительстве возрастает роль расчетов, обосновывающих проектные решения, а сами расчеты становятся все более сложными.

Решение большинства задач, выдвигаемых практикой в области прочности, не обходится без применения новейших вычислительных комплексов. Развитие вычислительной техники сделало возможным проведение статических и динамических расчетов высокого уровня сложности, без которых было бы невозможным возведение высотных зданий и сооружений, проектирование уникальных сооружений таких как, например, большепролетные мосты, выставочные павильоны, подземные торговые, культурно-развлекательные и спортивные комплексы, вокзалы, аэропорты. Применение новейшего программного обеспечения позволяет учитывать многообразие нагрузок и их сочетания, действующих на здания, сооружения и их элементы, проводить вариантное проектирование, что позволяет сэкономить время и стоимость работ.

В настоящее время для решения задач прочности применяется метод конечных элементов (МКЭ), где чаще всего используется вариационный принцип для получения разрешающих уравнений. Название метода отражает его основную идею - представление конструкции как совокупности отдельных конечных элементов, соединенных между собой в узлах, в которых приложены внешние силы. Для систем из пластин и оболочек конечными элементами служат плоские треугольные, прямоугольные, изопараметрические элементы, либо объемные - тетраэдры, параллелепипеды с разным числом узловых точек, при этом не удается получить точные решения и МКЭ для таких систем является приближенным методом. Повышение точности достигается за счет более мелкого разбиения конструкции на элементы или за счет применения элементов более высокой точности.

Для проверки точности, корректности реализации программ МКЭ целесообразно применять аналитические решения. В данном учебном пособии рассматривается решение задач прочности для круглых и кольцевых пластин. С принципиальной стороны такие расчеты не вызывают затруднений, однако аналитические решения для таких объектов приводят к громоздким выражениям для перемещений и внутренних усилий, поэтому для того, чтобы не проводить расчеты "вручную", в рамках данной работы разрабатывается программа расчета круглых и кольцевых пластин при различных случаях нагружения и закрепления контуров с применением электронных таблиц Microsoft Excel. В результате реализации программы расчета строятся эпюры прогибов, углов поворота сечений, эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, также производится подбор сечения пластины по условиям прочности и жесткости.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО РАСЧЕТУ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Пластины и оболочки составляют весьма обширный класс тонкостенных конструкций, применяемых в строительстве. В гражданском и промышленном строительстве пластины и оболочки являются элементами покрытий и перекрытий, пандусов, навесов, козырьков, в мостостроении - плитами проезжей части, сваями-оболочками, в химической промышленности - резервуары для хранения жидкостей и газов и т.д.

Как правило, во всех указанных конструкциях тонкостенная часть подкреплена ребрами, имеет разнообразные отверстия, люки, отличается весьма сложной формой, представляя собой иногда комбинацию тонкостенных элементов.

Весьма сложными бывают иногда условия закрепления и сочленения тонкостенных конструкций, разнородность материалов. Следует учитывать также большое разнообразие статических и динамических нагрузок, воздействующих на тонкостенные конструкции. Кроме того, к перечисленным выше конструкциям наряду со сложностью форм предъявляются жесткие требования в отношении надежности. Указанными обстоятельствами и объясняется большое внимание, которое уделяется развитию теории расчета и проектирования тонкостенных конструкций, в частности пластин и оболочек.

В настоящее время имеется огромный материал в виде монографий, статей, диссертаций, рассматривающие теории расчета пластин и оболочек как в линейной, так и нелинейной постановке задачи.

Первые работы, посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций появились в XIX веке, однако основное развитие наука о расчете пластин и оболочек получила в первой половине XX века. Теория расчета круглых и кольцевых пластин подробно рассматривается в трудах С.П.Тимошенко и С.Войновского-Кригера, В.З.Власова, А.Л.Гольденвейзера, С.Д.Пономарева, Д.В.Вайнберга и Е.Д.Вайнберга и многих других.

Приведем краткий обзор литературных источников, в которых рассматриваются задачи теории пластин и оболочек.

В работе [1] "Пластинки и оболочки" Тимошенко С.П. и С.Войновский-Кригер рассмотрели конкретные задачи об упругих деформациях пластин и оболочек, причем различаются три типа пластин - тонкие пластины, подвергающиеся малым прогибам, тонкие пластины. подвергающиеся большим прогибам, толстые пластины, для которых вводятся соответствующие допущения. Рассмотрены задачи изгиба прямоугольной пластины при различных условиях опирания по краям, неразрезные пластины, пластины на упругом основании, пластины различных очертаний - круглая пластина постоянной и переменной толщины, пластина, имеющая форму сектора круга, эллиптическая пластина.

Особое внимание придается трактовке практических приемов исследований и механической интерпретации результатов. Во многих случаях решения иллюстрируются графиками и таблицами.

В монографии [2] излагаются современные методы расчета стержневых и пластинчатых конструкций на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость. Основное внимание уделено одному из наиболее эффективных методов решения краевых задач механики - численно-аналитическому варианту метода граничных элементов, разработанному авторами. Рассмотрены другие методы, в частности метод конечных элементов, имеющий важное практическое и методологическое значение. Представленные методы иллюстрируются большим количеством примеров с краткими указаниями, поясняющими алгоритм решения.

Книга [3] написана известным американским специалистом в области механики твердого деформируемого тела Л.Г.Доннеллом В ней рассматривается классическая теория балок, ее усовершенствование на основе плоской задачи теории упругости и других преставлений. Теория тонких пластин изложена на основании гипотез о нормальном элементе при малых и конечных прогибах.

В книге [4] представлено систематическое изложение теории оболочек. После вывода основных уравнений общей линейной теории особое внимание уделено различным упрощенным вариантам: теории пологих оболочек, безмоментной теории, теории краевого эффекта. Из общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек получены, как частные случаи, уравнения различных вариантов теории пластин.

Работа [5] является пособием по проектированию железобетонные конструкций гражданских, промышленных и инженерных сооружений. В ней рассматриваются вопросы статического расчета и конструирования плит, балок, ферм, стоек, рам, фундаментов. Большое внимание уделено вопросам систематизации расчетов, уменьшению трудоемкости расчетных операций. Приводится большое количество таблиц, формул и других материалов для статического расчета различных конструкций, Систематизированы данные о нагрузках и воздействиях.

В Учебном пособии [6] рассмотрены фундаментальные вариационные принципы, на которых базируется МКЭ. В качестве объектов изучения взяты балки и стержневые системы, балки-стенки, многослойные конструкции, массивы, оболочки, пластины и комбинированные системы. Освещаются вопросы реализации метода на ЭВМ и применение суперэлементов. Приведен анализ имеющихся прикладных программ по реализации МКЭ.

Во многих работах указывается, что с принципиальной стороны расчеты на прочность круглых и кольцевых пластин не вызывает затруднений. Однако практические расчеты, хотя они и облегчены встречающимися в литературных источниках формулами для определения напряжений и деформаций, а также таблицами расчетных коэффициентов, все же остаются сложными и утомительными, как показывает, например, расчет кольцевой пластины с жестко за-

щемленным внешним контуром, свободным от закрепления внутренним контуром и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой [7].

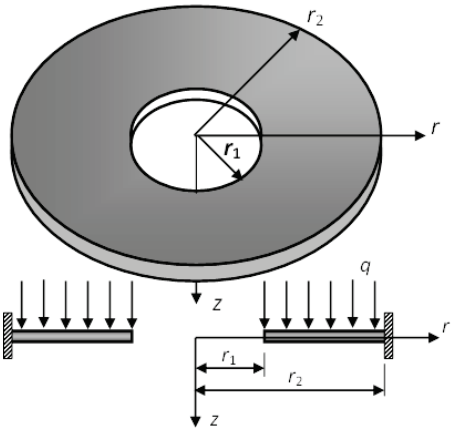


Рис.1.1 Расчетная схема пластины

Прогибы пластины определяются по формуле:

$$w = \frac{qa^4}{64D}\left[-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - 4k\ \ln\rho - 8\beta^2\rho^2\ \ln\rho\right],$$

$$\rho = \frac{r}{r_1}, \qquad \beta = \frac{r_1}{r_2},$$

$$k = \frac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)\left(1 + 4\beta^2 \ln\beta\right)}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2}\beta^2.$$

Поэтому в ряде работ была сделана попытка существенно облегчить труд расчетчиков путем разумного упрощения расчетных коэффициентов [8]. В основу теории положен метод начальных параметров, который благодаря использованию таблиц специальных функций открывает широкие возможности для решения сложных задач теории изгиба круглых и кольцевых пластин постоянной и переменной толщины. В работе приведены формулы, таблицы и графики расчетных коэффициентов, определяющих напряжения, прогибы и предельные нагрузки для пластин при различных видах нагружения и опирания, излагается метод расчета пластин. усиленных кольцевыми ребрами.

В работе [9] приводится расчет круглых и кольцевых пластин с помощью таблиц. Формулы для максимального прогиба и максимальных напряжений записываются в виде:

$$w_{\max} = K_w \frac{qb^4}{Eh^3} \qquad \sigma_{\max} = K_\sigma \frac{qb^2}{h^2}$$

Коэффициенты K_w и $K_{\underline{\sigma}}$ приведены в таблицах, где представлены также схемы нагружения и закрепления пластинки.

В Справочном пособии "Прочность. Устойчивость. Колебания" [10] также, как и в работе [9] приводится решение задач об изгибе пластинок либо в аналитической форме для относительно простых случаев нагружения и опирания пластины, либо в табличной форме.

Книга [11] является справочным пособием и посвящена исследованию конкретных задач по расчету сплошных и кольцевых пластин постоянной толщины при осесимметричном изгибе. Рассматриваются эффективные методы решения, в частности, применение метода начальных параметров. Для различных схем опирания и нагружения приведены формулы для определения внутренних силовых факторов и прогибов в любом сечении круглой или кольцевой пластины.

Вопросы расчета круглых и кольцевых пластин рассматриваются так же во многих учебниках и учебных пособиях.

В работе [12] авторами в рамках учебника рассматривается изгиб и устойчивость тонких пластин, для расчета которых разработана так называемая техническая теория изгиба пластин на основании гипотез Кирхгофа-Лява. Рассматривается расчет прямоугольных пластин с помощью двойных и одинарных тригонометрических рядов, в частности с частичным нагружением пластины и сосредоточенное воздействие. Приводится теория расчета круглых и кольцевых пластин рассматривается ряд примеров их расчета на поперечную нагрузку при различных условиях опирания пластин. Рассмотрены вопросы расчета пластин с помощью вариационных методов. Приведена теория изгиба пластины под действием поперечных нагрузок и нагрузок в срединной плоскости, а также некоторые вопросы теории устойчивости пластин.

В Учебном пособии [13] отмечается, что в современном машиностроении и строительстве расчеты напряженно-деформированного состояния элементов конструкций становятся все более сложными и доступны лишь высококвалифицированным специалистам. В курсе «Основы строительной механики машин» авторы работы особое внимание уделяют тонкостенным элементам – тонкостенным стержням, пластинам, дискам, оболочкам, так как тонкостенные элементы широко применяются в машиностроительных конструкциях. Значительное место в работе отводится расчету круглых и кольцевых пластин. При осесимметричном нагружении автор сводит решение задачи к дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции угла поворота нормали. Приводятся примеры расчета сплошной пластины при различных условиях закрепления краев. В работе рассмотрен расчет круглых осесимметричных пластин по методу начальных параметров, предложенный С.Н.Соколовым [14], [15]: при сложной нагрузке пластину делят на несколько участков; функцию ϑ записывают таким образом, чтобы для каждого следующего участка полностью повторялось выражение для предыдущего участка и добавлялись дополнительные слагаемые. Эти слагаемые выбирают так, чтобы условия сопряжения участков выполнялось при одних и тех же значениях по-

стоянных интегрирования и, таким образом, при любом числе участков получают только две неопределенные постоянные.

В работе [16] приводятся методические указания, содержащие краткий теоретический материал по разделу “Осесимметричный изгиб круглых пластин”, примеры ручного расчета сплошных круглых и кольцевых пластин с различными условиями закрепления, а также, пример расчёта пластины, нагруженной давлением постоянной интенсивности и шарнирно опертой по внешнему контуру с помощью пакета программ “Mathematika 4”. При решении задач авторы работы основываются на дифференциальном уравнении второго порядка относительно функции ϑ.

Обзор технической литературы показывает, что теория расчета круглых и кольцевых пластин в линейной постановке задачи достаточно хорошо разработана, расчет не вызывает принципиальных затруднений, однако реализация его сложна вследствие громоздкости получаемых формул для перемещений и внутренних усилий.

2. ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ MICROSOFT EXCEL И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

Microsoft Excel (Microsoft Office Excel) - программа для работы с электронными таблицами, разработанная компанией Microsoft для Microsoft Windows и Mac OS. Microsoft Excel входит в состав Microsoft Office и на сегодняшний день является одним из наиболее популярных приложений в мире.

В сравнении с первыми табличными процессорами Excel предоставляет множество новых функций пользовательского интерфейса, но суть остается прежней - ячейки образуют строки и столбцы и могут содержать данные или формулы с относительными или абсолютными ссылками на другие ячейки

Возможности этой программы широки и многообразны. Фактически это универсальная технология для создания недорого и максимально адаптированного для пользователей всех квалификаций программного обеспечения для анализа данных и математического моделирования. Разработчики Excel предусмотрели так же взаимодействие с другими программами. Многие из ее возможностей могут быть успешно использованы в инженерных расчетах.

Excel удобен как для элементарных задач, так и для вычислений более высокого уровняю, требующих использования всех ее многообразных возможностей, как, например, построение диаграмм и графиков, матричные вычисления, финансовые и статические расчеты, аппроксимирование и интерполирование данных, использование итерационных методов, программирование на языке Visual Basic for Application, интегрирование и дифференцирование и многое другое.

В данной работе использовались такие возможности Excel, как работа с массивами, применение встроенных функций (математических, логических), построение графиков и других. Использование результатов данного методического пособия предполагает, что у студентов имеются первоначальные навыки работы с программой Excel.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

3.1 Дифференциальное уравнение изгиба пластины

Для решения задачи об изгибе круглой или кольцевой пластины следует определить функцию прогибов w, так как через нее выражаются внутренние усилия. Задача решается в полярной системе координат, в которой прогиб и нагрузка будут функциями r и θ (рис.3.1).

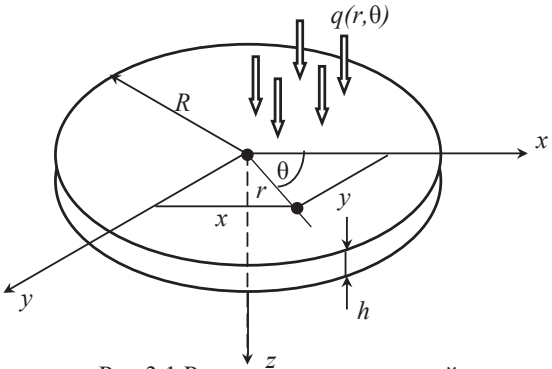


Рис.3.1 Расчетная схема круглой пластины

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластины имеет вид

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial rw}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=q \qquad (3.1)$$

3.2. Напряжения и внутренние усилия при изгибе пластины

Напряжения в пластине обозначаются следующим образом:

σ_r - радиальное нормальное напряжения, σ_θ - окружное (тангенциальное) нормальное напряжение; касательные напряжения $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, $\tau_{z\theta}$, τ_{zr} (рис.3.2).

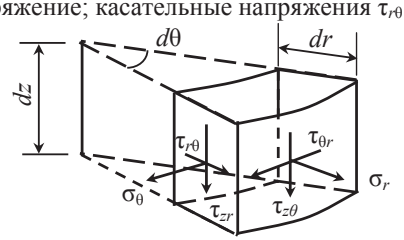


Рис.3.2 Напряжения в круглой пластине

Напряжение σ_z при изгибе пластин не учитывается, напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{\theta r}$ изменяются по толщине пластинки по линейному закону и имеют наибольшие значения в точках вблизи внешних поверхностей. Касательные напряжения $\tau_{z\theta}$, τ_{zr} изменяются по толщине по закону квадратной параболы и имеют наибольшие значения в точках срединной поверхности.

Равнодействующими внутренних сил упругости являются изгибающие моменты, крутящие моменты, поперечные силы.

M_r - изгибающий момент в сечении, перпендикулярном к радиусу-вектору r - радиальный изгибающий момент

M_θ - изгибающий момент в сечении, совпадающим с радиусом-вектором r - тангенциальный изгибающий момент

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] \qquad (3.2)$$

$$M_\theta = -D\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]$$

Крутящий момент $\quad M_{r\theta} = M_{\theta r} = H = -D(1-\nu)\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right)$

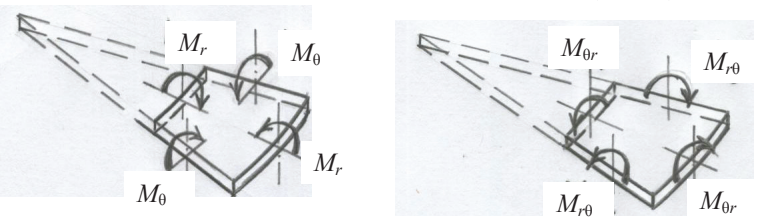


Рис.3.3 Изгибающие и крутящие моменты в пластине

Поперечные силы в круглой пластинке обозначаются следующим образом: Q_r - поперечная сила на площадке с нормалью r - радиальная поперечная сила, Q_θ - поперечная сила на площадке, совпадающей с радиусом - вектором r -тангенциальная поперечная сила

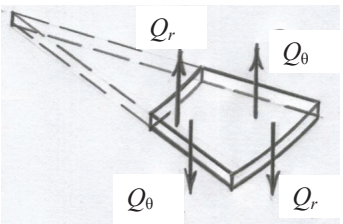


Рис.3.4 Поперечные силы в пластине

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w \qquad Q_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) \tag{3.3}$$

$$Q_r = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\theta^2}$ - дифференциальный оператор Лапласа в полярной системе координат.

Приведенные поперечные силы

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H}{\partial\theta} = Q_r^{прив} = -D\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r} = Q_\theta^{прив} = -D\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right] \tag{3.4}$$

где ν – коэффициента Пуассона, D – цилиндрическая жесткость пластины при изгибе, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Приведенные уравнения являются основными уравнениями при расчете круглых пластин в полярной системе координат. В результате интегрирования дифференциального уравнения (3.1) определяется функция прогибов *w*, по которой находятся внутренние усилия в пластине.

4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ

4.1 Дифференциальное уравнение осесимметричного изгиба пластины

Задача об изгибе круглой пластины является осесиметричной, если нагрузка на пластину и условия закрепления не зависят от полярного угла. В этом случае прогибы пластины не зависят от полярного угла. а являются функцией одной переменной *w=w(r)*.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности значительно упрощается

$$D\left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = q \tag{4.1}$$

4.2 Внутренние усилия при изгибе круглых пластин

В осесимметричной задаче изгиба формулы для изгибающих моментов имеют вид

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) \qquad (4.2)$$

Крутящий момент H обращается в нуль.

Поперечные силы

$$Q_r = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{dr}\right) \qquad Q_\theta = 0 \qquad (4.3)$$

Приведенные поперечные силы на контуре

$$V_r = Q_r \qquad V_\theta = 0$$

4.3.Решение дифференциального уравнения изгиба пластины при действии равномерно распределенной нагрузки.

Уравнение

$$D\left(\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = q \qquad (4.4)$$

можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы решения соответствующего однородного уравнения w_0 и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения w $\quad w = w_0 + w^*$

Общее решение однородного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d^4w_0}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w_0}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2w_0}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw_0}{dr}\right) = 0 \qquad (4.5)$$

имеет вид

$$w_0 = C_1 + C_2\ln r + C_3r^2 + C_4r^2\ln r \qquad (4.6)$$

Для того, чтобы получить частное решение, уравнение (4.4) представляется в виде

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q(r)}{D} \qquad (4.7)$$

Интегрируя последовательно четыре раза это уравнение, получим общий вид частного решения

$$w = \frac{1}{D}\int_0^r \frac{1}{r}\left\langle \int_0^r r\left[\int_0^r \frac{1}{r}\left(\int_0^r q(r)rdr\right)dr\right]dr\right\rangle dr \qquad (4.8)$$

В случае равномерно распределенной нагрузки частное решение имеет вид $w = \frac{qr^4}{64D}$.Расчет пластин производится из условия прочности и жесткости.

Условие прочности по энергетической теории имеет вид

$$\sqrt{\left(\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta\right)} \le \gamma_c R \qquad (4.9)$$

При расчете пластин на жесткость требуется выполнение условия $\frac{w}{R} \le \frac{1}{100} \div \frac{1}{200}$, где R - радиус пластины.

При решении задачи об определении прогибов, углов поворота нормали и внутренних усилий имеются следующие формулы

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}$$

$$\theta(r) = \frac{dw}{dr} = C_2\frac{1}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2\ln r + 1) + \frac{qr^3}{16D}$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -D[-C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2} + 2C_3(1+\nu) +$$

$$+ C_4(2\ln r(1+\nu) + 3 + \nu)] - \frac{qr^2}{16}(3+\nu)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr_2}\right) = -D[\frac{C_2}{r^2}(1-\nu) + 2C_3(1+\nu) +$$

$$+ C_4(2\ln r(1+\nu) + 1 + 3\nu)] - \frac{qr^2}{16}(1+3\nu)$$

$$Q_r = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -D\frac{4C_4}{r} - \frac{qr}{2}$$

(4.10)

Постоянные интегрирования C_i определяются из условий закрепления пластины на контуре.

4.4 Граничные условия для круглой пластины. Примеры расчета.

Пример 1. Сплошная шарнирно опертая по контуру пластина, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой.

Решение задачи имеет вид

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \qquad (4.11)$$

Граничные условия:

В центре пластинки при r=0 прогиб и внутренние усилия должны иметь конечное значение. Так как ln0=∞, то нужно отбросить члены, содержащие множитель ln$r$, то есть положить $C_2 = C_3 = 0$. Тогда решение задачи примет вид

$$w = C_1 + C_3 + \frac{qr^4}{64D} \tag{4.12}$$

Два условия получим на контуре пластинки

$$r = a \quad w = 0 \quad M_r = 0$$

$$w = 0 \qquad \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr} = 0 \tag{4.13}$$

Система уравнений для определения постоянных имеет следующий вид:

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3a^2 = 0 \qquad \frac{3qa^2}{16D} + 2C_3 + \frac{\nu}{a}\left(\frac{qa^3}{16D} + 2C_3a\right) = 0$$

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D} \qquad C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{qa^2}{32D} \tag{4.14}$$

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right) \qquad w_{\max} = \frac{5+\nu}{1+\nu}\cdot\frac{qa^4}{64D}$$

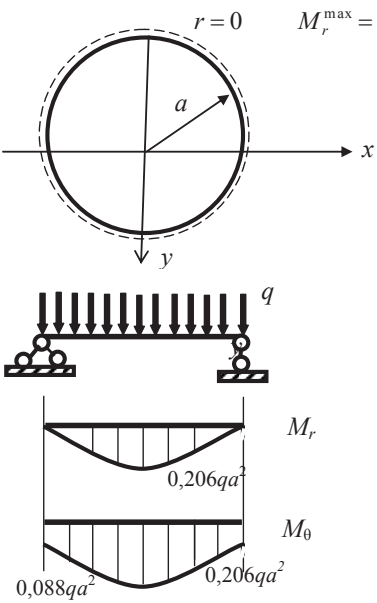


Рис.4.1 Изгибающие моменты в пластине

$$M_r^{\max} = M_\theta^{\max} = \frac{qa^2}{8}(1 - a^2)$$

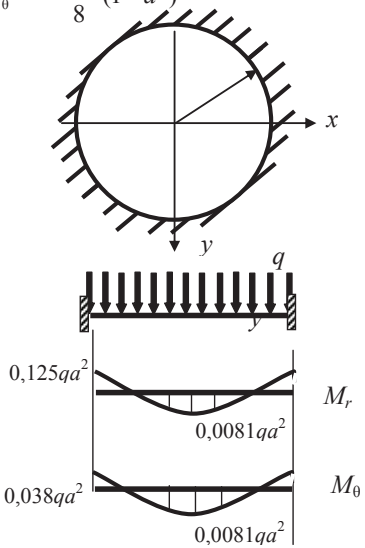


Рис.4.2 Изгибающие моменты в пластине

Пример 2. Сплошная защемленная по контуру пластинка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой.

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}$$

$$C_2 = C_4 = 0$$

$$r = a \qquad w = 0 \qquad \frac{dw}{dr} = 0$$

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a = 0 \qquad C_3 = -\frac{qa^2}{32D} \qquad C_1 = \frac{qa^4}{64D}$$

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2) \qquad w_{\max} = \frac{qa^4}{64D}$$

$$M_r = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right] \qquad M_\theta = \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right]$$

$$r = 0 \qquad M_r = M_\theta = \frac{q}{16}(1+\nu) \qquad r = a \qquad M_r = -\frac{qa^2}{8} \qquad M_\theta = -\nu\frac{qa^2}{8}$$

Таким образом, для сплошной пластины для определения постоянных интегрирования условия ставятся в центре пластины и на внешнем контуре; для кольцевой пластины постоянные интегрирования находятся из условий на внутреннем и внешнем контурах.

4.5. Граничные условия для кольцевой пластины.

Рассмотрим некоторые типы граничных условий для кольцевой пластины.

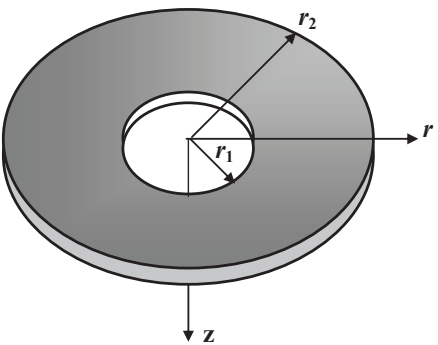
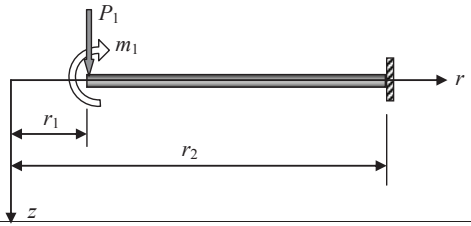
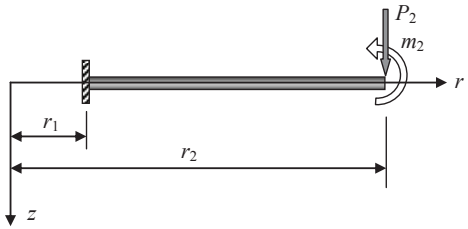
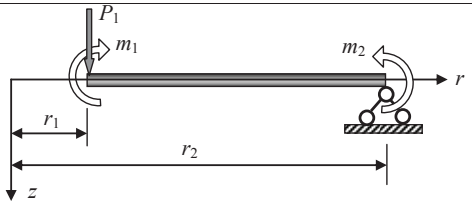
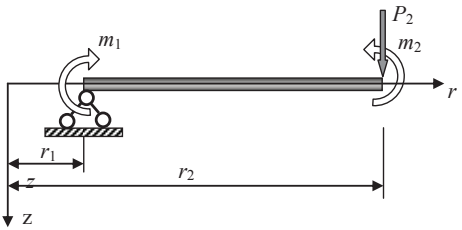
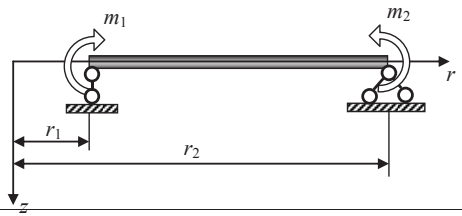
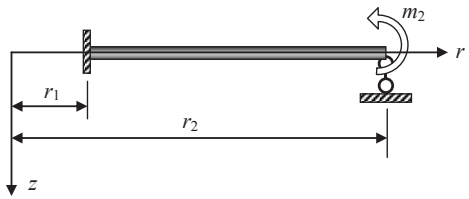
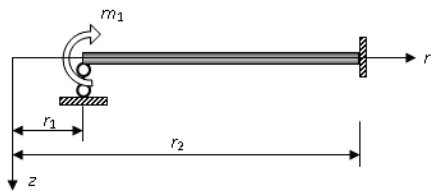
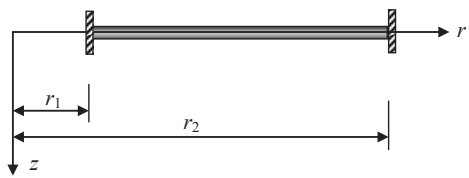


Рис.4.3. Кольцевая пластинка

Таблица 4.1 Типы граничных условий

	Тип граничных условий	Условия на кон туре
1		$\underline{r = r_1}$ $M_r = m_1 \quad Q_r = -P_1$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0 \quad \theta = 0$
2		$\underline{r = r_1}$ $w = 0 \quad \theta = 0$ $\underline{r = r_2}$ $M_r = m_2 \quad Q_r = P_2$
3		$\underline{r = r_1}$ $M_r = m_1 \quad Q_r = -P_1$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0 \quad M_r = m_2$
4		$\underline{r = r_1}$ $w = 0 \quad M_r = m_1$ $\underline{r = r_2}$ $M_r = m_2 \quad Q_r = P_2$

5		$\underline{r = r_1}$ $w = 0$ $M_r = m_1$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0$ $M_r = m_2$
6		$\underline{r = r_1}$ $w = 0$ $\theta = 0$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0$ $M_r = m_2$

7		$\underline{r = r_1}$ $w = 0$ $M_r = m_1$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0$ $\theta = 0$
8		$\underline{r = r_1}$ $w = 0$ $\theta = 0$ $\underline{r = r_2}$ $w = 0$ $\theta = 0$

4.6. Пример расчета кольцевой пластины

Для кольцевой пластины при заданных числовых значениях геометрических размеров и нормативных нагрузок требуется:

Определить функцию прогибов w, углы поворота нормалей θ, изгибающие моменты M_r, M_θ , поперечные силы Q_r и построить соответствующие эпюры. При вычислениях принять E=2,1·10^5 Мпа=2,1·10^{4}кН/см^2 , коэффициент Пуассона ν=0,3. Подобрать высоту сечения пластинки по методу предельных

состояний При подборе сечения принять всю нагрузку временной; коэффициент надежности по нагрузке γ_f = 1,4. Расчетное сопротивление R=210 МПа. Проверить прочность подобранного сечения по энергетической теории прочности.

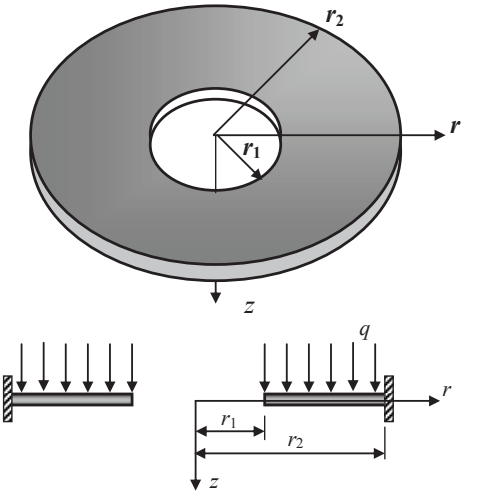


Рис.4.4 Расчетная схема пластины

Таблица 4.2 Размеры и нагрузки

r_1, м	r_1, м	q, кН/м^2
0,25	1,25	40

При решении задачи необходимо записать выражения для прогибов w, углов поворота нормалей θ, изгибающих моментов M_r , M_θ и поперечных сил Q_r

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}$$

$$\theta(r) = \frac{dw}{dr} = C_2 \frac{1}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2\ln r + 1) + \frac{qr^3}{16D}$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr} + \nu \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -D[-C_2(1-\nu)\frac{1}{r^2} + 2C_3(1+\nu) +$$

$$+ C_4[(2\ln r(1+\nu) + 3 + \nu)] - \frac{qr^2}{16}(3+\nu) \qquad (4.16)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2}\right) = -D[\frac{C_2}{r^2}(1-\nu) + 2C_3(1+\nu) +$$

$$+ C_4(2\ln r(1+\nu) + 1 + 3\nu)] - \frac{qr^2}{16}(1+3\nu)$$

$$Q_r = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = -D\frac{4C_4}{r} - \frac{qr}{2}$$

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ -цилиндрическая жесткость, ν- коэффициент Пуассона

Тип граничных условий - 1, где следует положить $m_1 = 0$, $P_1 = 0$.

Таким образом, постоянные C_i определяются из следующих условий:

$r = r_1 \qquad M_r = 0 \qquad Q_r = 0 \qquad r = r_2 \qquad w = 0 \qquad \theta = 0$

Подставляя r_1 =0,25 м, r_2 =1,25 м в условия на контуре пластины , получаем:

$$-D\left\{-\frac{C_2 \cdot 0{,}7}{0{,}25^2} + 2C_3 \cdot 1{,}3 + C_4(2\ln 0{,}25 \cdot 1{,}3 + 3{,}3)\right\} - \frac{40 \cdot 0{,}25^2}{16} 3{,}3 = 0$$

$$\frac{4C_4}{0{,}25} + \frac{40 \cdot 0{,}25}{2D} = 0$$

$$C_1 + C_2 \ln 1{,}25 + C_3 1{,}25^2 + C_4 1{,}25 \ln 1{,}25^2 + \frac{40 \cdot 1{,}25^4}{64D} = 0 \tag{4.17}$$

$$\frac{C_2}{1{,}25} + 2C_3 \cdot 1{,}25 + C_4 \cdot 1{,}25 \cdot (2\ln 1{,}25 + 1) + \frac{40 \cdot 1{,}25^3}{16D} = 0$$

Система линейных уравнений для определения постоянных C_i:

$$-11{,}12C_2 + 2{,}6C_3 - \quad 0{,}3044C_4 + \frac{0{,}5156}{D} = 0$$

$$16C_4 + \frac{5}{D} = 0$$

$$C_1 + 0{,}223C_2 + 1{,}5625C_3 + 0{,}3487C_4 + \frac{1{,}5259}{D} = 0 \tag{4.18}$$

$$0{,}8C_2 + \quad 2{,}5C_3 + 1{,}8079C_4 + \frac{4{,}8828}{D} = 0$$

Решение системы линейных уравнений

$$C_1 = \frac{1{,}1925}{D} \qquad C_2 = -\frac{0{,}3225}{D} \qquad C_3 = -\frac{1{,}624}{D} \qquad C_4 = -\frac{0{,}3125}{D}$$

Подставляя C_i в выражения для прогибов, углов поворота и внутренних усилий, получим:

$$w = \frac{1}{D}\left(1{,}1925 - 0{,}3225\ln r - 1{,}624r^2 - 0{,}3125r^2 \ln r + 0{,}625r^4\right)$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D}\left(-\frac{-0{,}3225}{r} - 3{,}248r - 0{,}3125r(2\ln r + 1) + 2{,}5r^3\right) \tag{4.19}$$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru