ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика». В нем содержатся задачи и упражнения по курсу «Функциональный анализ».

Материал учебного пособия охватывает теорию пространств: метрических, линейных нормированных, гильбертовых (гл. 1 и 2) и теорию линейных операторов (и линейных функционалов) в рассматриваемых пространствах (глава 3).

В заключительной главе (гл. 4) дается применение предыдущего материала к изучению линейных интегральных уравнений и к операторному методу решения задачи Штурма — Лиувилля.

Весь материал разбит на разделы, в начале которых приводится краткая теоретическая сводка и произведен разбор решений нескольких типовых задач из общего списка задач по данной теме.

Сборник неоднороден по своему содержанию. Поскольку задачник предназначен для студентов технического вуза, он содержит сравнительно мало абстрактных теоретических упражнений. Основное внимание уделено задачам технического и вычислительного характера и задачам, позволяющим лучше уяснить то или иное понятие, или результат.

Задачник может быть использован инженерами и математиками-прикладниками для самостоятельного изучения курса «Функциональный анализ». Это тем более важно и полезно в связи с тем, что функциональный анализ является «языком современной прикладной математики».

Некоторые задачи и упражнения в учебном пособии заимствованы из книг [2], [6], [8], [10], [12].

1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Понятие метрического пространства. Полнота метрических пространств

Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x, $y \in X$ ставится в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3. для любых трех элементов $x, y, z \in X$ справедливо неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Функция $\rho(x, y)$ называется *метрикой* (или расстоянием между элементами x и y). (X, ρ) обозначает метрическое пространство с метрикой ρ, если же метрика ρ фиксирована, то пишем просто X. Элементы x, y, z… — точки метрического пространства X.

Последовательность элементов $x_1, x_2,\ldots x_n\ldots \equiv \{x_n\}$, $x_n \in (X, \rho)$, $n \in N$ метрического пространства (X, ρ) *сходится к элементу* $x_0 \in (X, \rho)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, или $x_n \xrightarrow{X} x_0$ $(n \to \infty)$, или $x_n \to x_0$ (при $n \to \infty$).

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ $(n \in N)$ элементов метрического пространства X сходится к пределу $x_0 \in X$ по метрике пространства X.

Примеры метрических пространств.

1. Пространство $R = R^1$. Числовая прямая, где в качестве расстояния принято

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Сходимость в этом пространстве есть обычная сходимость.

2. Пространство (E^n, ρ_p) $(1 \leq p \leq \infty)$.

Элемент этого пространства определяется упорядоченным набором n чисел $x = \{\xi_1, \xi_2,\ldots \xi_n\}$, $(\xi_k \in R)$ (или $\xi_k \in C$) и метрикой: если $x = \{\xi_1, \xi_2,\ldots \xi_n\}$ и $y = \{\eta_1, \eta_2,\ldots \eta_n\}$, то

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le n}\left|\xi_k-\eta_k\right|.$$

В частности, при p = 2, получаем евклидово n-мерное пространство R^n с метрикой

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\xi_k-\eta_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Сходимость последовательности $x_m=\{\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},\ldots\,\xi_n^{(m)}\}$ к элементу $x_0=\{\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\ldots\,\xi_n^{(0)}\}$ в пространстве (E^n, ρ_p) означает

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\,\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(0)}\,|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad (1\le p<\infty),\ (m\to\propto)$$

$$\max_{1\le k\le n}|\,\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(0)}\,|\to 0.$$

Сходимость по метрике пространства (E^n, ρ_p) эквивалентна сходимости по координатам.

3. Пространство $C[a, b]$.

Элементы пространства — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$.

Метрика вводится по формуле

$$\rho_C(x, y) = \rho(x, y) = \max_{a\le t\le b}|\,x(t) - y\,(t)\,|.$$

(равномерная метрика или Чебышевская метрика).

Сходимость последовательности по метрике пространства означает равномерную сходимость последовательности непрерывных функций $x_n(t)$ к (непрерывной) функции $x_0(t)$:

$$\rho_C(x_n, x_0) = \max_{a\le t\le b}|\,x_n(t) — x_0(t)\,| \to 0 \text{ (при } n\to\propto).$$

4. Пространство $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1\le p<\infty)$.

Элементы пространства — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$. Метрика вводится по формуле

$$\rho_p(x,y)=\rho(x,y)=\left(\int_a^b\left|x(t)-y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},\ (1\le p<\infty).$$

При p = 2 получаем среднеквадратическое расстояние между элементами.

Сходимость последовательности элементов $x_n \in \widetilde{L}_p[a,b]$ ($n \in N$) к элементу $x_0 \in \widetilde{L}_p[a,b]$ по метрике пространства означает

$$\rho_p(x_n, x_0) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

В ряде вопросов полезно следующее обобщение этого пространства. Пусть задана непрерывная положительная на $[a, b]$ (или (a, b)) функция $w(t)$, назовем ее весовой функцией (весом). На множестве непрерывных функций определим метрику по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

В полученном метрическом пространстве (которое обозначим через $\widetilde{L}_{p,w}[a,b]$ сходимость имеет вид

$$\rho(x_n, x_0) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^p \, w(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

5. Пространство $D^k[a, b]$, $k \geq 1$, $k \in N$ — фиксированное число.

Элементами пространства являются k раз непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции с метрикой

$$\rho(x, y) = \max\{\max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|, \max_{a \le t \le b} |x'(t) - y'(t)|, \ldots$$

$$\max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\}.$$

Сходимость последовательности $x_n \in D^k[a, b]$ к элементу $x_0 \in \in D^k[a, b]$ означает равномерную сходимости последовательности $x_n(t)$ и ее производных до k-го порядка включительно к функции $x_0(t)$ и ее производным соответствующего порядка.

6. Пространство l_p $(1 \leq p \leq \infty)$.

Элементы пространства определяются упорядоченным набором $x = \{\xi_1, \ \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots \}$, $\xi_n \in R$ (или $\xi_n \in \mathbb{C}$), при этом

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \ \ (1 \leq p < \infty) \ \text{ или } \ \sup_{n \in N} |\xi_n| < \infty \ \ (p = \infty).$$

Метрика вводится по формуле: если $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, \ldots\} \in l_p$, то

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k-\eta_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ (1\le p<\infty),$$

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in N} |\xi_n - \eta_n|.$$

Сходимость последовательности $x_n \in l_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $x_n = \{\xi_m^{(n)}\}$ $(n \in N)$ к элементу $x_0 = \{\xi_m^{(0)}\}$ по метрике пространства l_p означает:

1) в случае $1 \le p < \infty$

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|\xi_m^{(n)}-\xi_m^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

2) в случае $p = \infty$ покоординатную сходимость, равномерную относительно номера.

Сходимость по метрике пространства l_p называют «сходимостью в среднем порядка p», а в случае $p = 2$ — «сходимостью в среднем квадратическом».

7. Пространства $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ — лебеговы пространства.

Мера Лебега на конечном промежутке $[a, b]$ это неотрицательная счетно-аддитивная функции μE, определенная на специальном классе множеств («измеримых по Лебегу»). Этот класс включает все открытые и замкнутые подмножества отрезка $[a, b]$ (о структуре открытых и замкнутых множеств см. следующий параграф).

Для открытого множества G, являющегося объединением конечного или счетного числа непересекающихся интервалов Δ_n, полагают

$$\mu(G)=\sum_n\left|\Delta_n\right|,\ \text{где}\ |\Delta_n|\ \text{— длина интервала}\ \Delta_n.$$

Для замкнутого множества $F = [a, b] \setminus G$ полагают $\mu(F) = b - a - \mu(F)$.

Множество $A \subset [a, b]$ называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G и такое замкнутое множество F, что $F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \mu(F) < \varepsilon$.

Мерой измеримого (по Лебегу) множества A называется

$$\mu(A)=\sup_{F\subset A}\mu(F)=\inf_{G\supset A}\mu(G).$$

Для любого измеримого множества $A \subset [a, b]$ имеем

$0 \le \mu(A) \le b - a$.

Счетная аддитивность меры Лебега: если A_n $(n = 1, 2\ldots)$ измеримые непересекающиеся множества, то их объединение измеримо и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Множество $M \subset [a, b]$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая конечная или счетная система отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$, что

$$M \subseteq \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n], \quad \sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon.$$

Две функции $x(t)$ и $y(t)$, заданные на $[a, b]$, называются *эквивалентными*, если они равны на $[a, b]$ всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Если для последовательности функций $x_n(t)$ всюду на $[a, b]$ за исключениием множества меры нуль, существует предел, равный $x_0(t)$, то говорят, что $x_n(t)$ сходится к $x_0(t)$ почти всюду на $[a, b]$. Запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \quad \text{(п. в.)}.$$

В основе определения интеграла Лебега лежит понятие простой функции. Функция $x(t)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *простой*, если $[a,b] = \bigcup_n \delta_n$, где δ_n — измеримые непересекающиеся множества в конечном или счетном числе, и $x(t) = c_n$ при $t \in \delta_n$ для всех n, где c_n — некоторое постоянное число. Простая функция называется *интегрируемой по Лебегу*, если ряд $\sum_n c_n \mu(\delta_n)$, (где $\mu(\delta_n)$ — мера множества δ_n) абсолютно сходится; при этом полагают

$$(L)\int_a^b x(t)dt = \sum_n c_n \mu(\delta_n).$$

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная функция на $[a, b]$. Она называется *измеримой по Лебегу*, если множество $E = \{t, t \in [a, b], x(t) \le c\}$ измеримо при любом $c \in R$ (очевидно, любая простая функция — измерима).

Измеримая функция $x(t)$ называется *интегрируемой* (по Лебегу), если существует последовательность интегрируемых простых функций $x_n(t)$, равномерно на $[a, b]$ сходящаяся к $x(t)$. При этом

$$(L)\int_a^b x(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)dt,$$

где предел справа существует, конечен и не зависит от выбора последовательности $x_n(t)$, приближающей $x(t)$.

Интеграл Лебега является обобщением интеграла Римана и применим к существенно более широкому классу функций.

Теорема (*об интегрируемости по Риману*). Для того, чтобы функция $x(t)$ была интегрируема по Риману на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a, b]$ и множество ее точек разрыва имело меру ноль.

Теорема (*о связи интегралов Римана и Лебега*). Если функция интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, и оба интеграла равны между собой.

Теорема (*об интегрируемости по Лебегу*). Всякая ограниченная измеримая на E функция интегрируема по Лебегу на этом множестве (предполагается, что E — множество конечной меры).

Теорема (*об интегрируемости эквивалентных функций*). Если ограниченные функции $x(t)$ и $y(t)$ эквивалентны на промежутке $[a, b]$ и одна из функций интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, то и вторая из функций также интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ и выполняется

$$(L)\int_a^b x(t)dt = (L)\int_a^b y(t)dt.$$

В дальнейшем, если не оговорено, будут рассматриваться функции, интегрируемые по Риману. Поэтому знак (L) перед интегралом будет опускаться.

Пространство $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ — это множество функций $x(t)$, измеримых на отрезке $[a, b]$ и интегрируемых по Лебегу в p степени, т.е. таких, что $|x(t)|^p$ интегрируема по Лебегу.

Если считать две эквивалентные функции одним элементом, то на $L_p[a, b]$ можно ввести метрику по формуле

$$\rho_p(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сходимость последовательности $x_n(t) \in L_p \to x_0(t) \in L_p$ $(n \to \infty)$ означает

$$\rho_p(x_n, x_0) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x_0(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \;\; (n \to \infty),$$

«сходимость в среднем порядка p» ($p = 2$ — «сходимость в среднем квадратическом»).

Последовательность $\{x_n\}$ ($n \in N$) элементов метрического пространства X называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*, *последовательностью Коши*), если

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(x_m, x_n) = 0.$$

Всякая сходящаяся последовательность — фундаментальна. Обратное верно не во всяком пространстве.

Метрическое пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел (принадлежащий этому пространству).

Из рассмотренных выше пространств полными пространствами являются

$E^n(\rho_p)$ $(1 \le p \le \infty)$, $C[a, b]$, $D^k[a, b]$, l_p $(1 \le p \le \infty)$, $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$;

Пространство $\widetilde{L}_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$ — неполное пространство.

Решение типовых задач

Задача 14. Доказать интегральное неравенство Гельдера:

Пусть $x(t) \in L_p[a, b], y(t) \in L_q[a, b]$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1)$.

Тогда

$$\int_a^b |x(t)\,y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Решение. Сначала докажем числовую лемму.

Лемма. Пусть u и v — положительные числа, тогда имеет место неравенство

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \le \frac{u}{p} + \frac{v}{q} \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

Действительно, введем функцию $\varphi(t) = t^\alpha - \alpha t$ $(0 < t < \infty$, при $\alpha \in (0, 1))$. Нетрудно видеть, что $\max_{0<t<\infty} \varphi(t) = \varphi(1) = 1 - \alpha$. Тогда $t^\alpha \le \alpha t + (1 - \alpha)$. Положим $t = \frac{u}{v}$, имеем $u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1 - \alpha)v$ и осталось положить $\alpha = \frac{1}{p}$.

Перейдем к доказательству неравенства Гельдера. Отметим, прежде всего, что можно считать

$$0 < \int_a^b |x(t)|^p\, dt < \infty, 0 < \int_a^b |y(t)|^q\, dt < \infty.$$

Если один из интегралов — 0 или ∞, то доказываемое неравенство очевидно.

Положим в лемме

$$u = \frac{|x(t)|^p}{\int_a^b |x(t)|^p\, dt}, v = \frac{|y(t)|^q}{\int_a^b |y(t)|^q\, dt}.$$

Получим

$$\frac{|x(t)|}{(\int_a^b |x(t)|^p\, dt)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|y(t)|}{(\int_a^b |y(t)|^q\, dt)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \frac{|x(t)|^p}{\int_a^b |x(t)|^p\, dt} + \frac{1}{q} \frac{|y(t)|^q}{\int_a^b |y(t)|^q\, dt}.$$

Интегрируя почленно последнее соотношение, получаем неравенство Гельдера.

Задача 20. Найти расстояние между функциями $x(t) = t^3$ и $y(t) = -3t + 4$ в пространствах $C[0, 2]$, $\tilde{L}_1[0, 2]$, $\tilde{L}_2[0, 2]$, $D^1[0, 2]$.

Решение.

1. Рассмотрим пространство $C[0, 2]$. Имеем

$\rho_C(x, y) = \max_{0 \le t \le 2} |t^3 + 3t — 4|$.

Так как функция $z(t) = t^3 + 3t — 4 = (t — 1)(t^2 + t + 4)$, то

$$|t^3 + 3t - 4| = \begin{cases} (1-t)(t^2 + t + 4), & 0 \le t \le 1, \\ (t-1)(t^2 + t + 4), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\text{и} \quad |z(t)|' = \begin{cases} -3(t^2 + 1) & 0 \le t < 1 \\ 3(t^2 + 1) & 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

Поэтому, учитывая значения $z(0) = 4$, $z(2) = 10$, получаем $\rho_C(x, y) = 10$.

2. В пространстве $\tilde{L}_1[0, 2]$

$$\rho_{\tilde{L}_1}(x, y) = -\int_0^1 (t^3 + 3t - 4)dt + \int_1^2 (t^3 + 3t - 4)dt = 6.5.$$

3. В пространстве $\tilde{L}_2[0, 2]$ имеем

$$\rho_{\tilde{L}_2}(x,y)=\sqrt{\int_0^2((t^3+3t-4)^2dt}=\sqrt{\frac{1144}{35}}.$$

4. В пространстве $D^1[0, 2]$

$$\rho_{D^1}(x,y)=\max\{\max_{0\le t\le 2}|t^3+3t-4|, \max_{0\le t\le 2} 3(t^2+1)\}= \max\{10,\ 15\}=15.$$

Задача 26. Функция $x(t)$ равна t^4 в рациональных точках числовой оси и $-t^4$ в иррациональных. Интегрируема ли она по Риману? По Лебегу? Если — да, то вычислить интеграл по отрезку [0, 1].

Решение. Данная функция разрывна во всех точках числовой оси, кроме точки 0. Поэтому она не интегрируема по Риману на [0, 1], так как множество ее точек разрыва — промежуток (0,1] — имеет положительную меру. Функция ограничена и измерима на отрезке [0, 1], значит, интегрируема по Лебегу (теорема об интегрируемости по Лебегу).

Функция эквивалентна функции $-t^4$ Поэтому (теорема об интегрируемости эквивалентных функций)

$$(L)\int_0^1 x(t)dt=(L)\int_0^1 -t^4dt=\int_0^1(-t^4)dt=-\frac{1}{5}.$$

Задача 29. Рассмотрим пространство s — множество последовательностей $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\}$, $(n \in N)$ с метрикой

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}$$

Доказать, что s — метрическое пространство. Какова сходимость в этом пространстве?

Решение. Отметим, прежде всего, что ряд, определяющий метрику, сходится, так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$.

Далее, аксиомы тождества и симметрии очевидны.

Докажем неравенство треугольника.

Воспользуемся числовым неравенством:

$$0\le\alpha\le\beta\Rightarrow\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}$$

Имеем

$$\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\le\frac{|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\le\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|},$$

где ζ_k $(k \in N)$ — координаты точки z.

Умножим обе части этого неравенства на $\frac{1}{2^k}$ и просуммируем:

$$\rho_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} =$$
$$= \rho_s(x, z) + \rho_s(z, y)$$

Покажем, что сходимость по метрике пространства s есть сходимость по координатам.

Прежде всего, приведем следующее очевидное соотношение:

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} \to 0 \ (n \to \infty) \ \Rightarrow \ \alpha_n \to 0 \ (n \to \infty)$$

Пусть теперь последовательность $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots \xi_k^n \ldots\}$ при $n \to \infty$ сходится по метрике пространства s к элементу $x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_k^0 \ldots\}$, т.е.

$$\rho_s(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k^0|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k^0|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

В силу необходимого условия сходимости числового ряда получаем $\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k^0|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k^0|} \to 0$ $(n \to \infty)$ при фиксированных $k = 1, 2, \ldots$

Следовательно, учитывая указанное выше числовое соотношение, выводим $\xi_k^n \to \xi_k^0$ $(n \to \infty,\ k = 1, 2, \ldots)$, т. е. сходимость по координатам.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполняется последнее соотношение при каждом $k = 1, 2, \ldots$ Зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем номер $p \in N$ такой, что

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для конечного числа индексов $k = 1, 2, \ldots p$ подберем общий номер N такой, что

$$|\, \xi_k^n \to \xi_k^0 \,| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (n > N;\ k = 1, 2, \ldots p).$$

Тогда при $n > N$ имеем

$$\rho_s(x_n, x_0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{\left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|}{1+\left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|}{1+\left|\xi_k^n - \xi_k^0\right|} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Установим полноту пространства s.

Пусть $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \dots \xi_k^n \dots\}$ фундаментальная последовательность элементов из s, т. е.

$$\rho_s(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\left|\xi_k^n - \xi_k^m\right|}{1+\left|\xi_k^n - \xi_k^m\right|} \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

Отсюда следует, что каждая из числовых последовательностей $\{\xi_k^{(1)}\}, \{\xi_k^{(2)}\}, \{\xi_k^{(n)}\}, \dots$ также фундаментальна, а потому существует предел $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k^{(0)}$ (k = 1, 2,…). Полагая $x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \dots \xi_k^0 \dots\}$, мы видим , что $x_n \to x_0$, так как сходимость в s покоординатная.

Задача 33. Показать, что пространство $C_0[-1, 1]$ всех алгебраических многочленов $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, ($t \in [-1, 1]$; $a_k \in R^1$, k = 1, 2… n; $a_n \neq 0$) с метрикой $\rho(p, q) = \max|p(t) - q(t)|$; $p, q \in C_0[-1, 1]$ является неполным метрическим пространством.

Решение. $C_0[-1, 1]$ является подмножеством метрического пространства $C[-1, 1]$ и потому есть метрическое пространство. С другой стороны, рассмотрим последовательность алгебраических полиномов

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad (0! = 1)$$

Эта последовательность сходится равномерно на [0, 1] к функции e^t не принадлежащей $C_0[-1, 1]$. Следовательно, пространство $C_0[-1, 1]$ является неполным метрическим пространством.

1.2. Множества в метрических пространствах

Множества мы будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C…, а их элементы — a, b, c…

Если a является *элементом* множества A (или a входит в A; принадлежит A), то символически пишем $a \in A$; запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит A. Элементы множества также называют точками множества A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Если все элементы множества B входят и в множество A, то B называют *подмножеством множества* A и пишут $B \subset A$ или $A \supset B$ (при этом случай $A = B$ не исключается: $B \subset A$, $A \supset B \Leftrightarrow A = B$). Любое множество содержит пустое множество в качестве подмножества.

Операции над множествами.

1. *Суммой* (*объединением*) множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Если A_α ($\alpha \in \Lambda$) — произвольные множества, то их сумма $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α.

2. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как к A, так и к B. Если A_α — произвольные множества, то их пересечением называется множество $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

3. *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, не входящих в B.

Симметрическая разность $A \Delta B$ определяется равенством $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Если множества, фигурирующие в некоторой задаче, являются подмножествами некоторого множества X, то разность $X \setminus A$ ($A \subset X$) называется *дополнением* множества A и обозначается $\urcorner A$: $\urcorner A = X \setminus A$.

Справедлив принцип (закон) двойственности:

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha),$$

$$X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha).$$

4. *Прямым* (*декартовым*) *произведением* множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) таких, что $x \in A$, $y \in B$. Обозначение: $A \times B$.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие: $A \sim B$.

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел.

Примеры счетных множеств.

1. Множество всех целых чисел.
2. Множество всех рациональных чисел.

Свойства счетных множеств.

1. Всякое бесконечное множество содержит счетное множество.
2. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.
3. Сумма любого (конечного или бесконечного) множества счетных множеств есть множество счетное.
4. Если $A = \{a_1, a_2, \ldots a_{n\ldots}\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots b_{n\ldots}\}$ — счетные множества, то множество всех пар (a_n, b_k) $(k, n = 1, 2, \ldots)$ также является счетным множеством.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, несчетно (теорема Г. Кантора).

Если к бесконечному множеству A добавить (или вычесть) конечное или счетное множество, то в сумме получится множество, эквивалентное A.

Признаки эквивалентности множеств (теоремы Кантора — Бернштейна).

1. Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C$, то $A \sim B$.
2. Если A эквивалентно подмножеству множества B, а B эквивалентно подмножеству множества A, то $A \sim B$.

Два множества A и B имеют *одинаковую мощность*, если они эквивалентны.

Мощность множества A обозначается $m(A)$. Мощность множества всех натуральных чисел (т.е. любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается «алеф-ноль»). Про множество всех действительных (вещественных) чисел, заключенных между 0 и 1 говорят, что оно имеет «мощность континуума». Эта мощность обозначается символом c (или $\aleph$ — алеф).

Если задано некоторое множество M, то множество $\mathbf{M}$, элементами которого являются все подмножества множества M, имеет мощность, бóльшую, чем M: $m(\mathbf{M}) > m(M)$.

Если M — конечное множество мощности n, то $\mathbf{M}$ — конечное множество мощности 2^n.

Если M — бесконечное множество мощности a, то мощность множества $\mathbf{M}$ обозначается 2^a. Если M — счетное множество, то $\mathbf{M}$ имеет мощность континуума.

Рассмотрим множество всех многочленов (полиномов) любых степеней

$P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$, $a_k \in R^1$, $k = 0, 1, 2\ldots n$; $a_n \neq 0$; $n \in N$.

Алгебраическими числами называются корни многочленов с рациональными коэффициентами.

Трансцендентными называются числа, не являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами.

Как обычно, всюду ниже применяются следующие обозначения:

$R = R^1$ — множество всех действительных (вещественных) чисел;

R_+ — множество всех неотрицательных вещественных чисел;

N — множество всех натуральных чисел;

Q — множество всех рациональных чисел;

Z — множество всех целых чисел;

Z_+ — множество всех неотрицательных целых чисел.

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство.

Открытым шаром $S(a, r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in X$ называется множество

$S(a, r) = \{x \in X, \rho(x, a) < r\}$.

ε-окрестность точки $a \in X$ есть $S(a, \varepsilon) = O_\varepsilon(a)$ $(\varepsilon > 0)$.

Замкнутым шаром $\hat{S}[a, r]$ (или $S[a, r]$) радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in X$ называется множество

$S[a, r] = \{x \in X, \rho(x, a) \leq r\}$.

Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если найдется шар $S(a, r)$ (или $S[a, r]$), целиком содержащий это множество.

Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* для множества M, если существует последовательность попарно различных точек $x_n \in X$ $(n \in N)$, сходящаяся к X.

Присоединение к M всех его предельных точек называется *замыканием* множества $M \subset X$ и обозначается $[M]$.

Множество $F \subset X$ называется *замкнутым* в X, если оно совпадает со своим замыканием. Замкнутыми множествами являются, например, в любом метрическом пространстве X все множество X и пустое множество; замкнутый промежуток $[a, b] \subset \mathbb{R}$; замкнутый круг на плоскости; любое конечное множество.

Свойства замкнутых множеств:

а) объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнуто;

б) пересечение любой совокупности замкнутых множеств — замкнуто.

Точка x называется *внутренней* для множества $M \subset X$, если существует окрестность $O_\varepsilon(x)$, целиком содержащаяся в M.

Множество $G \subset X$, все точки которого внутренние, называется *открытым* множеством.

Примеры открытых множеств в метрическом пространстве X: все множество X и пустое множество; открытый интервал в R; открытый круг на плоскости.

Свойства открытых множеств:

а) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;

б) объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество.

Между открытыми и замкнутыми множествами в метрическом пространстве X существует следующая связь: для того чтобы множество $G \subset X$ было открытым, необходимо и достаточно чтобы его дополнение $\rceil G = X \setminus G$ было замкнутым множеством в X.

Теорема (*о структуре открытых и замкнутых множеств на прямой*). Каждое открытое множество на прямой есть конечное или счетное объединение дизъюнктных открытых интервалов. Каждое замкнутое множество на прямой получается удалением конечной или счетной совокупности дизъюнктных открытых интервалов.

Множество $M \subset X$ называется *плотным* в множестве X, если $[M] = X$.

Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует конечное или счетное плотное множество. Сепарабельными пространствами являются, например, пространства

l_p $(1 \le p < \infty)$, $L_p[a, b]$ $(1 \le p < \infty)$, $C[a, b]$; несепарабельным — l_∞.

Решение типовых задач

Задача 3. Доказать с помощью теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентность на плоскости замкнутого и открытого круга того же радиуса.

Решение. Отметим, что можно ограничиться кругами с одним и тем же центром. Обозначим замкнутый круг радиуса r буквой A, открытый круг с тем же центром и того же радиуса буквой B, а замкнутый круг радиуса $\frac{1}{2}r$ с тем же центром буквой C. Тогда $C \subset B \subset A$. Множества A и C эквивалентны (взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается с помощью преобразования подобия). Из эквивалентности множеств A и C вытекает (на основании теоремы Кантора — Бернштейна), что A эквивалентно B.

Задача 10. Построим канторово множество. Пусть F_0 — отрезок $[0, 1]$. Выбросим из него центральный интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и оставшееся замкнутое множество, состоящее из двух отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ обозначим через F_1. Затем выбросим из F_1 интервалы $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$ и $\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$, и оставшееся замкнутое множество, состоящее из четырех отрезков, обозначим F_2. В каждом из этих четырех отрезков $\left[0, \frac{1}{3^2}\right]$, $\left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right]$, $\left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$ выбросим центральный интервал длины $\frac{1}{3^3}$ и т.д. Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность замкнутых множеств F_n. Положим $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Множество P называется канторовым совершенным множеством.

Доказать, что канторово множество — замкнутое множество, имеет меру 0 и несчетно.

Решение. 1. Множество P — замкнутое множество, так как оно является пересечением счетного числа замкнутых множеств (см. свойства замкнутых множеств).

2. Выясним, какую «длину» имеет множество P. Для этого найдем «длину» дополнительного множества $[0, 1]\backslash P$, т.е. сумму длин всех удаленных при построении канторова множества интервалов. Это — один интервал длины $\frac{1}{3}$, два интервала длины $\frac{1}{3^2}$, 2^2 интервала длины $\frac{1}{3^3}$, и так далее. Их суммарная длина равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Но тогда «длина» канторова множества P равна 1 – 1 = 0, т. е. множество P имеет меру 0.

3. Найдем мощность канторова множества P. Запишем каждое из чисел $t \in [0,1]$ в троичной системе $t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$, где числа a_n могут принимать значения 0, 1 или 2.