Оглавление

1. ИСТОРИЯ РАСЧЁТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ 5
2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ 11
2.1. Виды равновесия. Критическая нагрузка. Различные виды потери устойчивости 11
2.2. Степени свободы в задачах устойчивости. 13
2.3. Критерии устойчивости и методы определения критических сил 14
2.3.1. Динамический метод 14
2.3.2. Статический метод (метод Эйлера) 14
2.3.3. Энергетический метод 15
2.4. Устойчивость упругих систем с конечным числом степеней свободы 18
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 20
3.1. Стержни постоянного сечения. Понятие о точном и приближённом решениях 20
3.2. Стержни с упруго-податливыми опорами 25
3.3. Дифференциальное уравнение равновесия четвёртого порядка 26
4. ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 28
4.1. Методы Ритца и Тимошенко 28
4.2. Метод Бубнова — Галёркина 30
4.3. Метод конечных разностей 32
5. СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ 34
5.1. Устойчивость сжатого стержня при наличии поперечных нагрузок 34
5.2. Устойчивость прямых стержней при действии сжимающих сил, приложенных в пролёте 36
5.3. Устойчивость стержня, связанного с упругим основанием 39
5.4. Влияние деформации сдвига на критическую силу 42
5.5. Устойчивость составных стержней 44
6. УСТОЙЧИВОСТЬ РАМ 47
6.1. Основные положения 47
6.2. Применение метода сил в исследовании устойчивости рам 47
6.3. Определение перемещений в задачах устойчивости рам 48
7. УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК 51
7.1. Особенности потери устойчивости оболочек 51
7.2. Устойчивость пластин 53
7.3. Устойчивость оболочки в пределах упругости 54
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ 58
9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 60
9.1. Устойчивость систем с одной степенью свободы 60
9.2. Расчёт рам на устойчивость методом перемещений 69
9.3. Деформационный расчёт рам 77
Библиографический список 81

1. ИСТОРИЯ РАСЧЁТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Расчёт конструкций на устойчивость является одним из трёх основных расчётов строительной механики наряду с расчётами по прочности и жёсткости. Конструкции выходят из строя в основном либо из-за потери несущей способности (например, по материалу), либо из-за потери местной или общей устойчивости. Разрушение из-за потери несущей способности определяется прочностью материала, которая может быть пределом прочности или пределом текучести материала в зависимости от его вида (сталь, железобетон, композитные элементы, дерево и т.д.). Отказы из-за потери устойчивости конструкции или её элементов зависят от геометрии конструкции, её размеров и жёсткости. Важно понимать причины отказов конструкций из-за потери устойчивости, потому что использование более прочных материалов не всегда приводит к повышению надёжности. Большое количество несущих конструкций теряет устойчивость из-за более широкого использования высокопрочных материалов и увеличения габаритов таких конструкций, например: большепролётные мосты, высотные здания, обширные спортивные и общественные арены, большие резервуары для хранения жидкостей и газов, более крупные двигатели, турбины, моторы и т.д. Повышение размеров элементов приводит к увеличению их гибкости, так что эти элементы достигают своего предела устойчивости раньше, чем их прочность материала. Если взглянуть на требования современных нормативных документов, становится ясно, что во многих ситуациях максимальные силы, которые могут выдерживать элементы, определяются зачастую не столько несущей способностью, сколько устойчивостью.

В данном учебном пособии обращается внимание читателя на основные различия при вычислении несущей способности растянутых и сжатых стержней. Это связано с различными причинами их разрушения при растяжении и сжатии. Несущая способность стержня, работающего на растяжение, почти всегда ограничена его прочностью, тогда как несущая способность стержня, работающего на сжатие, в значительной степени связана с его гибкостью. Она может быть вычислена как из расчёта на прочность, так и из условий устойчивости. Как показывают результаты наблюдений, потеря устойчивости зачастую является основной причиной многих аварий и катастроф последних лет (см. рис. 1.1, *а*, *б*).

а *б*

Рис. 1.1. Потеря устойчивости сжатого элемента конструкции

Возникает интересный вопрос. Если прочность материала не превышена, то почему сжатый элемент выходит из строя? Все системы идут по пути наименьшего сопротивления, когда деформируются, что является основным законом природы. Например, тонкий длинный элемент легче согнуть, чем укоротить под действием сжимающей силы, что приводит к короблению элемента и потере устойчивости до того, как он выйдет из строя из-за превышения прочности его материала. Короткие же элементы легче укоротить, чем согнуть под действием сжимающей силы. На практике всегда существует тенденция тонкого элемента изгибаться вбок, даже если предполагаемая сила представляет собой осевое сжатие. Эта тенденция возникает из-за небольшого случайного эксцентриситета, непреднамеренной боковой возмущающей силы, несовершенств или других нарушений в элементе.

При малых сжимающих усилиях внутреннее сопротивление элемента изгибу превышает внешнее воздействие, заставляющее его изгибаться. По мере увеличения внешних сил достигается предельная нагрузка, при которой их опрокидывающее действие на изгиб превышает внутреннее сопротивление изгибу элемента. В результате происходит все больший изгиб системы, называемый потерей устойчивости. Максимальное сжимающее усилие, при котором элемент может оставаться в равновесии в прямолинейной конфигурации без изгиба, называется нагрузкой потери устойчивости. Система называется устойчивой, если малые возмущения вызывают малые деформации конфигурации системы. Равновесие со смещенной формой и энергетические методы являются двумя наиболее часто используемыми процедурами для решения проблемы потери устойчивости и для изучения устойчивости равновесия.

Леонард Эйлер создал теорию расчета гибких стержней, которые теряют устойчивость в упругой стадии работы материала, и в 1744 г. опубликовал разработанный им метод вариационного исчисления. Была получена форма изгиба стержня под действием различных сосредоточенных сил путем интегрирования точных дифференциальных уравнений упругих линий. Классической задачей, решённой им, является защемлённая у основания колонна, нагруженная на её верхнем свободном конце наклонной сжимающей силой. При решении задачи Эйлер также отметил, что при центральном сжатии силой F «колонна перестает сопротивляться изгибу».

В 1757 г. была издана новая статья, посвящённая исследованиям продольного изгиба сжатых стоек, где на основании упрощённых уравнений упругих линий стержня Эйлером был дан простой вывод формулы для определения критической нагрузки. Учёный заметил, что в момент потери устойчивости упругий стержень находился в состоянии индифферентного равновесия, то есть оставался как прямым, так и слегка согнутым.

Данное состояние стержня Эйлер обозначил «критическим», а действующую на него предельную нагрузку — «критической силой» ($F_{кр}$).

В настоящей статье Эйлер исследовал критическое поведение сжатого шарнирно закреплённого стержня с центрально приложенной нагрузкой. Он установил, что форма изогнутого стержня соответствует синусоиде, амплитуда которой — неопределённая величина, что позволяет извлечь выражение для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 C}{l^2}. \qquad (1.1)$$

При этом коэффициент C в формуле (1.1) Эйлер наименовал «абсолютной упругостью» сжатого стержня и там же представил несколько вариантов его вычисления, а также указал его размерность — «произведение силы на квадрат длины».

В XVIII веке еще не существовало таких понятий, как момент инерции сечения и модуль упругости материала. Учёным и исследователям понадобилось еще сто лет, чтобы определить коэффициент C в этой формуле как жесткость EI стержня на изгиб. Около 50 лет формула почти не использовалась, однако к началу XX века накопился опыт расследования аварий строительных конструкций, где имела место внезапная потеря устойчивости сжатых элементов конструкций. Тогда исследование задач устойчивости сжатых стержней стало важной темой для учёных.

В конце XIX века Феликс Станиславович Ясинский, русский учёный-механик и инженер, исследуя устойчивость колонн, ввёл термин «приведённая длина стержня» и несколько преобразовал формулу Эйлера для определения критической силы:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \tag{1.2}$$

Здесь μ — коэффициент приведения длины стержня l к длине полуволны его изгиба в критическом состоянии (μl — длина полуволны). Вывод этой формулы можно найти в главах настоящего пособия.

Исходя из того, что стержень в начальный момент потери устойчивости может быть прямым, Ясинский делит критическую силу на площадь поперечного сечения и с некоторыми преобразованиями получает формулу Эйлера для напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{1.3}$$

В формуле (1.3) λ — гибкость стержня (безразмерная величина). Её можно определить по формуле: $\lambda = \frac{\mu l}{i}$, где $i = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции поперечного сечения стержня.

Формула (1.3) справедлива в случае постоянного модуля упругости E = const, то есть, как показано на рис. 1.2, при напряжениях, меньших предела пропорциональности, $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$, при этом $\lambda \geq \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$. Ясинский принял, что критическое напряжение равно пределу пропорциональности, и таким образом определил выражение для предельного значения упругой гибкости (λ_0). Как показали исследования, формула Эйлера справедлива для случая, когда гибкость стержня равна или превышает предельную упругую гибкость ($\lambda \geq \lambda_0$), то есть для стержней большой гибкости. Сталь, маркированная как С235, имеет $\lambda_0 = 100$. Для сталей повышенной прочности область применимости формулы Эйлера ограничена значением $\lambda_0 \approx 85$, а для алюминиевого сплава Д16Т с $\sigma_{пц} = 200$ МПа и $E = 75$ ГПа, $\lambda_0 \approx 60$. При этом опыты подтвердили, что для $\lambda < \lambda_0$ формула Эйлера даёт значения критических нагрузок, превышающих их действительные значения.

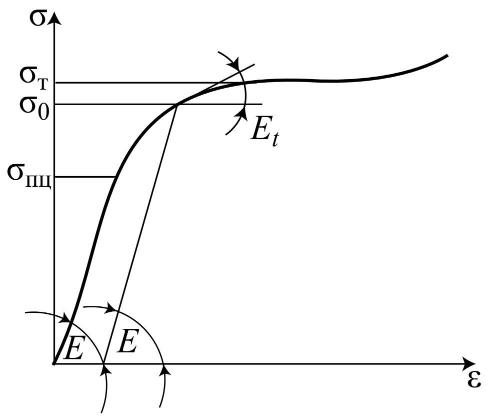


Рис. 1.2. Диаграмма упругопластической работы стали

В том случае, когда предел пропорциональности оказывается превышен, зависимость напряжения-деформации превращается в нелинейную, и следует обратиться к эмпирическим зависимостям. Ф.С. Ясинский предложил следующую формулу для определения критических напряжений за пределом пропорциональности:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \tag{1.4}$$

где a, b — константы, определяемые свойствами материала (МПа), их значения приведены в табл. 1.1; λ — гибкость стержня.

Таблица 1.1

Значения коэффициентов *a*, *b*, λ_0

Наименование материала	a, МПа	b, МПа	λ_1	λ_0
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь Ст4, Ст20	328	0,5	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Сплав Д16Т	406	1,83	30	53

У коротких стержней (при $0 < \lambda < 40\ldots50$) разрушение происходит из-за достижения предела прочности при сжатии, следовательно, критические напряжения можно приравнять в этом случае к пределу пропорциональности.

Таким образом, зависимость критических напряжений от гибкости стержня можно изобразить так, как показано на рис. 1.3.

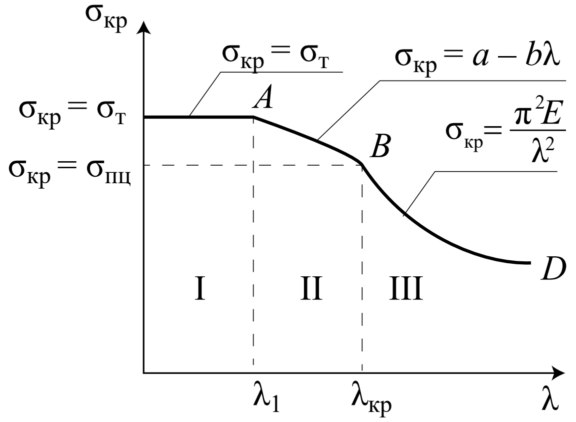


Рис. 1.3. Зависимость критических напряжений от гибкости стержня

Рассмотрим классификацию сжатых стержней по гибкости.

1. Стержни большой гибкости ($\lambda > \lambda_0$) — расчёт на устойчивость проводят по формуле Эйлера (1.3).

2. Стержни средней гибкости ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$) — расчёт на устойчивость проводят по эмпирической формуле Ф.С. Ясинского (1.4).

3. Стержни малой гибкости ($\lambda < \lambda_1$) — расчёт на устойчивость заменяют расчётом на прочность при сжатии. Критическое напряжение для них считается постоянным: $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$.

Опыт анализа причин катастроф строительных конструкций показывает, что практически в любой аварии имела место потеря устойчивости всей конструкцией или отдельными элементами (различают общую и местную потери устойчивости). Главная опасность разрушения конструкции вследствие потери устойчивости состоит в том, что она наступает внезапно, без предварительного развития значительных деформаций элемента, которые могли бы быть визуально определены и предотвращены. При достижении сжимающей силой критического значения достаточно малейшего воздействия в поперечном направлении, чтобы вывести стержень из строя. Состоящие обычно из тонких, длинных стержней или тонких, гибких пластин и оболочек именно металлические конструкции среди всех прочих видов инженерных конструкций наиболее подвержены потере устойчивости.

Целый ряд случайных причин может оказывать влияние на общую или местную (локальную) потерю устойчивости сжатых элементов: некорректная развязка сжатых балок при монтаже и эксплуатации, неправильная установка постоянных и временных арматурных соединений, а также наличие в конструкции случайно погнутых стержней, например, при подъёме грузов с помощью верхних хорд ферм, как это часто случается, когда небольшие угловые профили стержневой конструкции изгибаются, вминаются или ломаются во время транспортировки и монтажа. Опорные конструкции, такие как фермы, арки и рамы, часто бывают неустойчивыми из-за недостаточного учёта переменных сил. Стержни в таких случаях должны быть рассчитаны и на растяжение, и на сжатие с продольным изгибом. Даже если продольное сжимающее усилие мало по сравнению с растягивающим усилием, оно может вызвать продольный изгиб элемента. Рассматриваемый элемент выйдет из строя, усилия перераспределятся, и конструкция окончательно разрушится.

В тонкостенных балочных конструкциях отдельные элементы могут плохо сопротивляться устойчивости к плоскостному изгибу, что окажется впоследствии причиной аварии. Авария (рис. 1.4) на Квебекском мосту (вторая по счёту за время его строительства) произошла в 1916 г. по причине потери устойчивости при изгибе-кручении в мостовой конструкции (по сути, пространственной ферме). Неверно запроектированные соединительные решётки моста стали причиной его первой аварии (в 1907 г.), хотя признаки потери устойчивости отдельных сжатых элементов были замечены задолго до аварии.

В 1953 г. произошла авария еще одной пространственной ферменной конструкции — разрушились две анкерно-угловых опоры козлового типа высотой 22,2 м при строительстве высоковольтной линии электропередач. Анализ последствий аварии показал, что устойчивость потеряли элементы сжатой опоры (рис. 1.5).

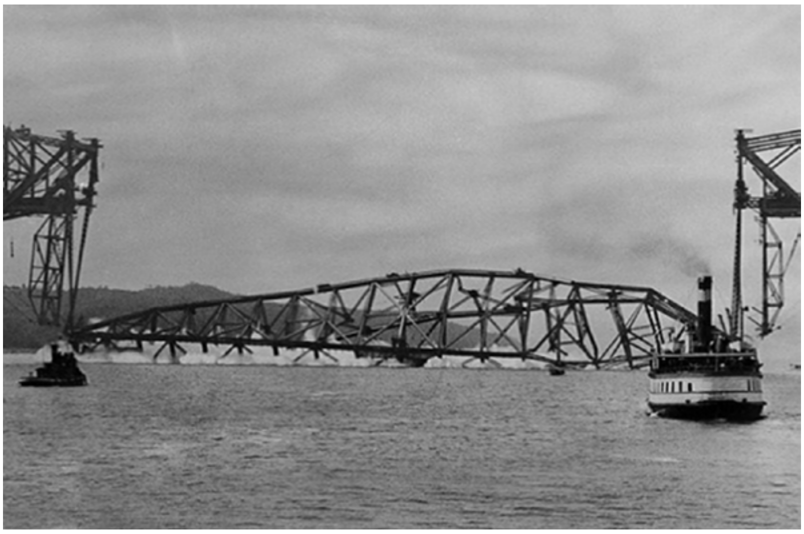


Рис. 1.4. Вторая авария при сооружении моста в г. Квебек, Канада

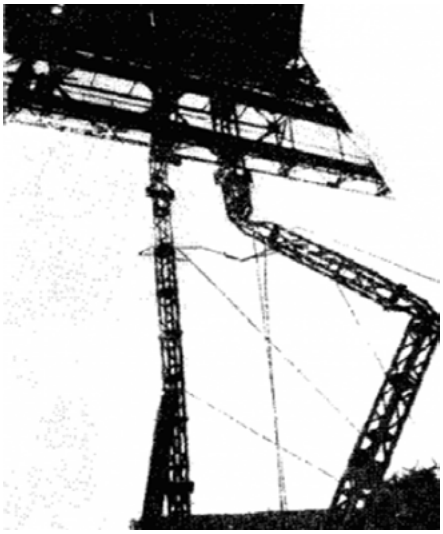


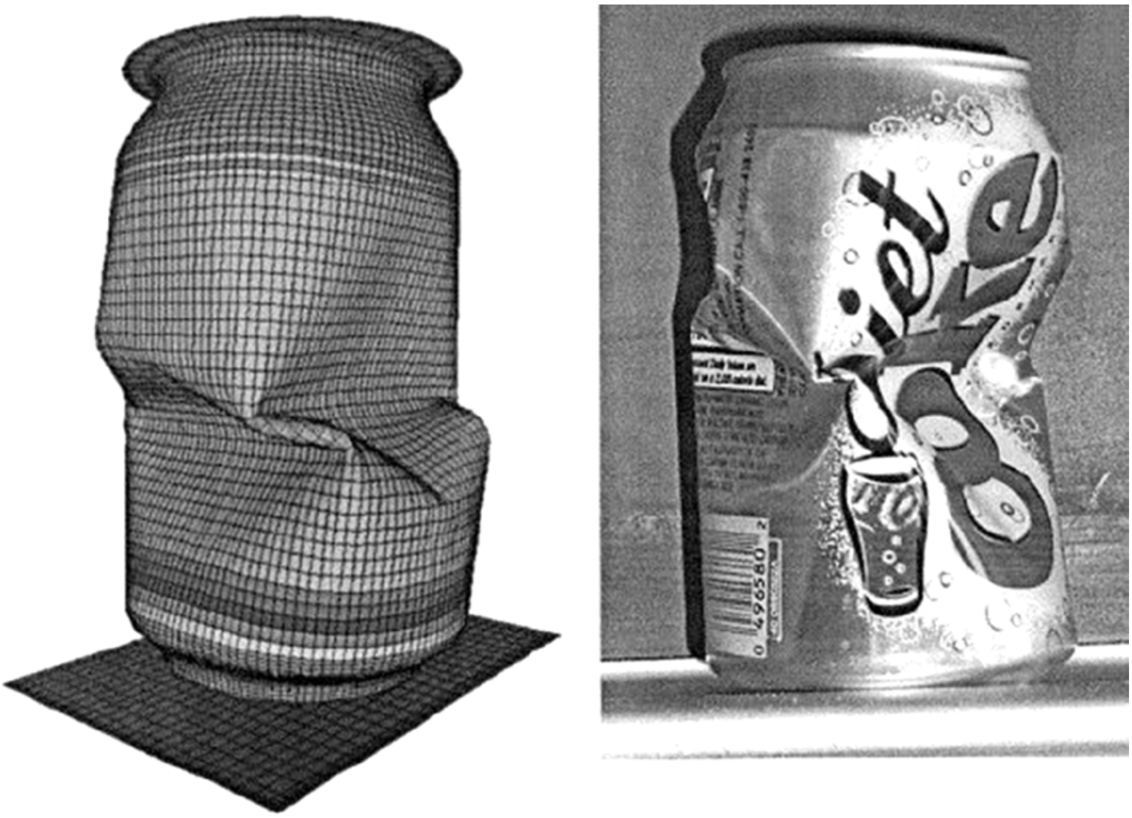
Рис. 1.5. Авария при строительстве высоковольтной линии электропередач

Решётка опоры была задумана по проекту неверно: местная гибкость отдельных элементов поясов оказалась больше общей гибкости всей опоры. Таким образом, в поясных элементах гибкость оказалась равной 78 (в пределах панели), а общая гибкость опоры — 66. Также имели место грубые ошибки проектирования (или изготовления) болтовых монтажных стыков: разница между размером отверстий под болты и диаметром самих болтов составила 2 мм.

Авария ещё одной протяжённой конструкции произошла в 1959 г. в Кургане в результате потери местной устойчивости оболочки. Телевизионная мачта высотой 182 м была запроектирована из трубы радиусом 1,6 м, толщиной 8 мм, из стали Ст.3КП и имела три яруса оттяжек, закреплённых на отметке 54 м.

Чуть ниже места крепления оттяжек произошёл излом мачты с вмятием стенки внутрь ствола вследствие её местной потери устойчивости. Изучение сломанной конструкции показало, что в месте деформации за 3 дня до аварии возникли два местных разрыва шва длиной по 10 см, которые стали прогрессировать. Таким образом, деформация в зоне излома оказалась равна 1,83 м, а на верхней отметке — 7,27 м. Ствол сплющился. Обечайка мачты утратила устойчивость по всему периметру сечения трубы. Сооружение не подлежало ремонту, было принято решение взорвать мачту. И позже на её месте возвели башню.

Рассказывая про аварии, авторы пособия не стремились запугать читателей и отбить у них всякое желание к изучению материала курса «Устойчивость сооружений». Напротив, взвешенное понимание причин аварий способствует более детальному подходу к проектированию конструкций и стимулирует не спеша учитывать различные факторы напряжённо-деформированного состояния, критически относясь к любому методу расчёта. В настоящее время широкое применение пакетов численного моделирования конструкций и изделий позволяет выполнять достаточно сложные виды расчётов (рис. 1.6, *а*, *б*), а также решать задачи оптимизации конструктивных решений зданий и сооружений. Молодому специалисту не стоит забывать об ограничениях применения таких программных комплексов, а также о простом физическом смысле получаемых решений.



а *б*

Рис. 1.6. Сравнение формы потери устойчивости банки Кока-Колы:
а — при численном расчёте; *б* — в эксперименте

Исследования устойчивости сооружений и их элементов продолжаются и в настоящее время, особенно с появлением новых высокопроизводительных вычислительных средств. Даже сейчас конструкторы и проектировщики мечтают об оптимизации проектных решений и снижении стоимости строительства. Для поиска новых смыслов авторы советуют ознакомиться с трудами Л.С. Ляховича, который в одной из своих работ подтвердил, что «стержень минимального веса произвольного сечения на уровне волокон, отстоящих от нейтрального слоя на расстоянии радиуса инерции, является брусом равного сопротивления по отношению к изгибающим моментам, образующимся при утрате устойчивости».

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

2.1. Виды равновесия. Критическая нагрузка. Различные виды потери устойчивости

Для обеспечения безаварийной работы сооружений *недостаточно* обычных расчётов на прочность. Конструкция в целом и каждая её часть должны быть не только *прочными*, но и *устойчивыми*.

Устойчивость — это возможность сооружения и его частей поддерживать своё первоначальное положение и расчётное напряжённо-деформированное состояние при заданных воздействиях.

Дифференцируют следующие виды устойчивости:

1) устойчивость положения;

2) устойчивость формы равновесия в деформированном состоянии.

А. Потеря устойчивости положения оказывает влияние при нарушении условий равновесия внешних сил, действующих на сооружения.

Наглядные примеры потери устойчивости положения:

– опрокидывание башенного крана;

– опрокидывание или сдвиг подпорной стены как единого целого.

Иному положению сооружения будут также соответствовать иные условия равновесия внешних сил.

Б. Утрата устойчивости формы равновесия в деформированном состоянии провоцируется нарушением равновесия между внешними и внутренними силами. При этом происходит рекомбинация внутренних сил, и равновесие возрождается лишь в ином деформированном состоянии.

В данном курсе изучается устойчивая форма равновесия, главным образом упругих систем или систем, состоящих из *абсолютно жёстких звеньев*, соединённых упругими связями, при действии статических нагрузок, то есть *статическая устойчивость*.

Потерей устойчивости называется переход из исходного *устойчивого* равновесия в *неустойчивое*.

Сила, соответствующая такому переходу, называется *критической силой* $P_{кр}$. Состояние стержня при потере устойчивости называется *критическим состоянием*.

Когда приложенная к стержню сила оказывается больше критической, исходная форма стержня (первоначально прямолинейная) становится неустойчивой, стержень искривляется, и появляется качественно новое напряжённое состояние — сжатие с изгибом. Таким образом, критическая сила может быть обусловлена как наибольшая сила, при которой сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия, или как наименьшая, при которой осуществляется переход в новую равновесную форму, близкую к исходной, то есть происходит потеря устойчивости. Отыскание значения этой критической силы — цель расчёта конструкции на устойчивость.

Если на стержень или сооружение действует не одна сила, а несколько, и эти силы возрастают пропорционально одному параметру, то в задачах устойчивости отыскивается критическое значение этого параметра, как определяющего всю данную систему сил в критическом состоянии системы.

Основные особенности потери устойчивости сжатого прямого бруса присущи и другим конструкциям и при других видах деформаций: при изгибе, кручении, внецентренном сжатии и т.д.

Пример 1

Круговое кольцо (рис. 2.1) испытывает сжатие под действием равномерной радиально сжимающей нагрузки, при этом:

а) форма сохраняется, пока нагрузка меньше критической;

б) при критическом значении нагрузки кольцо теряет устойчивость центрального сжатия и превращается в эллипс. Кроме сжатия появляется изгиб.

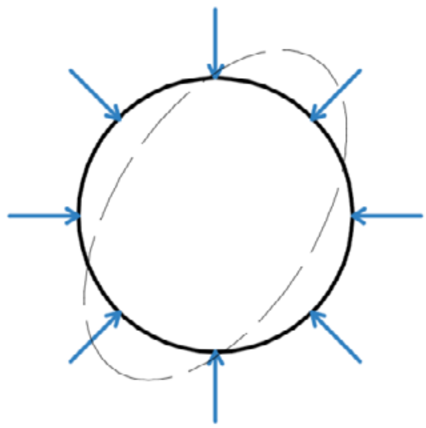


Рис. 2.1. Сжатие кругового кольца
под действием радиально сжимающей нагрузки

По виду нового напряжённо-деформированного состояния, в которое переходит система при потере устойчивости, различают формы потери устойчивости:

– изгибные;
– крутильные;
– изгибно-крутильные.

1. В примере 1 (рис. 2.1) потеря устойчивости определяется разветвлением (бифуркацией) форм равновесия при критической нагрузке. Она выражается при бесконечно малом несоответствии от исходного положения, поэтому в данном случае говорят об устойчивости «в малом».

2. На практике встречаются системы, утрата устойчивости которых возникает «перескоком» и по другой, не смежной с исходной, форме равновесия. Такой перескок происходит при конечных и даже больших отклонениях от исходного положения, поэтому это явление называется потерей устойчивости «в большом».

Пример 2

Рассмотрим балку с промежуточным шарниром (рис. 2.2).

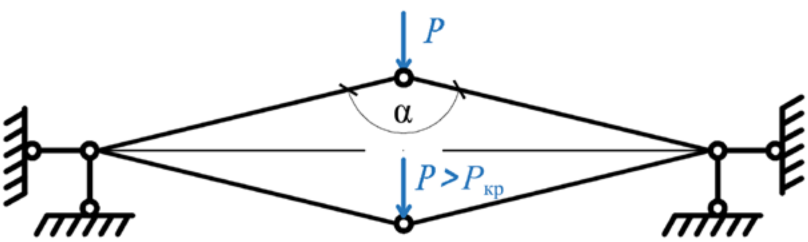


Рис. 2.2. Балка с промежуточным шарниром

При увеличении P увеличивается угол α. При $P = P_{кр}$ происходит «прощёлкивание» и переход в новое состояние, сопровождающий значительное смещение точек системы.

Пример 3

При внецентренном сжатии (рис. 2.3) происходит следующее:

а) когда нагрузки малы, продольная сила мало влияет на деформацию, и приращение деформаций происходит пропорционально приращению нагрузки;

б) по мере роста нагрузок деформации увеличиваются быстрее, чем растут нагрузки.

В какой-то момент времени зависимость нарушается, и деформации продолжают расти без увеличения нагрузки. Наступает потеря устойчивости, и соответствующая этому моменту нагрузка будет являться критической.

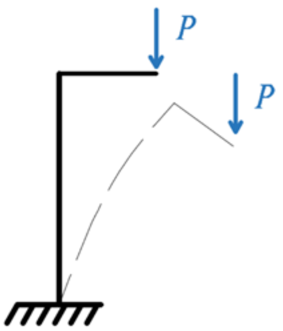


Рис. 2.3. Внецентренное сжатие

Замечание. Система, устойчивая «в большом», будет устойчива «в малом» (обратное не всегда правильно).

Теоретически критическая сила не является разрушающей, так как сооружение лишь принимает новую форму равновесия. Однако на практике потеря устойчивости сопровождается появлением больших деформаций, вызывающих разрушение конструкции или невозможность использования. Соответственно, и критическая сила считается разрушающей.

2.2. Степени свободы в задачах устойчивости

В задачах устойчивости система рассматривается в новом деформированном состоянии. Оно отличается от исходного наличием малых перемещений всех точек системы и называется *смежным*.

Число степеней свободы (ЧСС) в устойчивости — число геометрических свойств, определяющих возможные перемещения всех точек системы при её деформации.

Отметим следующее отличие задач устойчивости от задач статики: если в статике ЧСС устанавливает подвижность расчётной схемы как кинематической цепи, то в задаче устойчивости рассматриваются возможные перемещения каждого бесконечно малого элемента при переходе его в смежное состояние.

В теории устойчивости всякий упругий стержень или система стержней в общем случае имеет бесконечно большое ЧСС.

Пример 4

На рис. 2.4, *а*, *б*, *в* изображена упругая стойка. Она имеет бесконечно большое ЧСС, так как для представления её деформированной схемы может быть задано бесчисленное множество прогибов во всех её точках.

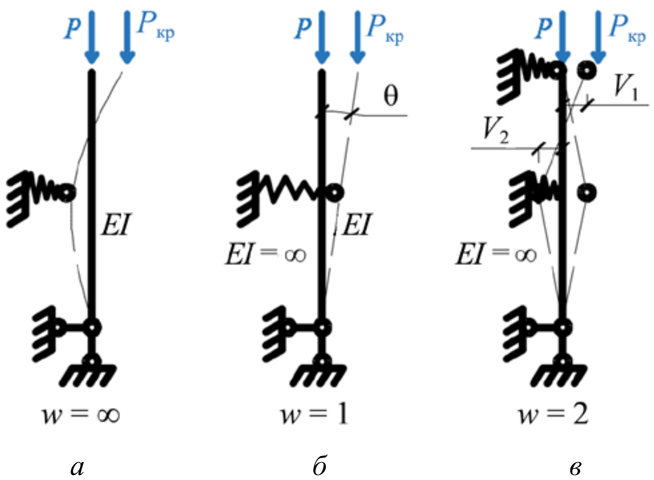


Рис. 2.4. Упругая стойка

В частном случае, если изгибом стойки пренебречь, то есть принять $EI = \infty$, то любые перемещения всех точек можно выразить через один независимый геометрический параметр — угол θ (рис. 2.4, *б*), тогда $w = 1$.

На рис. 2.4, *в* $w = 2$ (потеря устойчивости возможна по двум формам, показанным штриховыми линиями на рис. 2.4).

В общем случае число возможных форм потери устойчивости равно числу степеней свободы.

2.3. Критерии устойчивости и методы определения критических сил

Для решения задач устойчивости существуют три основных метода:

– динамический;

– статический;

– энергетический.

2.3.1. Динамический метод

При расчёте на устойчивость динамическим методом рассматриваются колебания системы, выведенной из исходного положения равновесия (предполагается, что возмущающий фактор, вызвавший отклонение, устранён, и система предоставлена сама себе).

В этом случае критерием устойчивости считается наличие затухания колебаний системы и возвращение её к исходному положению.

Наоборот, возрастание амплитуд свободных колебаний свидетельствует о переходе системы через критическое состояние. Критическими считаются нагрузки, соответствующие этому переходу.

Динамический метод — наиболее общий, применим к исследованию консервативной и неконсервативной систем. Ввиду сложности не получил широкого применения.

Консервативными называют системы, загруженные консервативными силами, то есть силами, работа которых на перемещении в процессе деформации системы не зависит от пройденного пути, а определяется их начальным и конечным положением.

Большинство строительных конструкций — консервативные системы. Например, на рис. 2.5 представлена стойка, загруженная «следящей» силой (сила всегда перпендикулярна приложенному сечению).

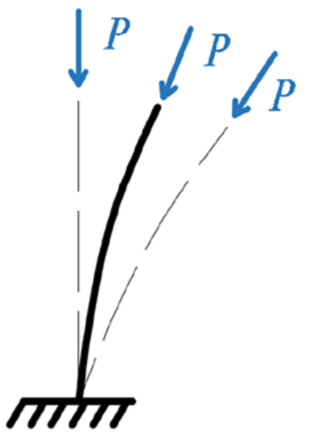


Рис. 2.5. Стойка, загруженная «следящей» силой, перпендикулярной приложенному сечению

2.3.2. Статический метод (метод Эйлера)

Статический метод состоит в использовании уравнений равновесия применительно к смежному равновесному состоянию. На рис. 2.6 показана форма потери устойчивости $\sum M_O = \varnothing$ (без учёта классического стержня).

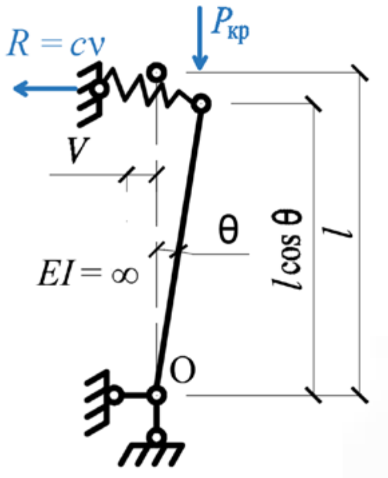


Рис. 2.6. Форма потери устойчивости

$R = c\nu$ — реакция в упругой связи при отклонении, ν — отклонение, c — коэффициент жёсткости, равный силе, растягивающей пружину на единицу длины.

$$P\nu - c\nu l\cos\theta = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \nu(P - cl\cos\theta) = 0, \qquad (2.1)$$

где при любом P перемещение $v = 0$, что соответствует исходной форме равновесия, так как мы предположили, что в критическом состоянии появляются малые перемещения, значит:

$$\text{при } \theta \rightarrow 0 \text{ и } P \rightarrow P_{кр} \Rightarrow$$
$$P_{кр} = cl. \qquad (2.2)$$

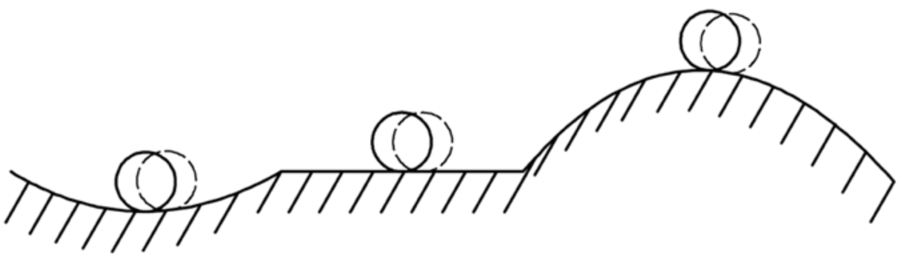
Отличной иллюстрацией может служить система с одной степенью свободы. В том случае, когда ЧСС равно n, следует исследовать n алгебраических уравнений. Если $n = \infty$, то вместо множества алгебраических уравнений можно использовать одно дифференциальное уравнение.

2.3.3. Энергетический метод

Энергетический метод основан на том, что экстремумы потенциальной энергии (максимумы или минимумы) соответствуют различным положениям тела:

а) устойчивое положение (соответствует минимуму потенциальной энергии) (рис. 2.7, *а*);

б) безразличное равновесие (потенциальная энергия неизменна) (рис. 2.7, *б*);



а *б* *в*

Рис. 2.7. Положения равновесия

в) в верхней точке (рис. 2.7, *в*) — максимум потенциальной энергии. Малейшее отклонение — уменьшение потенциальной энергии.

Эти особенности модели распространяются и на упругие системы.

Согласно принципу возможных перемещений (Лагранж-Дирихле, 1787 г.) потенциальная энергия системы, находящейся в состоянии равновесия, имеет стационарное значение по отношению ко всем кинематически возможным вариациям системы. В соответствии с этим выделяют следующие типы равновесного состояния консервативной системы:

1) если равновесие устойчиво, то полная потенциальная энергия системы минимальна в сравнении с энергией для отклонённых положений;

2) если равновесие неустойчиво, то потенциальная энергия системы максимальна;

3) если состояние равновесия безразличное, то потенциальная энергия постоянна во всех положениях, отклонённых от исследуемого.

Обозначим полную потенциальную энергию $U_{\text{полн}}$.

Равновесие устойчиво: $U_{\text{полн}} = \min$, $\delta U_{\text{полн}} = 0$, $\delta^2 U_{\text{полн}} > 0$.

Равновесие неустойчиво: $U_{\text{полн}} = \max$, $\delta U_{\text{полн}} = 0$, $\delta^2 U_{\text{полн}} < 0$.

Равновесие безразлично: $U_{\text{полн}} = \text{const}$, $\delta U_{\text{полн}} = 0$, $\delta^2 U_{\text{полн}} = 0$.

Критическое состояние соответствует переходному между устойчивым и неустойчивым.

Следовательно, на основании известных принципов стационарности критическую силу можно определять из условия экстремума функции полной потенциальной энергии системы при её малом отклонении, то есть приравняв к нулю её частные производные.

Этот путь без упрощающих приёмов связан с систематическими сложностями.

Другая формулировка критерия устойчивости вытекает из принципа возможных перемещений.

Исходные данные. В критическом состоянии приращение $U_{\text{полн}}$ (полной потенциальной энергии) при бесконечно малом отклонении системы от исходного состояния равно нулю.

Полагаем, что в исходном равновесном состоянии нет:

– искривлений осей;

– эксцентриситетов приложения нагрузок;

– других значительных начальных несовершенств.

Тогда значение $U_{\text{полн}} = 0$ и принимаем за начало отсчёта.

Приращение потенциальной энергии будет совпадать с полной энергией перехода системы из исходного состояния в деформированное:

$$\Delta U_{\text{полн}} = U_{\text{деф}}. \tag{2.3}$$

И энергетический критерий устойчивости получает вид:

$$U_{\text{полн}} = 0. \tag{2.4}$$

С другой стороны, известно, что полная потенциальная энергия упругой системы при её деформации равна алгебраической сумме работ внешних W и внутренних U сил. Поэтому критерий (2.4) можно представить в виде:

$$W + U = 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, мы приходим к известной формулировке принципа возможных перемещений.

Следовательно, критическую силу можно определить из принципа возможных перемещений на малых перемещениях из исходного состояния в смежное (или наоборот).

Таким образом, выражение (2.5) является исходным для составления уравнения устойчивости при определении критических сил.