Оглавление

От авторов 4

Методические рекомендации и примеры решения тригонометрических уравнений 7

§ 1. Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях . 23

1.1. Арифметический способ 23

1.2. Алгебраический способ 27

1.3. Геометрический способ 33

1.4. Функционально-графический способ 40

§ 2. Основные методы решения тригонометрических уравнений 46

2.1. Тригонометрические уравнения, линейные относительно простейших тригонометрических функций 46

2.2. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим уравнениям с помощью замены 53

2.3. Метод разложения на множители 63

2.4. Функциональный метод 73

2.5. Комбинированные уравнения 90

2.6. Системы уравнений 110

§ 3. Дополнение 113

3.1. Уравнения, не содержащие тригонометрические функции . . 113

3.2. Задачи из тренировочных работ и вариантов ЕГЭ 120

Ответы 137

Литература 163

От авторов

Задание 13 контрольно-измерительных материалов — это задание повышенного уровня сложности, представляющее уравнение (тригонометрическое, иррациональное, показательное, логарифмическое) и состоящее из двух пунктов. В первом пункте требуется найти все корни уравнения, а во втором — отобрать корни, принадлежащие указанному промежутку. Ранее в вариантах ЕГЭ встречались задания на решение систем уравнений.

Анализ результатов ЕГЭ последних лет показывает, что около 70 % участников экзамена приступали к выполнению заданию 13. В таблице ниже указан средний процент решаемости этого задания участниками экзамена в период с 2022 по 2024 г.

<table>
<tr><th rowspan="2">Баллы</th><th colspan="3">Процент решаемости задания 13, %</th></tr>
<tr><th>2022</th><th>2023</th><th>2024</th></tr>
<tr><td>0</td><td>51,7</td><td>52,9</td><td rowspan="3">Средний процент решаемости 47,8 %</td></tr>
<tr><td>1</td><td>7,6</td><td>6,2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>40,7</td><td>40,9</td></tr>
</table>

Задание 13 оценивается двумя первичными баллами. За его выполнение берутся практически все участники экзамена, приступающие к решению заданий второй части, требующей развёрнутого ответа, и практически половина из них получает за решение максимальный балл.

Разработчики КИМ в 2015–2024 гг. на экзамене предлагали задания на решение тригонометрических уравнений с последующим отбором корней.

В демонстрационном варианте ЕГЭ по математике профильного уровня последних лет представлено следующее задание.

13. а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x,\ \cos 2x=1-2\sin^2 x,$ то исходное уравнение можем записать следующим образом:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1,$$
$$\sin x-2\sin^2 x=0,\ \sin x\cdot(2\sin x-1)=0.$$

Отсюда если $\sin x=0$, то $x=\pi k,\ \ k\in Z$, если $\sin x=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-3\pi,\ -2\pi,\ -\frac{11\pi}{6}$.

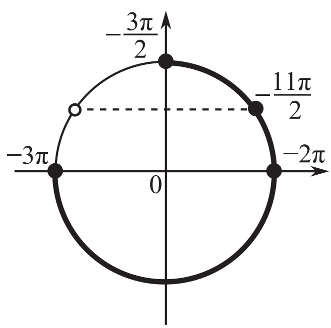

Рис. 1

Ответ. а) $\pi k,\ k\in Z,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z;$ б) $-3\pi,$ $-2\pi,\ -\frac{11\pi}{6}.$

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

В первом параграфе пособия рассматриваются основные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях: арифметический, алгебраический, геометрический (с помощью тригонометрической окружности) и функционально-графический.

Во втором параграфе пособия представлены основные методы решения различных типов тригонометрических уравнений, т. е. методы решения уравнений:

– линейных относительно простейших тригонометрических функций;

– сводящихся к алгебраическим уравнениям с помощью замены;

– с использованием разложения выражения на множители;

– с использованием свойств функций.

Также в пособие включены комбинированные уравнения и системы уравнений.

В третьем параграфе пособия разбираются основные методы решения различных типов: иррациональные, показательные и логарифмические.

В конце пособия приведено большое количество упражнений, к которым даны ответы и указания по их решению.

Желаем успеха!

Методические рекомендации и примеры решения тригонометрических уравнений

Прежде чем перейти к рассмотрению тригонометрических уравнений, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к решению этих уравнений.

Формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений

В большинстве учебников для записи решений простейших уравнений используются следующие формулы:

Вид уравнения	**Общая формула решений**
$\sin x = a, \ \ \|a\| \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z$
$\cos x = a, \ \ \|a\| \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a,$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \ n \in Z$

При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание на то, что формулы задают множества чисел, которые образованы по закону арифметической прогрессии с разностью 2π или π. С другой стороны, использование общей формулы серий решений не всегда является удобной при отборе корней, в частности, на числовой окружности. В этом случае как раз удобнее не объединять серии решений тригонометрических уравнений, а представлять их совокупностью, выделяя разность соответствующих прогрессий.

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad \text{где } n \in Z.$$

Уравнения $\sin x = 1$ и $\sin x = -1$ имеют решения

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ и $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ соответственно.

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n, \\ x = -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad \text{где } n \in Z.$$

Уравнения $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$ имеют решения $x = 2\pi n, n \in Z$ и $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$ соответственно.

3. Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \\ x = \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad \text{где } n \in Z.$$

4. Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий

$$\left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \\ x = \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad \text{где } n \in Z.$$

Числовая окружность

Числовая (или координатная) окружность активно применяется в преподавании тригонометрии, с её помощью легко демонстрировать множества чисел, объединённых по определённым свойствам. Поэтому рассмотрение примеров в данном пособии будет в основном связано с координатной окружностью. В тех случаях, когда затруднительно использовать числовую окружность, для отбора корней тригонометрического уравнения применяют координатную прямую.

Числовой (координатной) окружностью называют окружность единичного радиуса, на которой выбраны:

а) начало отсчёта;

б) положительное направление (против часовой стрелки);

в) единица измерения (радиус $r = 1$).

Отображение числового множества **R** на координатную окружность наглядно можно представить как «наматывание» координатной прямой на координатную окружность: положительный луч координатной прямой — в положительном направлении, отрицательный луч — в отрицательном направлении (см. рис. 2).

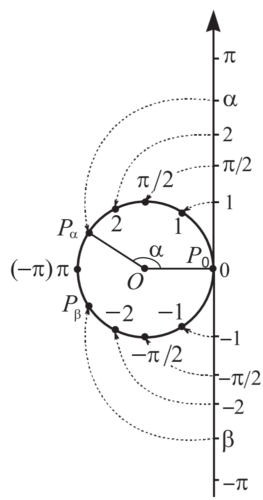

Рис. 2

Отметим, что отображение числового множества **R** на координатную окружность не является взаимно однозначным: каждая точка окружности изображает бесконечное множество действительных чисел, каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических уравнений

Все числа вида $\alpha + 2\pi n$, $n \in Z$ соответствуют единственной точке числовой окружности P_α, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α приходим в эту же точку.

Уравнения вида $\sin x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Эти точки расположены на окружности симметрично относительно оси Oy. Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)^n\alpha + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 1. *Изобразите на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси ординат (см. рис. 3).

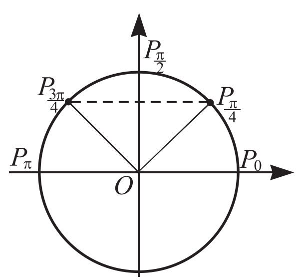

Рис. 3

Уравнения вида $\cos x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + 2\pi n$, $n \in Z$ на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha}$ соответственно. Точки расположены на окружности симметрично относительно оси Ox. Эти два множества чисел можно записать в виде $\pm\alpha + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 2. *Изобразите на числовой окружности множество решений уравнения* $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{-\frac{\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 4).

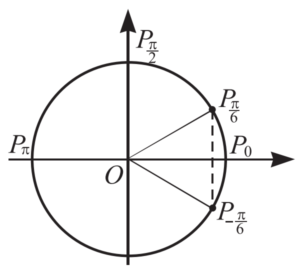

Рис. 4

Уравнения вида $\mathbf{tg}\, x = a$ *или* $\mathbf{ctg}\, x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in Z$ на числовой окружности изображаются точками P_α или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти два множества чисел можно записать в виде $\alpha + \pi n$, $n \in Z$.

Пример 3. *Изобразите на числовой окружности множество решений уравнения* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 5, с. 12).

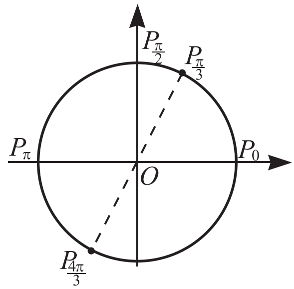

Рис. 5

Пример 4. *Изобразите на числовой окружности множество решений уравнения* $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение: Запишем решения данного уравнения $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{\frac{7\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 6).

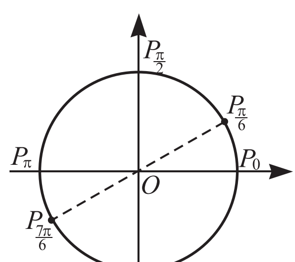

Рис. 6

Уравнения вида $\boldsymbol{T(kx) = a}$

Для уравнений вида $T(kx) = a$, где через T обозначена одна из простейших тригонометрических функций, изображение решений уравнения связано с точками — вершинами правильного многоугольника.

Числам вида $\alpha + \dfrac{2\pi n}{k}$, $n \in Z$, $k \in \{3; 4; 5; ...\}$ на числовой окружности соответствуют вершины правильного k-угольника, вписанного в окружность.

При $k = 1$ получаем единственную точку на окружности, а при $k = 2$ — две диаметрально противоположные точки окружности.

Пример 5. *Изобразите на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin 3x = 1$.

***Решение*:** Решениями данного уравнения являются числа вида $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Придавая последовательно значения 0, 1, 2 переменной n, получим три точки (вершины правильного треугольника) на окружности (см. рис. 7), соответствующие числам $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{2}$.

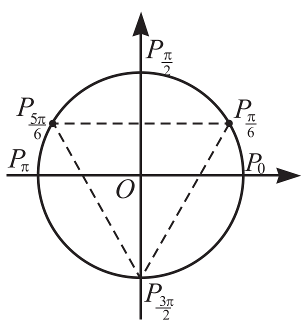

Рис. 7

Тренировочные упражнения

1. Изобразите множество решений уравнения, используя числовую окружность:

а) $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$; б) $\sin x = 0$;

в) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x = 0{,}2$;

д) $\cos x = \dfrac{1}{2}$; е) $\cos x = 0$;

ж) $\cos 3x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\cos x = -0{,}4$;

и) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; к) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

л) $\operatorname{tg} 5x = 0$.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических неравенств

Основная трудность в отборе корней тригонометрических уравнений ложится на решение тригонометрических неравенств и их изображений на числовой окружности.

Неравенства вида $\sin x \vee a$ *или* $\cos x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$, $|a| \leqslant 1$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число a и все значения синуса (косинуса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое — отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число, кратное периоду синуса или косинуса.

Сразу отметим, что для отбора корней уравнения нам не потребуется аналитическая запись решения тригонометрического неравенства, и последний шаг алгоритма будем опускать.

Пример 6. *Изобразите на числовой окружности множество решений неравенства* $\sin x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.