Предисловие

Напомним особенности 9 класса. К окончанию этого класса учащиеся, занимающиеся по различным программам, должны получить равноценный объем и качество знаний и сдавать экзамены в одинаковых условиях (в форме общего государственного экзамена). Поэтому 9 класс – этап **систематизации и уточнения знаний, подведения определенных итогов.**

В этом классе рассматриваются и уточняются понятия, связанные с функцией и графиком функции, уравнениями и системами уравнений, неравенствами, арифметической и геометрической прогрессиями, основами комбинаторики и теории вероятности. В первую очередь необходимо уделять внимание развитию навыков решения задач по указанным темам.

Поэтому данное пособие преследует **три основные цели:** изучить материал по алгебре для 9 класса, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ОГЭ (а в дальнейшем и ЕГЭ) и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для учебника Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для этого учебника.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: подробнее рассмотрены основные свойства функции и построение графиков функции, даны дополнительные типы уравнений и неравенств, детальнее изучены прогрессии. Такое расширение материала вполне доступно для девятиклассников, дает более цельное представление о рассматриваемых темах и подготавливает к сдаче ОГЭ. Особое внимание уделено задачам, содержащим модули или параметры. Практика показывает, что именно они вызывают наибольшие трудности у учащихся (и не только 9 класса). Предусмотрены различные формы контроля успеваемости.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку, повысить ее качество и при этом сэкономить время учителя.

Рекомендации к проведению уроков

Данное пособие позволяет проводить занятия с использованием базового УМК Ю.Н. Макарычева и др. (М.: Просвещение) и рассчитано на 102 урока в год. Содержание уроков является избыточным (в расчете на сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно.

Поурочное планирование включает четыре вида занятий:

1. Урок на изучение нового материала.
2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок на изучение нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока делает учитель (~1–2 мин). Требуется донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены).

II. Изучение нового материала (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая сложность курса, этот подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 мин). Вопросы могут задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется попросить ученика дать определения и привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. Задание на уроке дает учитель из числа наиболее характерных, типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1. Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым

выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.

2. В виде диалога учащихся за одной партой: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения.

3. Работа у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль школьников у доски, так и подключение к проверке всего класса. Разумеется, при этом происходит и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается учителем из числа типовых задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 60–80 мин. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому восприятию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить учеников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. п. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в старших классах и вузе, подготовке к сдаче зачетов и экзаменов. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или непривычностью условия, или большей сложностью, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных задач очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (факультативы, кружки, дополнительные занятия и т. д.);
2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;
3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;
4) во время проведения математических турниров, олимпиад, боев, недель математики и т. д.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учеников. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Урок на обработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено повторение материала и отработка навыков решения задач (~20 мин). Прежде всего этап II включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давались самими учащимися. Вопросы могут включать в себя непонятые определения, термины, правила и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более понятными и доступными для понимания ровесниками, чем пояснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5–10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (тест, письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10–15 мин.

В материалах уроков тесты используются в небольшом количестве для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, пробелы в предыдущих темах, невнимательность, арифметические ошибки и т. д.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок.

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые характерные задачи. При проведении работы обращайте внимание на рациональный подход к решению задач.

По каждой изучаемой теме приводится **контрольная работа**. Она составлена в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 – самые простые, варианты 3, 4 – сложнее, 5, 6 – самые сложные). Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оцениваться контрольная работа может следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла, заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их задач).

После каждой контрольной работы проводится ее **анализ и разбор** наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у школьников, еще раз **повторить и закрепить** пройденную тему, факультативно проводится письменный **тематический зачет**. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта по сложности разделяются на три группы (группа A – самые простые задачи, группа B – более сложные задачи, группа C – самые сложные задачи). Каждая задача из группы A оценивается в 1 балл, из группы B – в 2 балла, из группы C – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока A можно получить 7 баллов, блока B – 8 баллов и блока C – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Заметим, что в зависимости от сложности и трудоемкости изучаемой темы количество задач в контрольной и зачетной работах может варьироваться.

Разумеется, все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. Пусть каждый отдельный школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего.

Тематическое планирование учебного материала

№ урока	Тема урока
ГЛАВА I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ (22 ч)	
§ 1. Функции и их свойства (5 ч)	
1, 2	Функция. Область определения и область значений функции
3–5	Свойства функций

№ урока	Тема урока
§ 2. Квадратный трехчлен (5 ч)	
6, 7	Квадратный трехчлен и его корни
8, 9	Разложение квадратного трехчлена на множители
10	*Контрольная работа № 1 по теме «Функция. Квадратный трехчлен»*
§ 3. Квадратичная функция и ее график (8 ч)	
11, 12	Функция $y = ax^2$, ее график и свойства
13–15	Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$
16–18	Построение графика квадратичной функции
§ 4. Степенная функция. Корень *n*-й степени (4 ч)	
19, 20	Функция $y = x^n$
21	Корень n-й степени
22	*Контрольная работа № 2 по теме «Квадратичная функция. Степенная функция. Корень n-й степени»*
ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (14 ч)	
§ 5. Уравнения с одной переменной (8 ч)	
23–25	Целое уравнение и его корни
26–30	Дробные рациональные уравнения
§ 6. Неравенства с одной переменной (6 ч)	
31, 32	Решение неравенств второй степени с одной переменной
33–35	Решение неравенств методом интервалов
36	*Контрольная работа № 3 по теме «Уравнения и неравенства с одной переменной»*
ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (17 ч)	
§ 7. Уравнения с двумя переменными и их системы (12 ч)	
37–39	Уравнение с двумя переменными и его график
40–42	Графический способ решения систем уравнений
43–45	Решение систем уравнений второй степени
46–48	Решение задач с помощью систем уравнений второй степени
§ 8. Неравенства с двумя переменными и их системы (5 ч)	
49, 50	Неравенства с двумя переменными
51, 52	Системы неравенств с двумя переменными
53	*Контрольная работа № 4 по теме «Уравнения и неравенства с двумя переменными»*

№ урока	Тема урока
	ГЛАВА IV. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ (15 ч)
	§ 9. Арифметическая прогрессия (8 ч)
54, 55	Последовательности
56–58	Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии
59, 60	Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии
61	*Контрольная работа № 5 по теме «Арифметическая прогрессия»*
	§ 10. Геометрическая прогрессия (7 ч)
62–64	Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии
65–67	Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии
68	*Контрольная работа № 6 по теме «Геометрическая прогрессия»*
	ГЛАВА V. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (13 ч)
	§ 11. Элементы комбинаторики (9 ч)
69, 70	Примеры комбинаторных задач
71, 72	Перестановки
73, 74	Размещения
75–77	Сочетания
	§ 12. Начальные сведения из теории вероятностей (4 ч)
78	Относительная частота случайного события
79, 80	Вероятность равновозможных событий
81	*Контрольная работа № 7 по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»*
	ПОВТОРЕНИЕ (21 ч)
82–84	Вычисления
85–87	Вычисления. Тождественные преобразования
88–91	Уравнения и системы уравнений
92–95	Текстовые задачи. Прогрессии
96, 97	Неравенства и системы неравенств
98–100	Функция. График функции
101, 102	*Контрольная работа № 8 (итоговая)*

Глава I
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Уроки 1, 2. Функция. Область определения и область значений функции

Цель: рассмотреть понятие функции и способы ее задания.

Планируемые результаты: научиться находить область определения и область значений функции, знать способы задания функции.

Тип уроков: общеметодологической направленности.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Работа по теме уроков

Эта тема является одной из *важнейших* для всего курса математики. Различные функции будут изучаться вплоть до окончания школы и далее в высших учебных заведениях. Пока же вы познакомитесь с самыми простыми функциями – линейными, квадратичными, дробно-линейными и другими функциями и их графиками. Также вы получите первое представление о графиках уравнений и неравенств.

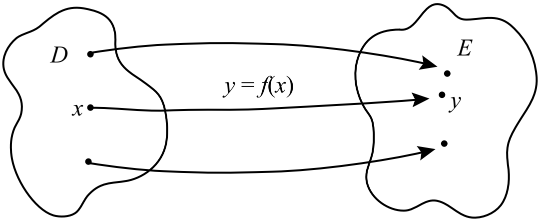
Данная тема вплотную связана с решением уравнений, неравенств, текстовыми задачами и т. д. Поэтому обратите самое серьезное внимание на ее изучение. Особое внимание следует уделить развитию навыков построения графиков функций, уравнений, неравенств.

План уроков

1. Понятие функции.
2. Способы задания функций.

1. Понятие функции

Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f, по которому *каждому числу* $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in E$ (см. рисунок). Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения (О.О.) D и областью значений (О.З.) E. При этом величину x называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции), величину y — *зависимой переменной* (или *значением* функции).



Область определения $y = f(x)$ обозначают $D(f)$, область значений $E(f)$.

Другими словами, *функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.*

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-2} + 3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: от величины x вычесть число 2 $(x - 2)$, извлечь квадратный корень из этого выражения $(\sqrt{x-2})$ и, наконец, прибавить число 3 $(\sqrt{x-2} + 3)$. Совокупность этих операций (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и *называется функцией* $y(x)$. Например, для $x = 6$ находим $y(6) = \sqrt{6-2} + 3 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$. То есть для вычисления функции y в данной точке x необходимо подставить эту величину x в данную функцию $y(x)$.

Очевидно, что для данной функции *для любого* допустимого числа x можно найти только *одно* значение y (т. е. каждому значению x соответствует *одно* значение y).

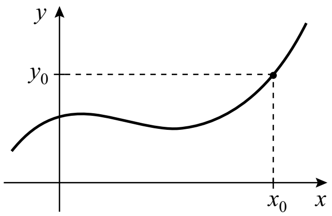
Рассмотрим теперь область определения и область значений этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения $(x - 2)$ можно только, если эта величина неотрицательная, т. е. $x - 2 \geq 0$, или $x \geq 2$. Поэтому О.О. функции $D(y) = [2; +\infty)$. Так как по определению арифметического корня $0 \leq \sqrt{x-2} < +\infty$, то, прибавив ко всем частям этого неравенства число 3, получим $3 \le \sqrt{x-2} + 3 < +\infty$, или $3 \le y < +\infty$. Поэтому О.З. функции $E(y) = [3; +\infty)$.

Пример 2

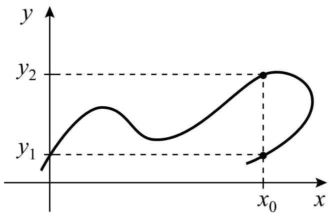
Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x - 3, \\ x^2 + 1 \end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x ($x = 1$) соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 3

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определить, какая из них является функцией.



а



б

На рис. *а* приведен график функции, так как любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), так как существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, значения y_1 и y_2).

2. Способы задания функций

1) *Аналитический* (с помощью формулы или формул)

Пример 4

Рассмотрим функции:

а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$;

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$ Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x = -0{,}37$. Так как $x < 0$, то, пользуясь верхним выражением, получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \dfrac{2}{3}$ (так как $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x+y=2y-x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x+x^2=2y-y$, или $x^2+3x=y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y=x^2+3x$.

2) *Табличный*

Пример 5

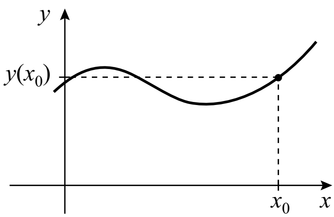
Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задает функцию: для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1,5)=2,25$, $y(5)=25$ и т. д.

3) *Графический*

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться *специальным рисунком — графиком функции*.



Графиком функции $y(x)$ называют *множество* всех *точек* системы координат, *абсциссы* которых равны значениям *независимой переменной* x, а *ординаты* — соответствующим значениям *зависимой переменной* y.

В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые удовлетворяют функциональной зависимости $y(x)$, расположены на графике функции. Любые другие пары точек, не удовлетворяющие зависимости $y(x)$, на графике функции не лежат.

Пример 6

Дана функция $y=2x-3|x|+4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) $(-2; -6)$; б) $(-3; -10)$?

а) Найдем значение функции y при $x=-2$: $y(-2)=2\cdot(-2)-3|-2|+4=-4-3\cdot 2+4=-6$. Так как $y(-2)=-6$, то точка $A(-2; -6)$ принадлежит графику данной функции.

б) Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3|-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка $B(-3; -10)$ не принадлежит графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. Наиболее полным следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем табличный способ позволяет быстро и легко найти значение функции для некоторых значений аргумента. График функции наглядно показывает ее поведение. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

В дальнейшем будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим еще несколько задач.

Пример 7

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$. Найти: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x + 1)$.

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2(-3x)^2 - 3(-3x) + 1 = 18x^2 + 9x + 1$;

в) $y(x + 1) = 2(x + 1)^2 - 3(x + 1) + 1 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 = 2x^2 + x$.

Пример 8

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найти: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим: $y(z) = 2 \cdot (3 - z)^2 - 4$, или $y(z) = 2 \cdot (9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2z^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции: z, x, t или любой другой, то сразу получаем: $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$.

б) Теперь легко найти $y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 8 + 24 + 14 = 46$.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции и поясните примером.
2. Что такое область определения и область значений функции? Приведите примеры.
3. Перечислите основные способы задания функций.

IV. Задание на уроках

№ 1; 4; 5 (а); 6 (б); 7; 9 (а, в, е); 10; 12; 14 (а); 15.

V. Творческие задания

1. Найдите область определения функции.

а) $y = \frac{3-x}{|x|-5}$;

б) $y = \frac{6x^2-3x+1}{|x-2|-1}$;

в) $y = \frac{3-x}{2-\frac{x}{x+5}}$;

г) $y = \frac{7x^2-14}{3-\frac{|x|}{x+2}}$;

д) $y = \frac{5x^2-3x-2}{7-\frac{|x-3|}{x+3}}$;

е) $y = \frac{\sqrt{3-|x+1|}}{x+2}$;

ж) $y = \frac{\sqrt{|5x+2|-3}}{(x+2)(x-1)}$;

з) $y = \frac{\sqrt{|x+1|-2}}{\sqrt{5-|x-1|}}$.

Ответы: а) $x \neq \pm 5$; б) $x \neq 1$ и $x \neq 3$; в) $x \neq -5$ и $x \neq -10$; г) $x \neq -2$ и $x \neq -1{,}5$; д) $x \neq -3$ и $x \neq -\frac{9}{4}$; е) $-4 \leq x \leq 2$ и $x \neq -2$; ж) $x \leq -1$ $(x \neq -2)$ и $x \geq \frac{1}{5}(x \neq 1)$; з) $x \in (-4; -3] \cup [1; 6)$.

2. Известно значение функции $y(6-x)$. Найдите функцию $y(x)$.

а) $y(6-x) = 5 + x$;

б) $y(6-x) = \frac{2x+1}{3x-2}$;

в) $y(6-x) = 2x^2 - 3x + 4$;

г) $y(6-x) = 2 - |x+3|$;

д) $y(6-x) = \frac{3|x-1|+2}{2x-1}$.

Ответы: а) $y(x) = 11 - x$; б) $y(x) = \frac{13-2x}{16-3x}$; в) $y(x) = 2x^2 - 21x + 58$; г) $y(x) = 2 - |x-9|$; д) $y(x) = \frac{3|x-5|+2}{11-2x}$.

3. Известно значение функции $y(2x-4)$. Найдите функцию $y(x)$.

а) $y(2x-4) = 3 - 2x$;

б) $y(2x-4) = \frac{2x-1}{4x+2}$;

в) $y(2x-4) = 4x^2 + 2x - 7$;

г) $y(2x-4) = 4x - 2|x+1|$;

д) $y(2x-4) = \frac{2|x+1|+3}{4|x|-8}$.

Ответы: а) $y(x) = -x - 1$; б) $y(x) = \dfrac{x+3}{2x+10}$; в) $y(x) = x^2 + 9x + 13$; г) $y(x) = 2x + 8 - |x + 6|$; д) $y(x) = \dfrac{|x+6|+3}{2|x+4|-8}$.

VI. Подведение итогов уроков

Домашнее задание

№ 2; 3; 5 (б); 6 (а); 8; 9 (б, г, д); 11; 13; 14 (б); 16.

Уроки 3–5. Свойства функций

Цель: вспомнить изученные ранее функции и их свойства.

Планируемые результаты: четко знать основные свойства и графики ранее изученных функций.

Тип уроков: повторения, практикум.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите значение произведения $y(-2) \cdot y(1)$.

а) $y = 3x - 2$;

б) $y = 2x + 3 - |3x - 1|$;

в) $y = \dfrac{3x-7}{2x+3}$.

2. Найдите область определения функции.

а) $y = 5x - 7$;

б) $y = 3x^2 - |5x + 2|$;

в) $y = \dfrac{7x - 3|x+1|}{3x^2 - 2x - 1}$.

Вариант 2

1. Найдите значение произведения $y(-3) \cdot y(2)$.

а) $y = 5x - 3$;

б) $y = 3x - 2 + |2x - 3|$;

в) $y = \dfrac{4x-3}{3x+2}$.

2. Найдите область определения функции.

а) $y = 3x - 8$;

б) $y = 2x^2 - |3x + 4|$;

в) $y = 4\dfrac{5x - 2|x - 3|}{3x^2 + 2x - 1}$.

III. Работа по теме уроков

План уроков

1. Свойства функции.
2. Свойства и графики некоторых функций.

1. Свойства функции

Как уже известно из курса 7–8 классов, любая функция характеризуется определенными свойствами. Часть этих свойств была рассмотрена ранее. Теперь необходимо систематизировать эти свойства и рассматривать их при исследовании любых функций и построении их графиков.

Остановимся теперь на *свойствах функции*. С двумя свойствами функции вы уже знакомы – это *область определения* и *область значений* функции. Рассмотрим следующее свойство функции – *точки пересечения графика функции с осями координат*.

Так как ось Oy характерна тем, что любая точка на ней имеет координату $x = 0$, а для оси Ox – любая точка на ней имеет координату $y = 0$, то точки пересечения графика с осями координат ищутся очень просто. *Точка пересечения с осью* Oy равна *значению* функции $y(x)$ *при* $x = 0$, т. е. $y(0)$. *Точки пересечения с осью* Ox являются *корнями уравнения* $y(x) = 0$ и называются *нулями функции*.

Пример 1

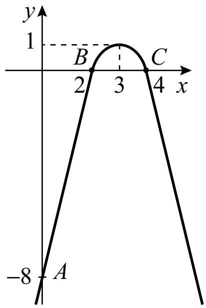
Рассмотрим функцию $y(x) = -x^2 + 6x - 8$.

Найдем точки пересечения графика этой функции с осями координат. Чтобы определить точку пересечения графика с осью ординат, вычислим значение функции $y(x)$ при $x = 0$: $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8$. Получаем координаты этой точки $A(0; -8)$.

Теперь определим точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс. Для этого в функцию $y = -x^2 + 6x - 8$ подставим значение $y = 0$ и получим квадратное уравнение $0 = -x^2 + 6x - 8$, или $0 = x^2 - 6x + 8$.

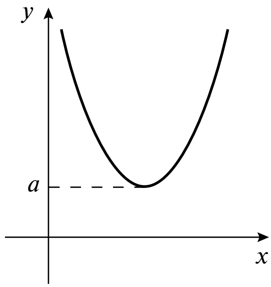
Решим его: $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Поэтому график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: $B(2; 0)$ и $C(4; 0)$. Для наглядности на рисунке приведен график данной функции (здесь мы несколько забежали вперед).

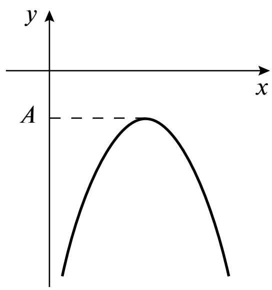


Следующее свойство – *ограниченность функции*. Функция называется *ограниченной снизу*, если все значения функции *не меньше* некоторого *числа a* (т. е. $y(x) \geq a$). Функция называется *ограниченной сверху*, если все значения функции *не больше* некоторого *числа A* (т. е. $y(x) \leq A$). Если функция ограничена *снизу* и *сверху*, то она называется *ограниченной*. На рисунке приведены графики ограниченных и неограниченных функций.

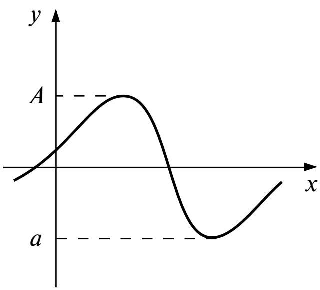
Для выяснения ограниченности функции очень часто используются алгебраические преобразования.



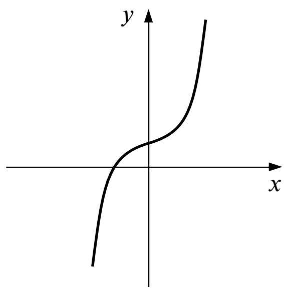
Ограничена снизу



Ограничена сверху



Ограниченная



Неограниченная

Пример 2

Докажем, что функция $y(x) = -x^2 + 6x - 8$ ограничена сверху.

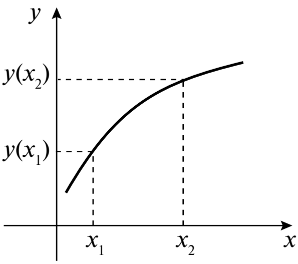
Выделим в функции $y(x) = -(x^2 - 6x + 8)$ полный квадрат разности. Для этого в скобках прибавим и вычтем единицу.

Получаем: $y(x) = -(x^2 - 6x + 8) = -((x^2 - 6x + 9) - 1) = -((x - 3)^2 - 1) = 1 - (x - 3)^2$.

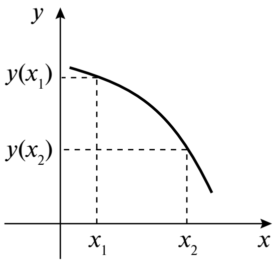
Так как при всех значениях x величина $(x - 3)^2 \geq 0$, величина $-(x - 3)^2 \leq 0$, то $1 - (x - 3)^2 \leq 1$, т. е. $y(x) \leq 1$. Тогда по определению данная функция ограничена сверху (при этом число A, входящее в определение, равно 1). Из графика примера 1 наглядно видно, что при всех значениях x значения $y(x) \leq 1$.

Рассмотрим еще одно свойство функции – монотонность (т. е. *возрастание* или *убывание* функции). Функция называется *возрастающей,* если *бóльшему значению аргумента* соответствует *бóльшее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) > y(x_1)$). Функция называется *убывающей*, если *бóльшему значению аргумента* соответствует *меньшее значение функции* (т. е. если $x_2 > x_1$, то $y(x_2) < y(x_1)$).

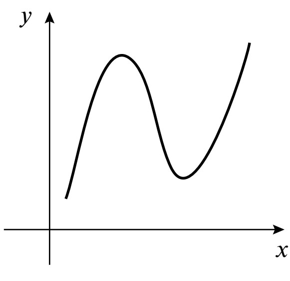
На рисунке приведены графики монотонных (возрастающей и убывающей) и немонотонной функций.



Возрастающая функция
$y(x_2) > y(x_1)$



Убывающая функция
$y(x_2) < y(x_1)$



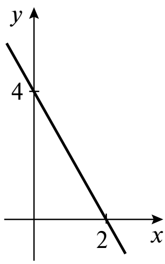
Немонотонная функция

Пример 3

Определить монотонность функции $y(x) = -2x + 4$.

Область определения этой функции – все значения x, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$. Возьмем два значения x из области определения этой функции x_1 и x_2 и пусть $x_2 > x_1$. Найдем значения функции в этих точках: $y(x_1) = -2x_1 + 4$ и $y(x_2) = -2x_2 + 4$. Теперь необходимо сравнить эти значения и определить, какое из них больше. Для этого рассмотрим разницу этих величин: $y(x_2) - y(x_1) = (-2x_2 + 4) - (-2x_1 + 4) = -2x_2 + 4 + 2x_1 - 4 = -2(x_2 - x_1)$.

Так как $x_2 > x_1$, то разность $x_2 - x_1 > 0$ и величина $-2(x_2 - x_1) < 0$. Поэтому получаем: $y(x_2) - y(x_1) < 0$, или $y(x_2) < y(x_1)$. Это неравенство означает, что большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому данная функция (по определению) является убывающей. Это же видно из приведенного графика функции.



Функция во всей области определения может быть немонотонной, но на отдельных промежутках функция может быть монотонной. Так, в примере 1 функция в целом немонотонная, но на промежутке $x \in [3; +\infty)$ функция убывает, а на промежутке $x \in (-\infty; 3]$ – возрастает (докажите самостоятельно).

И наконец, рассмотрим еще одно свойство функции – *четность*. Предварительно введем еще одно понятие – *симметричность области определения*. Область определения называется *симметричной*, если *функция определена и в точке* x_0, *и в точке* $(-x_0)$ (т. е. в точке, симметричной x_0 относительно начала числовой оси).

Пример 4

а) Областью определения функции $y = \dfrac{2 - 3x}{x^2 - 4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x^2 - 4 = 0$ (т. е. $x = \pm 2$). Поэтому эта функция определена, например, как при $x = -1$, так и при $x = -(-1) = 1$.

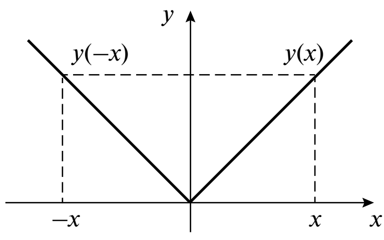
И наоборот, эта функция не определена и при $x = -2$, и при $x = -(-2) = 2$. Следовательно, область определения данной функции $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ симметричная.

б) Областью определения функции $y = \dfrac{2 - 3x}{x - 4}$ являются все значения x, кроме тех, для которых $x - 4 = 0$ (т. е. $x = 4$). Поэтому эта функция определена в точке $x = -4$, но не определена в симметричной точке $x = -(-4) = 4$. Поэтому область определения данной функции $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ не является симметричной.

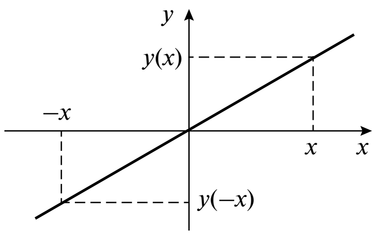
Понятие *четности* функции вводится *только* для функции *с симметричной областью определения*. Функция называется *четной*, если *при изменении знака аргумента значение функции не меняется*, т. е. $y(-x) = y(x)$. График четной функции всегда *симметричен относительно оси ординат*.

Функция называется *нечетной*, *если при изменении знака аргумента значение функции* также *меняется на противоположное*, т. е. $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции всегда *симметричен относительно начала координат*.

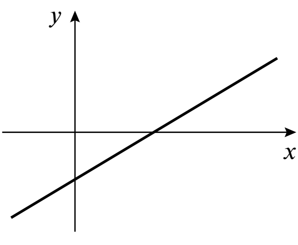
На рисунке приведены (для наглядности) графики четной, нечетной функции и функции, не имеющей никакой четности.



Четная функция
$y(-x) = y(x)$



Нечетная функция
$y(-x) = -y(x)$



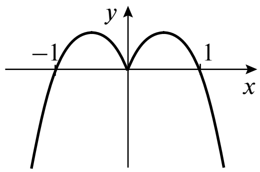
Функция, не имеющая четности

Пример 5

Выяснить четность функций: а) $y = |x| - x^2$; б) $y = x - x^3$; в) $y = x - 2$.

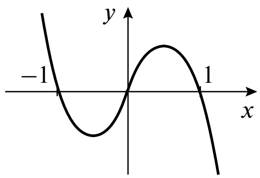
Прежде всего отметим, что области определения всех трех функций $x \in (-\infty; +\infty)$ симметричны. Для выяснения четности этих функций $y(x)$ надо найти значение $y(-x)$ и сравнить значения $y(x)$ и $y(-x)$.

а) $y(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$ (здесь учтено, что $|-x| = |x|$ и $(-x)^2 = x^2$). Теперь легко видеть, что $y(-x)$ совпадает с данной функцией $y(x)$, т. е. $y(-x) = y(x)$. Поэтому данная функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.



б) $y(-x) = -x - (-x)^3 = -x -(-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -y(x)$.

Видно, что значения функции в точках x и $-x$ противоположны по знаку, т. е. $y(-x) = -y(x)$. Поэтому данная функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат.



в) $y(-x) = -x - 2$. Сравнивая значение $-y(x) = -x - 2$ со значением $y(x) = x - 2$, видим, что равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется. Поэтому эта функция не является четной. Найдем теперь величину $-y(x) = -(x - 2) = 2 - x$. Сравнивая значение $y(-x) = -x - 2$ со значением $-y(x) = 2 - x$, видим, что равенство $y(-x) = -y(x)$ также не выполняется. Поэтому эта функция не является нечетной.