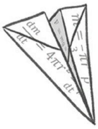
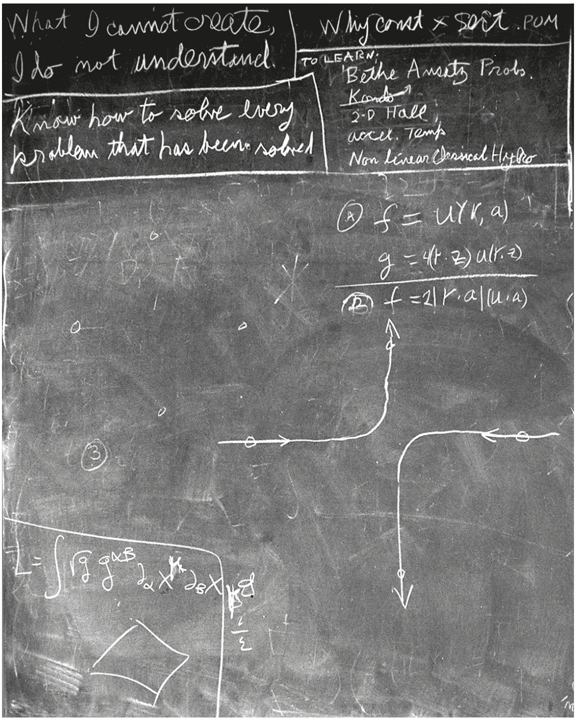
С благодарностью Пэт





Меловая доска Ричарда Фейнмана в Калифорнийском технологическом институте в том виде, в каком он ее оставил, покидая его в последний раз. *Ричард Фейнман* (Richard Feynman, 1918–1988) был одним из величайших физиков-математиков XX века (лауреат Нобелевской премии по физике за фундаментальные работы по квантовой электродинамике). Это фото иллюстрирует расхожий взгляд на работу физиков-математиков: какая-то тайная магическая символика, понятная лишь немногим избранным. Но я не думаю, что Фейнман считал так же. Как он заявил в известном интервью (Omni, февраль 1979): «Я не разделяю идею, что лишь немногие особо одаренные люди способны понять математику, а весь остальной мир – обычные. Математика – это человеческое открытие, и она не сложнее того, что может понять человек. В одном моем учебнике была фраза: “Что может один дурак, то может и другой”» [Фейнман цитировал *Calculus for the practical man* («Вычисления для практичного человека»), написанную британским инженером *Сильванусом Томпсоном* (Silvanus P. Thompson) в 1910 году]… Есть тенденция к помпезности во всем этом, чтобы сделать все это искусственно глубже и основательнее. Два принципа, написанных в верхнем левом углу, прочно прикрепились к образу Фейнмана и были не просто лозунгами: он активно отстаивал их в своих трудах и выступлениях.

Фото предоставлено архивом Калифорнийского технологического института.

Однородная стальная проволока в виде круглого кольца сделана так, что вращается в своей плоскости вокруг своего центра фигуры. Докажи, что максимально возможная линейная скорость не зависит от поперечного сечения провода и радиуса кольца, и вычисли эту скорость. Удельная прочность проволоки задана как 90 000 фунтов на квадратный дюйм, а вес кубического фута [стали] в 490 фунтов.

Задача, поставленная *Джоном Уильямом Страттом* (John William Strutt, 1842–1919), лучше известным в мире физики как *Лорд Рэлей* (Lord Rayleigh, лауреат Нобелевской премии по физике 1904 г.), на четвертый день знаменитого девяти(!)дневного экзамена в Кембриджском университете в 1876 году. Лорд Рэлей был экзаменатором по математике и физике, и эту задачу человек, получивший высшие баллы[1], – *Вранглер Старший* (Senior Wrangler) – запомнил как «чрезмерно сложную».

Подумайте об этой задаче, упомянутой в книге *Эндрю Уорвика* (Andrew Warwick) *Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics* (University of Chicago Press, 2003), – пока вы читаете эту книгу, но если после упорных попыток вы действительно не сможете решить ее (или просто захотите проверить свой ответ), то ее решение приводится в заключительном приложении этой книги. (Уорвик так и не смог этого сделать.)

[1] Джозеф Тиммис Уорд (Joseph Timmis Ward) (1853–1935), который с некоторым трепетом написал в своем дневнике в тот же вечер: «Что он [лорд Рэйли] даст нам в последующие дни, я и представить не могу». Вскоре после того, как он занял первое место в «Mathematical Tripos» – экзамене в Кембриджском университете, Уорд сделал то же самое на еще более требовательном экзамене «Smith's Prize». Умение сдавать математические экзамены не всегда приводит к успешной научной жизни. Уорд принял сан и после десятилетий пребывания священником умер забытым как отшельник в своих коллежских комнатах в Кембридже. Занявший третье место после Уорда в «Mathematical Tripos» в 1876 году, Джон Генри Пойнтинг (John Henry Poynting) (1852–1914), однако, стал известным физиком благодаря *вектору Пойнтинга* (Poynting vector) (1884), который описывает движение потоков энергии в электромагнитном поле.

Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Скачивание исходного кода примеров

Скачать файлы с дополнительной информацией для книг издательства «ДМК Пресс» можно на сайте **www.dmkpress.com** или **www.дмк.рф** на странице с описанием соответствующей книги.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Немного математики никогда не повредит практичному человеку.
Я самоучка, и это замедлило меня.

– Хиггстон Рейнберд (Higgston Rainbird),
изобретатель первой машины времени[1]

Однажды утром около трех лет назад я сел с горячей чашкой кофе и распахнул *Boston Globe*[2] того дня. После прочтения самого поучительного раздела (комиксов, конечно же, особое внимание уделил *Arlo and Janis*[3]) я обратился к разделу «Мнение редакции». Там я нашел возмутительное – действительно, невероятно возмутительное! – письмо, которое показалось мне гораздо более нелепым, чем все, что я только что прочел в комиксах. *Письмо* под названием «Кому вообще нужно это знать?» было написано в знак протеста против необходимости хороших знаний в *математике* для сдачи CPT[4] (college placement test). Письмо содержало следующие строки:

> Круто, если вы знаете, как решать квадратные уравнения, где есть корень квадратный из минус единицы. И это знание необходимо для некоторых профессий. Но почему это необходимо для прохождения курсов начального уровня, которые открывают двери к хорошим рабочим местам? ... Продвинутая *алгебра* – это новая латынь. Ее иногда применяют, но в целом это препятствие, о которое спотыкается множество молодых людей, которые могли бы быть успешными экспертами в своих областях, но у них нет никаких шансов, ведь они не

---

[1] Из рассказа Р. А. Лафферти (R. A. Lafferty) «Дождевая птица» (Rainbird // Galaxy Science Fiction. December 1961).

[2] *Boston Globe* – американская ежедневная газета, крупнейшая в Бостоне. – *Прим. ред.*

[3] *Arlo and Janis* – американский комикс Джимми Джонсона. Публикуется с 1985 г. – *Прим. ред.*

[4] Аналог нашего ЕГЭ для проверки знаний старшеклассников. – *Прим. ред.*

> знают, как решать квадратные уравнения. Многие из тех, кто умеет решать квадратные уравнения, могли бы использовать свое время продуктивнее и изучить такие жизненно важные навыки и знания, как, например, умение рассуждать[1].

Что ж! Что вы можете сказать на это, кроме того что это полная ерунда? Теперь авторы этого письма почти наверняка ответят: «Это только твое мнение, приятель, и это ты ошибаешься». После того как я успокоился, я понял, что подобные споры вряд ли изменят мнение многих людей. И поэтому я не стал писать возмущенное письмо редактору в ответ – но я так же понял, что более эффективным ответом могла бы быть убедительная демонстрация силы *математических рассуждений*, применимых к реальному миру, которым авторы этого письма так по праву обеспокоены. Вот о чем эта книга – продолжение моей предыдущей книги *In Praise of Simple Physics* (Princeton University Press, 2016). Это сборник сочинений, каждое из которых не очень длинное и иллюстрирует способность математики (алгебры, тригонометрии, геометрии, а иногда и элементарного вычисления вместе с небольшой помощью от моего ноутбука) в сочетании с фундаментальными физическими законами обеспечить понимание реальных задач. Эти задачи не похожи на вычислительные упражнения в учебниках, предназначенных лишь для практики в манипулировании абстрактными символами. Напротив, почти все они значимы не только в математике, но и в физике. А также каждое эссе заканчивается как минимум одним вопросом *вам* для анализа и обдумывания.

Достойный процент эссе специально включает квадратичные вычисления (и еще более высокого порядка), и эти вычисления – в частности, то, почему я думаю, что авторы письма в *Boston Globe* были совершенно неправы. После прочтения этой книги, уверен, вы согласитесь со мной. Как я уже писал, я представляю свою аудиторию как читателей, которые изучали математику и физику в средней школе и студенческие годы серьезно (а в мире только обучающихся на первых курсах математического профиля миллион), но кто, по тем или иным причинам, не стал физиком-математиком. Тем не менее сегодня это юристы, биологи, химики, бухгал-

[1] Для тех, кто любит проверять цитаты, письмо можно найти (предположительно сейчас – только на устройстве для чтения микрофильмов в вашей местной библиотеке) на странице A15 от 13 августа 2015 г. выпуска *Boston Globe*.

теры, программисты, инженеры, врачи и поэты (возможно, даже голливудские сценаристы, наряду с несколькими профессиональными футболистами, вероятно). И они помнят то удовольствие, которое получаешь, осмысливая мир с помощью математического анализа. Это то, что на самом деле делают физики-математики. Если вы тоже такой человек, то я написал эту книгу для вас – о том, как думают физики-математики.

Обилие книг с различными подходами и исследованиями на математические темы в книжных магазинах показывает, что значительная часть людей по крайней мере *осознает важность* предмета. В другой форме поп-культуры – в фильмах – похожая картина. Например, «Умница Уилл Хантинг» (1997), в котором интегралы Фурье текут через начальные титры; «Игры разума» (2001), в котором аллюзии на эзотеричную теорию игр распиханы тут и там; «Человек, который познал бесконечность» (2015), который начинается с изображений загадочных уравнений из писем индийского гения *Рамануджана* (Ramanujan, 1887–1920), отправленных в 1913 году всемирно известному английскому математику *Г. Х. Харди* (G. H. Hardy, 1877–1947); «Скрытые фигуры» (2016) со множественными упоминаниями астродинамики. На телевидении у нас был, конечно, сериал «4исла» (2005–2010) и совсем недавно первый эпизод «Однажды ночью» (The Night Of, 2016), которая начинается с того, как студент яростно делает заметки, пока его преподаватель пишет на доске (математически корректно!) и читает лекцию по *теореме Стокса* из дифференциального векторного исчисления.

Различие между чистой математикой и чистой физикой часто неявное, и есть некоторые особенно талантливые люди, которые могут работать на самых высоких уровнях в обеих сферах. Одним из таких людей был американский физик-математик польского происхождения *Марк Кац* (Mark Kac, 1914–1984), который во введении к своей изящной автобиографии «Загадки шанса» (*Enigmas of Chance*. Harper & Row, 1985) пишет об этом различии с глубоким пониманием:

> В математике, когда вы открываете что-то, у вас возникает чувство, что это всегда было там. В физике у вас есть ощущение, что вы сделали настоящее открытие… Если занятия математикой или наукой рассматривать как игру, то можно сказать, что в математике вы соревнуетесь против себя или других математиков; в физике же ваш противник – природа, и ставки от этого выше.

Моя цель при написании данной книги состояла в том, чтобы предоставить конкретные примеры того, о чем только что говорил Кац.

Теперь вы можете подумать: очевидно, что математический физик не может функционировать без математики. Тем не менее отношения между математикой и физикой не всегда были гладкими. Цитирую швейцарского физика-теоретика *Реза Йоста* (Res Jost, 1918–1990):

> Отношения между математикой и физикой меняются со временем. Прямо сейчас и в течение последних нескольких лет царит гармония и медовый месяц. Тем не менее я видел другие времена, времена разводов и ожесточенных сражений, когда сестринские науки объявили друг друга бесполезными или даже хуже. Следующий обмен мнениями между известным физиком-теоретиком и не менее известным математиком мог бы быть типичным еще пятнадцать или двадцать лет назад. Физик говорит: «Я не пользуюсь математикой. Всю математику, в которой я когда-либо нуждаюсь, я придумываю за одну неделю». Математик отвечает: «Вы, должно быть, имеете в виду те семь дней, которые понадобились Господу, чтобы создать мир»[1].

Что ж, несмотря на такие конфликты, в этой книге мы просто предположим, что математика имеет важное значение для работы физиков. Но даже в этом случае вы можете хорошенько задуматься о том, насколько именно глубоко мы окунемся в математику в данной книге. Кажется очевидным априори, что мы должны быть хотя бы немного математичными: в конце концов, в книге со словом «*математические*» в названии разве вы не почувствуете себя надутыми, или даже откровенно обманутыми, если не увидите уравнения здесь и там? Ну, вы, конечно, согласны, что это имеет смысл, но, спросите вы, будет ли много действительно сложных уравнений? Краткий ответ: если вы изучали математику на уров-

---

[1] Из эссе Йоста *Mathematics and Physics since 1800: Discord and Sympathy* («Математика и физика с 1800 года: раздор и симпатия»), из книги в *The Fairy Tale about the Ivory Tower: Essays and Lectures* (in German) («Сказка о башне из слоновой кости: эссе и лекции» (на немецком языке)), Springer, 1995. Йост не уточнял, кто именно был тем «известным физиком-теоретиком» и «не менее известным математиком», но фактически такой обмен мнениями состоялся во время лекции, которую Кац дал в Калифорнийском техническом институте; физиком (в аудитории) был Ричард Фейнман. Кац и Фейнман знали друг друга с конца 1940-х гг., когда они были коллегами в Корнелльском университете.

не средней школы, тогда вам пора. *Алгебра* в старшей школе, тригонометрия, геометрия и понимание того, что такое *производная* и *интеграл*, – вот все, что вам нужно. Хорошо, это короткий ответ. Позвольте мне теперь дать вам конкретный пример с той математической сложностью, с которой вам надо уметь справляться.

Я выбрал этот конкретный пример именно потому, что он использует только рассуждения на уровне средней школы, и все же я готов поставить долларов пять, что даже профессиональным математикам, возможно, придется потратить немного времени, чтобы решить это. Надеюсь, что этот пример доносит мысль, что мы будем обсуждать проблемы, требующие лишь относительно бесхитростного математического анализа, но тем не менее приводит к возможности успешно решать нетривиальные физические вопросы. Итак, вот задача:

> Докажите, что произведение любых последовательных m натуральных чисел всегда делится на $m!$, то есть на m-факториал, где $m! = m(m - 1)(m - 2)\ldots(3)(2)(1)$.

Это утверждение говорит, например, что (17)(18)(19)(20)(21)(22)(23) делится на 7!, что вы можете легко проверить, выполнив очевидные сокращения. Но подтверждение конкретными примерами, независимо от того, сколько бы вы их ни решили, не является доказательством того, что требование всегда верно для всех возможных m. Может показаться, что на самом деле это самая трудная задача, но это не так. Вот один способ решить ее.

Начнем с того, что утверждение очевидно верно для случаев $m = 1$ и $m = 2$. Случай $m = 1$ говорит о том, что любое одно целое число всегда делится на $1! = 1$, – и я надеюсь, для вас это тривиально! Случай $m = 2$ говорит, что произведение любых двух последовательных целых чисел (одно из которых тогда должно быть нечетным, а другое четным) делится на $2! = 2$, и, конечно, 2 разделит четное целое число. Однако для $m > 2$ все уже не так очевидно.

Что делать? Использовать метод индукции, особенно любимый математиками. То есть мы будем считать, что это истинно для случая $m = n - 1$, где n – некоторое целое число больше 2. Тогда мы покажем, что из этого предположения следует, что случай $m = n$ так же верен. Поскольку мы уже знаем, что утверждение верно для

$m = 2$, тогда это должно быть верно для $m = 3$, что, в свою очередь, говорит, что это верно для $m = 4$ и т. д., до бесконечности. Это математический аналог того, как если бы для левитации вам было бы достаточно тянуть за собственные шнурки. Физики не могут этого сделать, но математики могут! Начнем с определения функции $\varphi_n(r)$ как произведения n последовательных натуральных чисел, начиная с r:

$$\varphi_n(r) = r(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1).$$

В частности,

$$\boxed{\varphi_n(1) = 1(2)(3)\cdots(n) = n!.}$$

Поскольку

$$\varphi_n(r + 1) = (r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)(r + n),$$

то

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = [(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)]\,[(r + n) - r],$$

или

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = [(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)]n.$$

Число справа в квадратных скобках – это произведение из $n - 1$ последовательных целых чисел, и поэтому, по нашему предположению, делится на $(n - 1)!$. Это:

$$[(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)] = \text{произведение } (n - 1)!,$$

и поэтому

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = \{\text{произведение } (n - 1)!\}n = \text{произведение } n!,$$

что означает, что

$$\boxed{\varphi_n(r + 1) = \varphi_n(r) + \text{произведение } n!.}$$

Для $r = 1$ этот результат означает, что $\varphi_n(2) = \varphi_n(1) +$ произведение $n!$.

Но так как $\varphi_n(1)$ сама эквивалентна $n!$ (посмотрите на формулу во второй рамке), то

$$\varphi_n(2) = \text{произведение } n!.$$

Но тогда

$$\varphi_n(3) = \varphi_n(2) + \text{произведение } n!$$
$$= \text{произведение } n! + \text{произведение } n! = \text{произведение } n!.$$

И так далее для $\varphi_n(4)$, $\varphi_n(5)$ … и так далее до бесконечности! То есть для r – любого положительного четного числа

$$\varphi_n(r) = \text{произведение } n!.$$

И вот мы закончили. Умно придумано, не правда ли?[1]

Физик сможет оценить такую симпатичную демонстрацию, как и любой математик, но он или она также может противостоять искушению возгордиться после этого. Например, в своей автобиографии Кац рассказывает откровенную историю о комментарии, сделанном физиком математику в знаменитой радиационной лаборатории MIT:

> «Вы можете сохранить свое гильбертово пространство», – говорит физик. – «Я хочу ответ в вольтах»[2]. Это будет задавать тон остальной части данной книги.

Кац, почти вся карьера которого протекала в академических кругах, имел международную репутацию первоклассного аналитика вероятностей, но во время Второй мировой войны он также работал неполный рабочий день в Радиационной лаборатории, изучая физические проблемы, вызванные электронным шумом в радаре. Такие разносторонние таланты не обязательно будут оценены теми, чьи способности ограничены только одной сферой деятельности. Например, когда Кац после войны опубликовал статью в журнале по прикладной физике, основываясь на своей

---

[1] Это не самовосхваление. Я столкнулся с данным решением несколько лет назад, когда читал учебник по элементарной алгебре XIX в. английского математика У. У. Рауса Болла (W. W. Rouse Ball, 1850–1925): *Elementary Algebra*. Cambridge University Press, 1890. P. 415. Было ли это его оригинальным открытием или он, в свою очередь, обнаружил его еще в более ранней работе, я не знаю.

[2] Этим физиком был Сэмюэль Гоудсмит (Samuel Goudsmit, 1902–1978), который известен как главный научный руководитель миссии «Алсос» (USA Alsos mission) сразу после июня 1944 г., когда Европа вторглась в Нормандию. Целью миссии было раскрыть детали нацистского химического вещества и подробности программ биологического, ракетного и атомного оружия. А математиком был знаменитый эксцентричный Норберт Винер (Norbert Wiener, 1894–1964).

работе на радаре, он получил открытку от друга – блестящего венгерского математика *Пола Эрдеша* (Paul Erdös, 1913–1996) – с одним-единственным предложением: «Я молюсь за вашу душу».

Чтобы максимизировать ваше удовольствие, книга структурирована как последовательность постановки задач со всеми их решениями, собранными вместе в самом конце. То есть вы можете попробовать свои силы в каждой задаче самостоятельно, прежде чем читать мое решение, но если вы застряли или просто хотите сравните свой подход с моим, вы можете обратиться к разделу с решениями. (Один физик, который посмотрел на ранний черновик этой книги, думал, что читатели просто прочитают задачи, а затем сразу решения, на что я ответил: «А разве это плохо?» Да, так тоже нормально. В конце концов, это ваша книга!) Чтобы показать вам, как это будет работать, рассмотрим следующую задачу по математике.

Задача 1. Вавилонский математик, ставший эллином[1], Диофант Александрийский, который, как считается, жил в 250 г. н. э., т. е. на шесть веков позже Евклида, сегодня вспоминается[2] как создатель следующего класса задач: дан один полином (так называемое *диофантово уравнение*) в n переменных, существуют ли у него какие-либо целочисленные положительные решения? Например, каковы все положительные целые значения (если таковые имеются) для x и y таких, что

$$72x + 694y = 1\,001\,001?$$

Аналогично, каковы положительные целочисленные значения (если они есть) для x, y и z таких, что

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3?$$

Чтобы ответить на эти два вопроса (первый, несмотря на большие коэффициенты, легкий, а второй, несмотря на малые коэффици-

---

[1] Эллины – так называли себя жители Древней Греции. – *Прим. ред.*

[2] Немного известно о жизни Диофанта, кроме того, сколько ему было лет, когда он умер. Это из-за загадки, датируемой IV в., которая, вероятно, появлялась в каждом вводном алгебраическом тексте и звучит так: «Его детство длилось 1/6 его жизни; его борода выросла на 1/12 позже; еще через 1/7 он женился, и у него родился сын 5 лет спустя; сын дожил до половины возраста своего отца, а отец умер 4 года спустя сына». Итак, если Диофант умер в возрасте x, то у нас получится $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, и я предоставляю вам самим найти решение.

енты, не такой простой), требуются только элементарные понятия четности и нечетности. Если вы застрянете, то решения для обоих вопросов приведены в самой первой записи раздела решений.

Задача 2. Задача такого типа часто возникает во время теоретического анализа. Используя только *алгебру* (без дополнительных вычислений!), *выведите разложение степенного ряда* $\sqrt{(1+x)} = c_0 + c_1x + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \cdots$. Что здесь есть c? Вы можете найти это разложение в справочнике по математике, но физик-математик должен знать, как вывести это с нуля. Что, если, например, ответ является ключом к спасению с необитаемого острова, и все, что у вас есть, – это палка, чтобы исписать песчаный пляж? (Не смейтесь, это, по крайней мере, мыслимая ситуация!) Решение – вторая запись в одноименном разделе. И так как это книга по математической физике, третья задача – физическая.

Задача 3. На рис. 1 масса $2m$, находящаяся на наклонной плоскости с углом θ, соединена с помощью нити и колесика с массой подвеса m. Постоянный *коэффициент кинетического трения* (coefficient of kinetic friction) между массой на наклонной поверхности и этой поверхностью μ[1]. Две массы движутся с постоянной скоростью. (Это подсказка, чтобы прийти к мысли о втором законе Ньютона, знаменитом «сила – это масса, умноженная на ускорение». Каково соотношение между θ и μ? В частности, можете сами выяснить эти соотношения (уделите особое внимание интервалу $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$) и комментируйте все, что угодно, что найдете особенно интересным. Анализ – третья запись в разделе решений.

Хоть аналитические методы, используемые в этой книге, и будут отчасти просты для большинства читателей, иногда мы все же будем немного хитрее. Чтобы проиллюстрировать, что я имею в виду под словом трюк, рассмотрим следующую небольшую головоломку, которую я впервые услышал в средней школе. Старый фермер умер и завещал всех коров в своем хлеву своим трем сыновьям: Алу, Бобу и Чаку. Ал должен был получить половину коров в хлеву, Боб должен был получить одну треть коров в хлеву, а Чак

[1] Напомним, что если движущаяся масса применяет силу F_n (скажем, ее вес) в виде нормали к поверхности, по которой она движется, и если масса испытывает сопротивление силы трения (то есть силы, противоположной направлению движения) вдоль поверхности F_r, то $\mu = F_r/F_n \geq 0$ и называется кинетическим коэффициентом трения.

должен был получить одну двенадцатую коров в хлеву. Проблема заключалась в том, что когда фермер умер, коров в сарае было 11! Никто не мог выполнить последние пожелания фермера, пока его брат (явно физик-математик в отставке, у которого к тому же было несколько своих коров) не решил проблему. Вот что он сделал:

1) он поместил одну из его собственных коров в хлев. Теперь их стало 12;
2) Ал получил 6 коров (1/2 от 12 коров в хлеву), осталось 6 коров;
3) Боб получил 4 коровы (1/3 от 12 коров в хлеву), осталось 2 коровы;
4) Чак получил 1 корову (1/12 от 12 коров в хлеву), осталась 1 корова;
5) физик-математик в отставке забрал последнюю оставшуюся корову в хлеву, ту самую, что он поместил в хлев в пункте 1, и пошел домой.

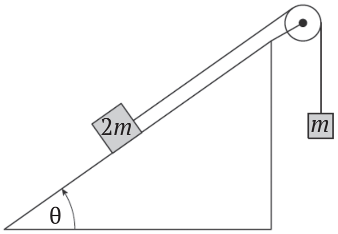


Рис. 1. Две массы движутся с постоянной скоростью

Обратите внимание, что даже если физик-математик на самом деле не имел бы ни одной коровы, он мог бы просто положить воображаемую корову в сарай и затем, на этапе (5), забрать свою воображаемую корову обратно. В этом и состоит трюк, о котором я говорил выше, и мы будем делать такие вещи дальше время от времени[1]! Разве математика не прекрасна?

[1] Как математики любят говорить, уловка, которую вы можете использовать более одного раза, – это метод. В конце этого предисловия я дам вам еще две сложные задачи, обе древние. Их происхождение датируется I в. н. э. в китайской математической литературе. И первую, и вторую можно решить с помощью метода «воображаемой коровы». Физикам-математикам эти задачи тоже должны понравиться.

Просто чтобы вы не думали, что я буду уделять слишком много внимания уловкам, позвольте мне показать вам еще один «серьезный» пример полезности квадратных уравнений для физиков-математиков. Это удивительно, как часто при чтении технической статьи по физике в журналах встречается предложение, которое звучит примерно так: «Теперь, если мы применим неравенство Коши–Шварца[1] к нашему последнему результату, станет сразу очевидно, что…» Говоря о неравенстве Коши–Шварца:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ могут быть любыми реальными функциями, какими вы пожелаете, если существуют их определенные интегралы. Это общая теорема удивительного значения для физиков-математиков; один математик назвал ее «исключительно мощным оружием»[2]. Затем математик очень правильно написал: «Есть много случаев, когда люди, которые знают об использовании этой формулы, будут сиять, пока их менее удачливые братья будут барахтаться дальше». Позже в этой книге я приведу неравенство Коши–Шварца в одной из дискуссионных задач, но как (может быть, вам уже сейчас это интересно) мы докажем его? Ну, все, что нужно знать, – это квадратное уравнение. Вот как доказывается.

С λ в качестве произвольного параметра, безусловно, верно, что

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx \geq 0,$$

потому что интеграл любой реальной квадратичной функции не может быть отрицательным (подумайте о пространственной интерпретации определенного интеграла). Развернем этот интеграл в деталях, получим:

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda^2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

---

[1] Названное в честь французского математика *Августина-Луи Коши* (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857) и немецкого математика *Германа Шварца* (Hermann Schwarz, 1843–1921). Чтобы понять физическое значение этого неравенства, все, что вам действительно нужно знать, – это то, что под определенным интегралом функции $h(x)$ на интервале $a \leq x \leq b$ подразумевается площадь под кривой $y = h(x)$ при изменении x от a до b.

[2] *Ralph Palmer Agnew*. Differential Equations. McGraw-Hill, 1960. P. 370.

Эти интегралы определенные, и они имеют определенные значения.

$$\int_a^b f^2(x)dx = A,$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = B,$$

$$\int_a^b g^2(x)dx = C,$$

то есть получаем

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0.$$

Это квадратное неравенство для λ. Знак ≥ означает физически, что график слева, как функция от λ, никогда не пересекает ось λ (представьте ее горизонтальной). То есть левая сторона – это кривая, которая всегда выше (или, самое большее, просто касается[1]) оси λ. «Не пересекая ось λ» означает, что нет реальных решений (точки пересечения = решения) для λ к

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0.$$

Формула решения квадратного уравнения говорит нам, что

$$\lambda = \frac{-2B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 2AC}}{A}.$$

Тогда условие отсутствия реальных решений будет выглядеть так:

$$B^2 - AC < 0,$$

что, конечно, дает комплексные решения. Это

$$B^2 < AC,$$

или

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 < \left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}\left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\},$$

[1] Конечно, касание происходит, когда знак ≥ становится частным случаем равенства.