Предисловие

В 10 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – начала математического анализа. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену, такое понимание будет способствовать обучению высшей математике в вузе. Также в этом классе продолжается изучение алгебры – детально рассматриваются тригонометрические функции, уравнения и неравенства. Такой материал крайне необходим при изучении точных наук в вузе.

Время обучения в десятом классе необходимо рассматривать как период целенаправленной подготовки к сдаче ЕГЭ, так как варианты заданий этого экзамена состоят из значительного количества задач, содержащих изучаемый материал.

Данное пособие преследует три основные цели: помочь в изучении материала по алгебре и началам анализа для 10 класса, подготовке по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и использованию полученных знаний при обучении в вузе. Пособие составлено для УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Нумерация задач в поурочном планировании дана для задачника этого УМК.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько *расширен* изучаемый *материал*: более детально изучены свойства функций и способы построения их графиков, тригонометрические функции, уравнения, неравенства, производные и способы их применения.

Такое расширение материала вполне доступно для десятиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется или учителем, или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора для учащихся. В пособии приведены 6 контрольных работ.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи в них разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Приведены 5 зачетных работ по темам.

В конце года проводится итоговая контрольная работа, которая проверяет навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены или с ответами, или с полным разбором сложных задач. Его можно разместить на стенде, так как решить все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты в пособии не предусмотрены, так как, на наш взгляд, малоэффективны при обучении и отнимают значительное время от уроков.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

Рекомендации к проведению уроков

Данное пособие позволяет проводить занятия с использованием базового УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина) и рассчитано на 82 урока в год. Содержание пособия является *избыточным* (в расчете на очень подготовленный, сильный класс). При необходимости часть материала опускается или излагается достаточно поверхностно. Более сложный материал может быть использован при проведении факультативных занятий, олимпиад, математических вечеров. Учитывая сложность курса, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании *сдвоенные уроки* алгебры. Поурочное планирование включает в себя четыре вида занятий:

1. Урок изучения нового материала.
2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.
3. Письменный опрос, самостоятельная работа, контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок изучения нового материала включает в себя семь этапов.

I. Сообщение темы и цели урока делает учитель (~1–2 мин). Требуется донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены).

II. Изучение нового материала (основные понятия) (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует ответы учащихся. Однако такой подход можно рекомендовать лишь для самых простых тем или отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее решить задачу самостоятельно, чем просто узнать ее решение).

III. Контрольные вопросы по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания новых понятий, терминов, алгоритмов решения задач и т. д. (~5 мин). Вопросы можно задаваться как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание, а не на механическое запоминание. Для этого рекомендуется, кроме определения, попросить ученика привести соответствующие примеры или объяснить пример учителя. При необходимости к обсуждению можно привлечь всех учащихся класса.

IV. Задание на уроке дается из числа наиболее характерных типовых задач (~15 мин). Выполнение задания представляет собой:

1) самостоятельную работу учащихся всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся: поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.;

2) диалог соседей по парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка заданий;

3) работу у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможны как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. При этом происходит и диалог учителя с учеником, отвечающим у доски.

V. Задание на дом дается из числа задач, аналогичным рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 35–40 мин. Желательно, чтобы учащимися были рассмотрены различные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При обучении (в том числе при выполнении домашнего задания) необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические понятия, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это уже половина ответа на этот вопрос. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии.

VI. В разработках многих уроков предусмотрены творческие задания. Они отличаются от приводимых в учебнике или большей сложностью, или нестандартностью формулировки задания, или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от уровня подготовки класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) со всеми учащимися в классе или дома;

2) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками на уроке или дома;

3) на внеклассных занятиях (факультативы, дополнительные занятия, кружки);

4) во время проведения олимпиад, недель математики, математических боев и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах времени, отведенного на урок.

VII. Подведение итогов урока (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, обсуждений, дополнений и т. д. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

Урок отработки и закрепления пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрены повторение и закрепление пройденного материала (~20 мин). Прежде всего, он включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давали сами учащиеся. Вопросы могут включать в себя непонятые термины, определения, алгоритмы и другой теоретический материал. Также может возникнуть и необходимость разбора нерешенных задач.

При этом желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более понятными и доступными для понимания ровесниками.

Ориентировочное время ~5–10 мин.

Далее предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос, самостоятельная работа или тест), на который отводится ~10–15 мин.

Задание для письменного опроса содержит 1–2 теоретических вопроса и 1–2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок.

Самостоятельная работа включает 2–3 типовые, необходимые для дальнейшего изучения алгебры задачи.

Тест содержит 3–4 задачи, для каждой из которых приводится несколько вариантов ответа. Однако тестов дано мало. Это связано с тем, что учащиеся 10 класса часто ошибаются, а тестирование не дает возможности выявить причину ошибки (непонимание темы, невнимательность, арифметические ошибки, пробелы в знании предыдущего материала и т. д.).

По каждой изучаемой теме проводится **контрольная работа**. Она составлена **в шести вариантах** различной сложности (варианты 1, 2 самые простые, варианты 3, 4 сложнее, варианты 5, 6 самые сложные). Каждый вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, они подобны задачам, решенным в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценивать контрольную работу можно следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность этих заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). При необходимости за счет уменьшения количества задач работу можно выполнить и на одном уроке.

После каждой контрольной работы проводят анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1–4 приведены ответы, задачи вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что из-за дифференциации вариантов и заданий возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

Чтобы устранить подобную необъективность, повысить оценку, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, помимо контрольной работы, проводится **тематический зачет**. Зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа A – самые простые задачи, группа B – более сложные задачи и группа C – самые сложные задачи). Каждая задача из группы A оценивается в 1 балл, из группы B – в 2 балла, из группы C – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач группы A можно получить 7 баллов, группы B – 8 баллов и группы C – 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» – за 10 баллов, оценка «5» – за 14 баллов.

Все изложенное носит исключительно рекомендательный характер. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может быть догмой. Каждый урок должен способствовать обучению школьников. Пусть школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не воспримет ничего. Ведь непонимание и незнание принимают хронический характер, а это может привести к полному провалу в изучении алгебры и начал математического анализа.

В заключение отметим, что цель изучения алгебры и математического анализа в 10 классе не только освоение изложенного материала и навыков решения задач, но и выработка правильного подхода к обучению, развитие мышления, пробуждение интереса к точным наукам.

Тематическое планирование учебного материала

(3 ч в неделю в 1-м полугодии,
2 ч в неделю во 2-м полугодии)

1-е ПОЛУГОДИЕ (48 ч)

Глава 1. Числовые функции (6 ч)

§ 1. Определение числовой функции и способы ее задания (2 ч)
§ 2. Свойства функций (2 ч)
§ 3. Обратная функция (1 ч)
Контрольная работа № 1 (1 ч)

Глава 2. Тригонометрические функции (22 ч)

§ 4. Числовая окружность (2 ч)
§ 5. Числовая окружность на координатной плоскости (2 ч)
§ 6. Синус и косинус. Тангенс и котангенс (2 ч)
§ 7. Тригонометрические функции числового аргумента (2 ч)
§ 8. Тригонометрические функции углового аргумента (1 ч)
§ 9. Формулы приведения (2 ч)
§ 10. Функция $y = \sin x$, ее свойства и график (2 ч)
§ 11. Функция $y = \cos x$, ее свойства и график (2 ч)
§ 12. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ (1 ч)
§ 13. Преобразования графиков тригонометрических функций (2 ч)
§ 14. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$, их свойства и графики (2 ч)
Контрольная работа № 2 (1 ч)

Глава 3. Тригонометрические уравнения (9 ч)

§ 15. Арккосинус. Решение уравнения $\cos t = a$ (2 ч)
§ 16. Арксинус. Решение уравнения $\sin t = a$ (2 ч)
§ 17. Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\mathrm{tg}\, t = a$, $\mathrm{ctg}\, t = a$ (1 ч)
§ 18. Тригонометрические уравнения (3 ч)
Контрольная работа № 3 (1 ч)

Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (11 ч)

§ 19. Синус и косинус суммы и разности аргументов (2 ч)
§ 20. Тангенс суммы и разности аргументов (1 ч)
§ 21. Формулы двойного аргумента (2 ч)
§ 22. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение (3 ч)
§ 23. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы (2 ч)

2-е ПОЛУГОДИЕ (34 ч)

Глава 4. Преобразование тригонометрических выражений (обобщение)

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Глава 5. Производная (28 ч)

§ 24. Числовые последовательности и их свойства. Предел последовательности (1 ч)

§ 25. Сумма бесконечной геометрической прогрессии (1 ч)

§ 26. Предел функции (3 ч)

§ 27. Определение производной (3 ч)

§ 28. Вычисление производных (3 ч)

§ 29. Уравнение касательной к графику функции (2 ч)

§ 30. Применение производной для исследований функций на монотонность и экстремумы (3 ч)

§ 31. Построение графиков функций (3 ч)

§ 32. Применение производной для отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке (2 ч)

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин (3 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Контрольная работа № 6 (2 ч)

Повторение (6 ч)

1-е полугодие

Глава 1
Числовые функции

Уроки 1–2. Определение числовой функции и способы ее задания

Цель: обсудить определение функции, способы ее задания.

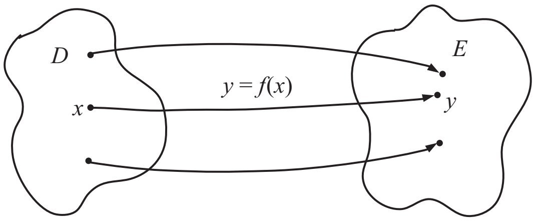
Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение материала 9 класса

Различные аспекты этой темы уже рассматривались в 7–9 классах. Теперь необходимо расширить и обобщить сведения о функциях. Напомним, что тема является одной из *важнейших* для всего курса математики. Различные функции будут изучаться вплоть до окончания школы и далее в высших учебных заведениях. Данная тема вплотную связана с решением уравнений, неравенств, текстовыми задачами, прогрессиями и т. д.

Определение 1. Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f, по которому *каждому числу* $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in E$ (см. рисунок). Тогда говорят, что задана *функция* $y = f(x)$ *или* $y(x)$ *с областью определения (О.О.)* D *и областью изменения (О.И.)* E. При этом величину x называют *независимой переменной* (или *аргументом* функции), величину y – *зависимой переменной* (или *значением* функции).



Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$ (область значений функции f), обозначают $E(f)$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-2} + 3$. Для нахождения y для каждого значения x необходимо выполнить следующие операции: из величины x вычесть число 2 ($x - 2$), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$) и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). *Совокупность этих операций* (или закон, по которому для каждого значения x ищется величина y) и *называется функцией* $y(x)$. Например, для $x = 6$ находим $y(6)=\sqrt{6-2}+3=\sqrt{4}+3=$ $=2+3=5.$ Таким образом, для вычисления функции y в данной точке x *необходимо подставить эту величину x в данную функцию $y(x)$*.

Очевидно, что для данной функции *для любого* допустимого числа x можно найти только *одно* значение y (т. е. каждому значению x соответствует *одно* значение y).

Рассмотрим теперь область определения и область изменения этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения ($x - 2$) можно, только если эта величина неотрицательная, т. е. $x - 2 \geq 0$ или $x \geq 2$. Находим $D(y) = [2; +\infty)$. Так как по определению арифметического корня $0\leq\sqrt{x-2}<+\infty,$ то прибавим ко всем частям этого неравенства число 3, получим: $3\leq\sqrt{x-2}+3<+\infty$ или $3 \leq y < +\infty$. Находим $E(y) = [3; +\infty)$.

В математике часто используются *рациональные функции*. При этом *функции вида $f(x) = p(x)$* (где $p(x)$ – многочлен) называют *целыми рациональными функциями*. *Функции вида* $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены) называют *дробно-рациональными функциями*. Очевидно, дробь $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ определена, если знаменатель $q(x)$ не обращается в нуль. Поэтому область определения дробно-рациональной функции $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ – множество всех действительных чисел, из которого исключены корни многочлена $q(x)$.

Пример 2

Рациональная функция $f(x)=3+\dfrac{1}{x-2}$ определена при $x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$. Поэтому область определения данной функции – множество всех не равных 2 действительных чисел, т. е. объединение интервалов $(-\infty; 2)$ и $(2; \infty)$.

Напомним, что *объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Объединение множеств A и B обозначается символом $A\cup B$. Так, объединением отрезков [1; 5] и (3; 9) является промежуток [1; 9). Объединение промежутков [1; 2) и [3; 4] (непересекающиеся промежутки) обозначают $[1;\ 2)\bigcup[3;\ 4]$.

Возвращаясь к примеру, можно записать: $D(f)=(-\infty;\ 2)\bigcup(2;\ \infty)$.

Так как при всех допустимых значениях x дробь $\dfrac{1}{x-2}$ не обращается в нуль, то функция $f(x)$ принимает все значения, кроме 3. Поэтому $E(f)=(-\infty;\ 3)\bigcup(3;\ \infty)$.

Пример 3

Найдем область определения дробно-рациональной функции $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3x+4}{(x-1)(x+3)}$.

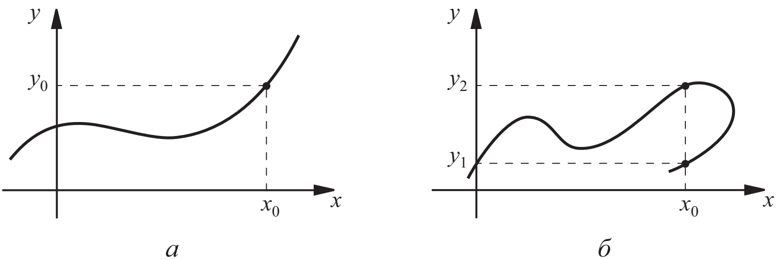
Знаменатели дробей обращаются в нуль при $x = 2$, $x = 1$ и $x = -3$. Поэтому область определения данной функции $D(f)=(-\infty;\ -3)\bigcup(-3;\ 1)\bigcup(1;\ 2)\bigcup(2;\ \infty)$.

Пример 4

Зависимость $y(x)=\begin{cases}2x-3,\\ x^2+1\end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение y, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем: $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим: $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению x ($x = 1$) соответствуют два значения y ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 5

Приведены графики двух зависимостей $y(x)$. Определим, какая из них является функцией.



а *б*

На рис. *а* приведен график функции, так как любой точке x_0 соответствует только одно значение y_0. На рис. *б* приведен график какой-то зависимости (но не функции), так как существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, y_1 и y_2).

Рассмотрим теперь *основные способы задания* функций.

1) ***Аналитический*** (с помощью формулы или формул).

Пример 6

Рассмотрим функции: а) $y = x^2 + 3\sqrt{x}$; б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задает функцию. Для любого значения x легко найти величину y. Например, для $x = -0{,}37$ (так как $x < 0$, то пользуясь верхним выражением), получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \frac{2}{3}$ (так как $x > 0$, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Из способа нахождения y понятно, что любой величине x отвечает только одно значение y.

в) $3x + y = 2y - x^2$. Выразим из этого соотношения величину y: $3x + x^2 = 2y - y$ или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задает функцию $y = x^2 + 3x$.

2) ***Табличный***

Пример 7

Выпишем таблицу квадратов y для чисел x.

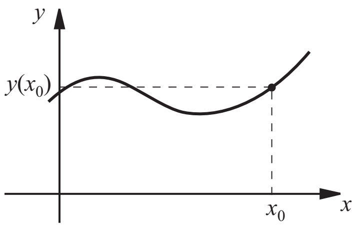
x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Данные таблицы также задают функцию – для каждого (приведенного в таблице) значения x можно найти единственное значение y. Например, $y(1{,}5) = 2{,}25$, $y(5) = 25$ и т. д.

3) ***Графический***

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости $y(x)$ удобно пользоваться *специальным рисунком – графиком* функции.

Определение 2. *Графиком функции* $y(x)$ называют *множество* всех *точек* системы координат, *абсциссы* которых равны значениям *независимой переменной* x, а *ординаты* – соответствующим значениям *зависимой переменной* y.



В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые *удовлетворяют* функциональной зависимости $y(x)$, *расположены* на графике функции. Любые другие пары точек, *не удовлетворяющие* зависимости $y(x)$, на графике функции *не лежат*.

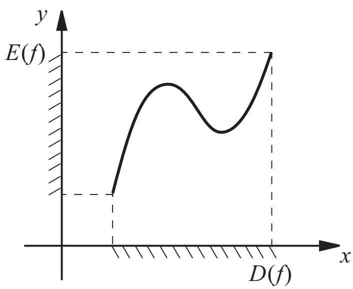
Пример 8

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) (−2; −6); б) (−3; −10)?

1. Найдем значение функции y при $x = -2$: $y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot |-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка A (−2; −6) *принадлежит* графику данной функции.

2. Определим значение функции y при $x = -3$: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot |-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка B (−3; −10) *не принадлежит* графику этой функции.

По данному графику функции $y = f(x)$ легко найти область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ функции. Для этого точки графика проецируют на оси координат. Тогда абсциссы этих точек образуют область определения $D(f)$, ординаты – область значений $E(f)$.



Сравним различные способы задания функции. *Наиболее полным* следует считать аналитический способ. Он позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем *табличный* способ позволяет *быстро* *и легко найти значение функции* для некоторых значений аргумента. *График* функции *наглядно показывает ее поведение.* Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

Будем считать основным аналитический способ задания функции и рассмотрим еще несколько задач.

Пример 9

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Найдем: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x + 1)$.

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2 \cdot (-3x)^2 - 3 \cdot (-3x) + 1 = 18x^2 + 9x + 1$;

в) $y(x + 1) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3\,(x + 1) + 1 = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 + 1 =$ $= 2x^2 + x$.

Пример 10

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найдем: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим: $y(3 - (3 - z)) = 2 \cdot (3 - z)^2 - 4$, или $y(z) = 2 \cdot (3 - z)^2 - 4$, или $y(z) = 2 \cdot (9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2x^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции – z, x, t или любой другой, то сразу получим: $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$;

б) Теперь легко найти $y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 8 + 24 +$ $+ 14 = 46$.

Пример 11

Известно, что $2y(x - 2) + 3y(2 - x) = x^2 + 2x + \dfrac{1}{x + 1}$. Найдем $x(y)$.

Обозначим буквой $z = x - 2$, тогда $x = z + 2$, и запишем условие задачи: $2y(z) + 3y(-z) = (z + 2)^2 + 2(z + 2) + \dfrac{1}{z + 3}$ или $2y(x) + 3y(-z) =$ $= z^2 + 6z + 8 + \dfrac{1}{z + 3}$. То же условие запишем для аргумента $(-z)$: $2y(-z) + 3y(z) = z^2 - 6z + 8 + \dfrac{1}{-z + 3}$. Для удобства введем новые переменные $a = y(z)$ и $b = y(-z)$. Для таких переменных получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2a+3b = z^2+6+8+\dfrac{1}{z+3}, \\ 3a+2b = z^2-6z+8-\dfrac{1}{z-3}. \end{cases}$ Нас интересует неизвестная a.

Для ее нахождения используем способ алгебраического сложения. Поэтому умножим первое уравнение на число (–2), второе уравнение – на число 3. Получим: $\begin{cases} -4a-6b = -2z^2-12z-16-\dfrac{2}{z+3}, \\ 9a+6b = 3z^2-18z+24-\dfrac{3}{z-3}. \end{cases}$ Сложим эти уравнения: $5a = z^2-30z+8-\dfrac{2}{z+3}-\dfrac{3}{z-3}$, откуда $a = \dfrac{1}{5}z^2 - 6z+\dfrac{8}{5}-\dfrac{2}{5(z+3)}-\dfrac{3}{5(z-3)} = y(z)$. Так как аргумент функции можно обозначать любой буквой, то имеем: $y(x) = \dfrac{1}{5}x^2-6x+\dfrac{8}{5}-\dfrac{2}{5(x+3)}-\dfrac{3}{5(x-3)}$.

В заключение заметим, что к концу 9 класса были изучены *свойства и графики*:

а) линейной функции $y = kx+m$ (график – прямая линия);

б) квадратичной функции $y = ax^2+bx+c$ (график – парабола);

в) дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (график – гипербола), в частности функции $y = \dfrac{k}{x}$;

г) степенной функции $y = x^{\alpha}$ (в частности, функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$);

д) функции $y = |x|$.

Для дальнейшего изучения материала рекомендуем повторить свойства и графики указанных функций. На следующих занятиях будут рассмотрены основные способы преобразования графиков.

III. Контрольные вопросы

1. Дайте определение числовой функции.

2. Расскажите о способах задания функции.

3. Что называется объединением множеств A и B?

4. Какие функции называются целыми рациональными?

5. Какие функции называются дробно-рациональными? Как находится область определения таких функций?

6. Что называют графиком функции $f(x)$?

7. Приведите свойства и графики основных функций.

IV. Задание на уроках

§ 1, № 1 (а, г); 2 (в, г); 3 (а, б); 4 (в, г); 5 (а, б); 6 (в); 7 (а, б); 8 (в, г); 10 (а); 13 (в, г); 16 (а, б); 18.

V. Задание на дом

§ 1, № 1 (б, в); 2 (а, б); 3 (в, г); 4 (а, б); 5 (в, г); 6 (г); 7 (в, г); 8 (а, б); 10 (б); 13 (а, б); 16 (в, г); 19.

VI. Творческие задания

1. Найдите функцию $y = f(x)$, если:

а) $f(x-2) = 3x + 5$;

б) $f(3-2x) = 4x - 1$;

в) $f(2x+1) = x^2 - 3x$;

г) $f(1-3x) = 6x^2 + 2x$;

д) $f(1-4x) = |x-2|$;

е) $f(3-2x) = |4-x|$;

ж) $f(2-x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$;

з) $f(1-2x) = \dfrac{2x+3}{3-x}$;

и) $f(x+3) = 2\sqrt{4-x}$;

к) $f(2-x) = 3\sqrt{x+5}$.

Ответы: а) $f(x) = 3x + 11$; б) $f(x) = 5 - 2x$; в) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x + 2$; г) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{14}{3}x + \dfrac{8}{3}$; д) $f(x) = \dfrac{1}{4}|x-9|$; е) $f(x) = \dfrac{1}{2}|x+5|$; ж) $f(x) = \dfrac{3x-7}{2x-1}$; з) $f(x) = \dfrac{2(4-x)}{x+5}$; и) $f(x) = 2\sqrt{7-x}$; к) $f(x) = 3\sqrt{7-x}$.

2. Найдите функцию $y = f(x)$, если:

а) $3f(x) - 2f(-x) = 3x^2 - 5x$;

б) $2f(x-3) + 5f(3-x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$;

в) $4f(2x-1) - 3f(1-2x) = 4x^2 - 2x + 3$;

г) $3f(3x-2) + 2f(2-3x) = \dfrac{5x+2}{2x+5}$;

д) $3f(x) - 4f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x^2 + 3x$;

е) $2f(x-3)+5f\left(\frac{1}{x-3}\right)=\frac{2x-1}{x+2}$.

Ответы: а) $f(x)=3x^2-x$; б) $f(x)=\frac{5}{21}\cdot\frac{2x-7}{x-8}-\frac{2}{21}\cdot\frac{2x+7}{x+8}$; в) $f(x)=x^2+\frac{1}{7}x+3$; г) $f(x)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5x+16}{2x+17}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5x-16}{2x-17}$; д) $f(x)=-\frac{6}{7}x^2-\frac{9}{7}x-\frac{8}{7x^2}-\frac{12}{7x}$; е) $f(x)=\frac{5}{21}\cdot\frac{5x+2}{5x+1}-\frac{2}{21}\cdot\frac{2x+5}{x+5}$.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 3–4. Преобразование графиков (факультативное занятие)

Цель: освоить основные способы преобразования графиков.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).

2. Контроль усвоения материала (самостоятельная работа).

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{7}{x+2}-\frac{6x+5}{x^2-6x+8}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{5-x}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f)=[-3; 4]$; $E(f)=[-2; 3]$; $f(0)=2$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\frac{3}{x+4}-\frac{5x-1}{x^2-4x+3}$;

б) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x+2}$.

2. Начертите график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой $D(f)=[-2; 5]$; $E(f)=[-3; 4]$; $f(0)=3$.