

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
Аксиомы стереометрии и некоторые следствия из них	8
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ	27
Параллельные прямые в пространстве.....	27
Параллельность прямой и плоскости	30
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ.	
УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ	34
Скрещивающиеся прямые	34
Угол между прямыми	38
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ	42
Параллельные плоскости.....	42
Свойства параллельных плоскостей	43
Тетраэдр и параллелепипед.....	47
Задачи на построение сечений.....	49
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ.....	79
Перпендикулярные прямые в пространстве	79
Расстояние от точки до плоскости	85
Теорема о трёх перпендикулярах	89
Угол между прямой и плоскостью	91
Двугранный угол	94
Признак перпендикулярности двух плоскостей	96
Прямоугольный параллелепипед	98
МНОГОГРАННИКИ	101
Призма	101
Пирамида	113
Правильная пирамида	114
ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР	123
Цилиндр	123
Конус.....	128
Сфера и шар	133
Объёмы	137
ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ	146
Понятие вектора в пространстве	146
Компланарные векторы	148
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ	152
Координаты точки	152
Координаты вектора	154
Простейшие задачи в координатах	156
Скалярное произведение векторов	158
ОТВЕТЫ.....	161

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 10-х и 11-х классах школьники знакомятся со стереометрией. Это раздел геометрии, который изучает фигуры в трёхмерном пространстве, в том числе их свойства, измерения, а также взаимное расположение. Стереометрия помогает учащимся лучше понять окружающий их мир, развивает важные навыки, необходимые для повседневной жизни и дальнейшего обучения по целому ряду профессий, связанных с архитектурой, инженерией, дизайном, строительством. Знания об объёмах и площадях различных фигур помогают, например, при планировании ремонта, покупки мебели или организации пространства. Однако, изучение стереометрии невозможно без развития пространственного мышления. Многие учащиеся испытывают трудности в визуализации фигур в пространстве и понимании их форм и размеров. Это может приводить к ошибкам при выполнении заданий и построении чертежей.

Предлагаемое пособие поможет старшеклассникам научиться представлять и описывать объемные фигуры, применять теорию при решении задач и строить сечения. С этой целью предлагается большое количество однотипных заданий, поиск ответов на многочисленные вопросы по заданной теме. Этот уникальный сборник станет для десятиклассников и одиннадцатиклассников настоящим помощником.

В тетради-тренажёре собраны примеры из личной практики автора, систематизированные в таблицы. Перед каждой из них сформулировано задание, которое предлагается выполнить учащемуся, а примеры расположены по принципу от простого к сложному. Чтобы достичь наилучшего результата, важно выполнять их последовательно.

Буквы А, Б, В в некоторых номерах означают разноуровневые задания, объединённые общим вопросом, но каждое из них целесообразно проработать отдельно. Решения можно выполнять непосредственно в пособии. К заданиям приведены необходимые теоретические сведения «Важно знать». В тексте они отмечены знаком .

Образцы решения некоторых задач выделены затемнённым фоном. Каждый пункт заканчивается заданием «Проверьте себя», с помощью которого можно проверить степень усвоения необходимого теоретического материала и уровень подготовки к решению базовых задач по теме. В конце пособия к наиболее сложным заданиям даны ответы.

Тетрадь-тренажёр поможет:

УЧАЩИМСЯ 10–11 классов успешно усвоить новые темы, закрепить навыки, необходимые для учёбы и для подготовки и сдачи ЕГЭ как базового, так и профильного уровней.

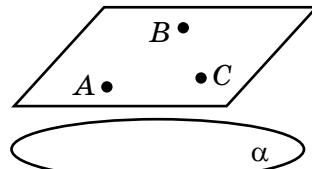
РОДИТЕЛЯМ оказать поддержку детям в закреплении школьного материала.

УЧИТЕЛЯМ проверить степень усвоения материала, выявить пробелы в знаниях и организовать индивидуальную работу с учащимися.

РЕПЕТИТОРАМ сформировать у школьников прочные навыки в выполнении различных видов заданий, основательно отработать с ними сложные моменты в отдельных темах, а также устранить пробелы в знаниях с максимальной эффективностью.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ЗНАКИ И СИМВОЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПОСОБИИ¹

точка	прямая	плоскость
$A, B, C \dots$	AB, BA, a	$ABC, ACB, CBA, BCA, CAB, BAC, \alpha$
$\bullet A$		

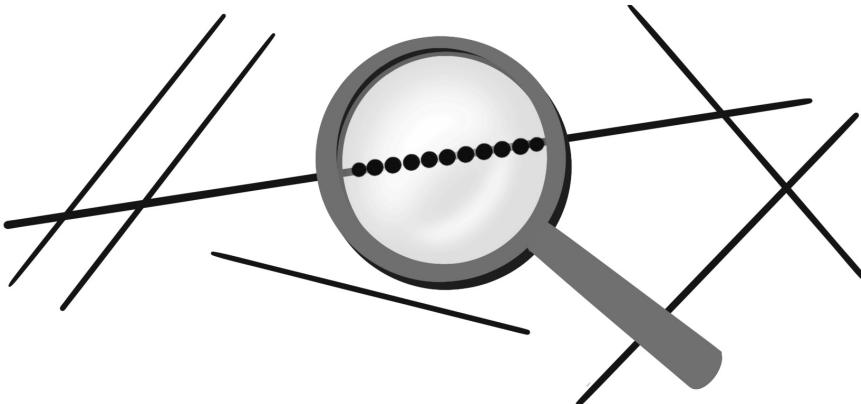
знак/ символ	значение	запись	прочтение
\cap	пересечение	$a \cap b$	Пересечение прямых a и b
		$a \cap \beta$	Пересечение прямой a и плоскости β
		$\alpha \cap \beta$	Пересечение плоскостей α и β
		$a \cap b = A$	Прямая a пересекает прямую b в точке A
		$a \cap \beta = B$	Прямая a пересекает плоскость β в точке B
		$\alpha \cap \beta = a$	Плоскость α пересекает плоскость β по прямой a
\in	принадлежит	$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a
		$A \in \alpha$	Точка A принадлежит плоскости α
\notin	не принадлежит	$B \notin a$	Точка B не принадлежит прямой a
		$B \notin \alpha$	Точка B не принадлежит плоскости α
\subset	лежит	$a \subset \beta$	Прямая a лежит в плоскости β
$\not\subset$	не лежит	$b \not\subset \beta$	Прямая b не лежит в плоскости β
\parallel	параллельно	$a \parallel b$	Прямая a параллельна прямой b
		$a \parallel \beta$	Прямая a параллельна плоскости β
		$\alpha \parallel \beta$	Плоскость α параллельна плоскости β
\perp	перпендикулярно	$a \perp b$	Прямая a перпендикулярна прямой b
		$a \perp \beta$	Прямая a перпендикулярна плоскости β
		$\alpha \perp \beta$	Плоскость α перпендикулярна плоскости β
\smile	скрещиваются	$a \smile b$	Прямые a и b скрещивающиеся

¹ В этом и других пособиях по математике встречаются такие обозначения фигур: $[AB]$ – отрезок AB , (AB) – луч AB , (AB) – прямая AB , (ABC) – плоскость ABC .

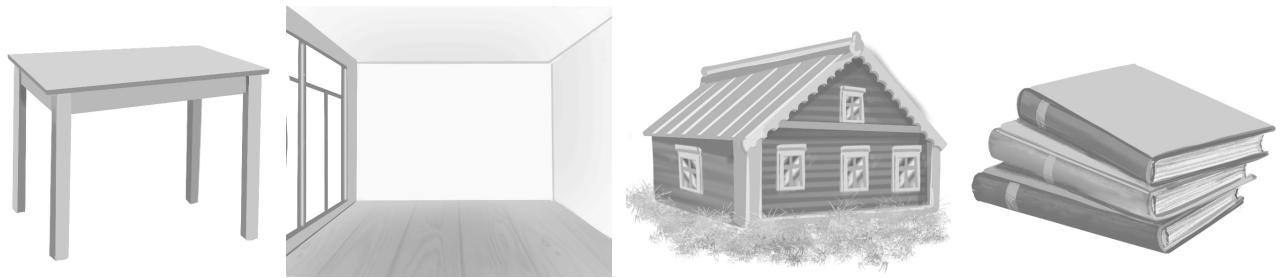
ВВЕДЕНИЕ

Стереометрия – это раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве.

Простейшими фигурами в пространстве, как и на плоскости, являются точки. Все более сложные фигуры состоят из точек.



Основные фигуры в пространстве – точка, прямая, плоскость.



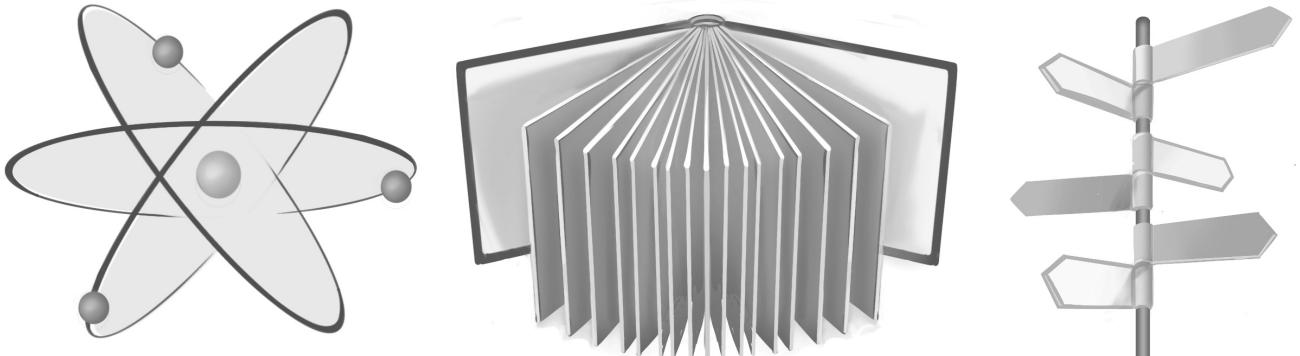
В пространстве бесконечно много плоскостей. Плоскость неограниченно простирается во все стороны. Её можно сравнить с огромным стеклом, краёв которого не видно. Но можно представить себе часть плоскости, посмотрев на поверхность стола, стену, потолок, крышу дома, обложку книги и т.д.

Через одну точку в пространстве можно провести бесконечно много плоскостей.

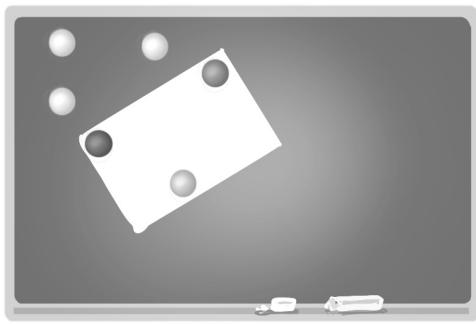
Электроны вращаются вокруг ядра атома по орбитам, которые лежат в разных плоскостях. Но само ядро лежит в каждой из этих плоскостей.

Через две точки пространства также проходит бесконечно много плоскостей.

Как известно, через две точки проходит только одна прямая. Страницы книги и дорожный указатель иллюстрируют плоскости, которые проходят через одну прямую (переплёт книги, столб), то есть через две точки пространства.

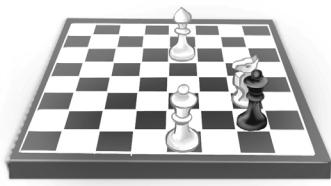


Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.



А если точек больше трёх? Сколько плоскостей можно провести, например, через четыре точки, не лежащие на одной прямой?

Можно провести одну плоскость:



– стул опирается на плоскость пола четырьмя ножками,

– четыре фигуры стоят в плоскости шахматной доски,

– четыре зацепа в плоскости стены на складороме и т.п...

...или ни одной плоскости нельзя провести:

– только три ножки стула в плоскости пола, поэтому такой стул будет качаться,

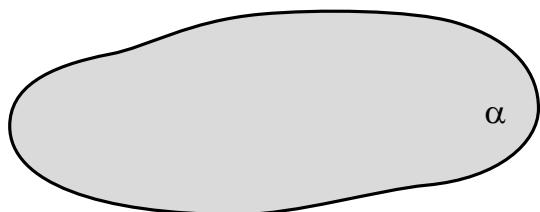
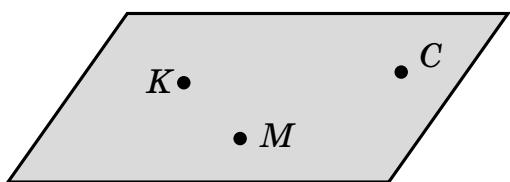
– на поверхность (плоскость) сцены опирается танцовщик двумя ногами, балерина только одной ногой,

– только три копыта коня в плоскости манежа.



Значит, через четыре и более точек, не лежащих на одной прямой, можно провести либо одну плоскость, либо ни одной.

Плоскость изображают чаще всего в виде параллелограмма или произвольной области.



Для построения плоскости необходимы три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для обозначения плоскости используют их названия в любом порядке. Например, плоскость CKM или KMC . Также для обозначения плоскостей используют буквы греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \pi$ и т.д.

Если на плоскости известно более трёх точек, то для её обозначения можно использовать название любых трёх точек, не лежащих на одной прямой.

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ



Важно знать:

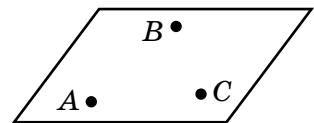
- Аксиома 1. Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

Например, пусть точки A , B и C не лежат на одной прямой, тогда

1) существует плоскость, проходящая через эти точки

(можно обозначить (ABC) или какой-нибудь буквой греческого алфавита);

2) плоскость ABC единственная.



Говорят, что точки A , B и C принадлежат плоскости ABC или плоскость ABC проходит через точки A , B и C . Пишут: $A \in (ABC)$, $B \in (ABC)$, $C \in (ABC)$.

Задание 1. Выполните задание.

А. Выберите верные обозначения плоскости, изображённой на рисунке.

1)		a) AB ; б) BCA ; в) CAB	4)		a) PQL ; б) TLQ ; в) LTP
2)		a) KMP ; б) PMK ; в) KP	5)		a) $A_1A_2A_3$; б) $A_1A_2A_4$; в) $A_5A_2A_3$
3)		a) αBD ; б) BCD ; в) α	6)		a) ABC ; б) ADB ; в) DBC

Б. Назовите плоскость, выделенную на рисунке.

1)		3)		5)	
	Плоскость _____		Плоскость _____		Плоскость _____
2)		4)		6)	
	Плоскость _____		Плоскость _____		Плоскость _____

Задание 2. Запишите с помощью математических знаков и символов.

1)	Точка A принадлежит плоскости α .	
2)	Точка K не принадлежит плоскости β .	
3)	Точка D принадлежит плоскости φ .	
4)	Точка P принадлежит плоскости β .	
5)	Точка E не принадлежит плоскости α .	
6)	Точка N принадлежит плоскости γ , а точка M не принадлежит плоскости γ .	
7)	Точка F принадлежит плоскости β , а точка Q не принадлежит плоскости β .	
8)	Точки A и B принадлежат плоскости α .	
9)	Точки S и O не принадлежат плоскости φ .	
10)	Точка A принадлежит плоскости CFL .	
11)	Точка M не принадлежит плоскости DEK .	

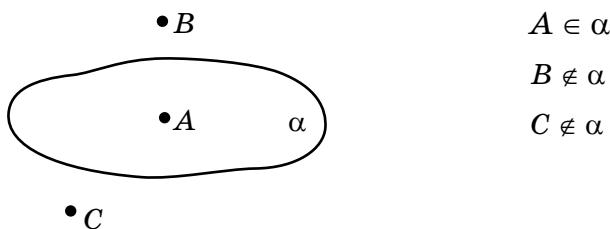


Важно знать:

Чтобы, глядя на рисунок, было понятно, что точка принадлежит плоскости, можно расположить её внутри области, изображающей плоскость.

Точку, не принадлежащую плоскости, можно расположить выше или ниже этой области.

Например,



Название плоскости (α) пишут внутри области, изображающей плоскость. Причём лучше располагать эту букву так, чтобы она не мешала видеть другие фигуры и буквы на том же рисунке.

Задание 3. Постройте чертёж, соответствующий данному условию.

1) Плоскость α .	3) Точка A принадлежит плоскости α .
2) Плоскость ABC .	4) Точка M не принадлежит плоскости β .

5) Точки B и C принадлежат плоскости α .

10) Точка K принадлежит плоскости β , а точки T и L лежат по разные стороны от плоскости β .

6) Точка M принадлежит плоскости β , а точка E не принадлежит плоскости β .

11) Плоскость γ проходит через точки A , B и C .

7) Точка A принадлежит плоскости φ , а точка T не принадлежит плоскости φ .

12) Плоскость ω проходит через точки P , L и Z .

8) Точки P и F принадлежат плоскости γ , а точка T не принадлежит плоскости γ .

13) Точки A , B и C в пространстве однозначно определяют положение плоскости, которая проходит через них.

9) Точка S принадлежит плоскости φ , а точки A и D лежат по разные стороны от плоскости φ .

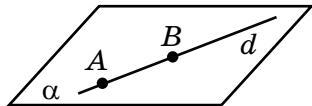
14) Точки A , B и C в пространстве не определяют однозначно положение плоскости, которая проходит через них.



Важно знать:

- Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

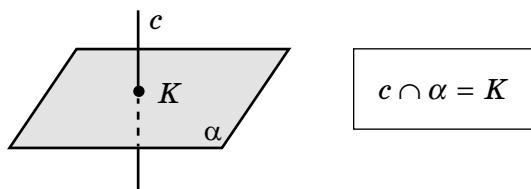
Например, точки A и B , принадлежащие прямой d , лежат в плоскости α . Тогда все точки прямой d (или прямой AB) принадлежат плоскости α .



$$\left. \begin{array}{l} A \in d, B \in d, \\ A \in \alpha, B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d \subset \alpha.$$

В этом случае говорят, что прямая AB (или прямая d) лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую AB . Пишут: $AB \subset \alpha$.

В стереометрии принято на рисунках видимую часть фигуры изображать сплошной линией, а невидимую – пунктирной линией.



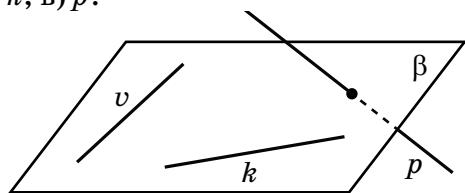
На рисунке изображена прямая c , которая имеет с плоскостью α только одну общую точку K .

И тогда говорят, что прямая c пересекает плоскость α в точке K .

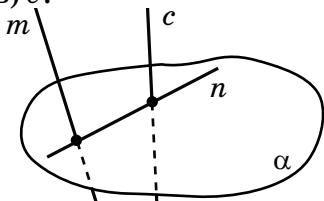
Пишут: $c \cap \alpha = K$.

Задание 4. Ответьте на вопрос.

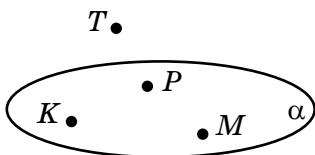
- 1) Какие прямые лежат в плоскости β :
а) v ; б) k ; в) p ?



- 2) Какие прямые не лежат в плоскости α :
а) n ; б) m ; в) c ?

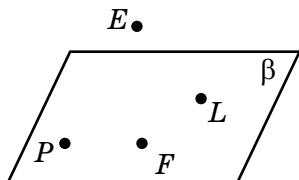


- 3) Какие прямые лежат в плоскости α , если $K \in \alpha$, $P \in \alpha$, $M \in \alpha$, $T \notin \alpha$:
а) KP ; б) KT ; в) MT ; г) MP ?

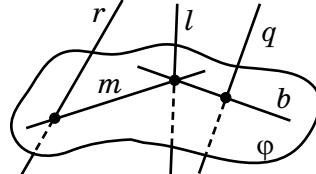


- 4) Какие прямые не лежат в плоскости β , если $F \in \beta$, $L \in \beta$, $P \in \beta$, $E \notin \beta$:

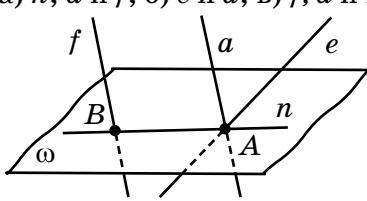
- а) PF ; б) EL ; в) FE ; г) FL ?



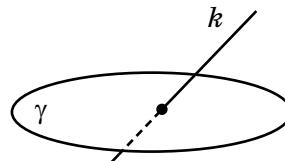
- 5) Какие прямые пересекают плоскость φ :
а) l, q и b ; б) r, l и m ; в) r, l и q ?



- 6) Какие прямые пересекают плоскость ω в точке A : а) n , a и f ; б) e и a ; в) f , a и n ?

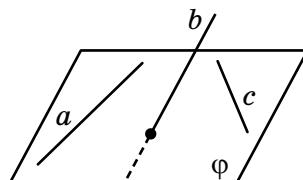


- 7) Верно ли, что плоскость γ проходит через прямую k ?



- 8) Через какие прямые проходит плоскость φ , если $a \subset \varphi$, $c \subset \varphi$, $b \cap \varphi$:

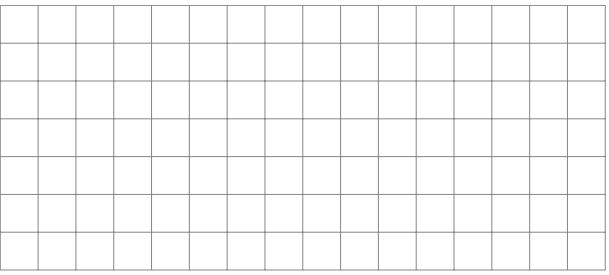
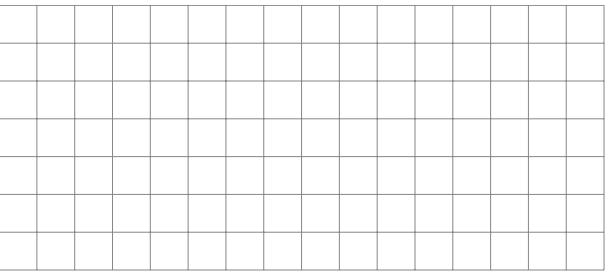
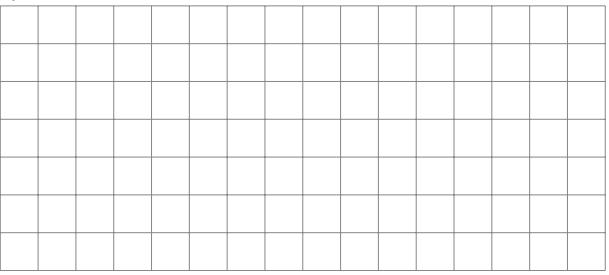
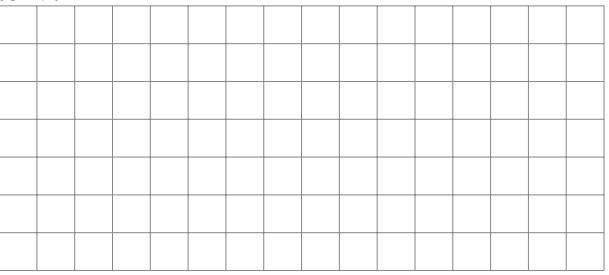
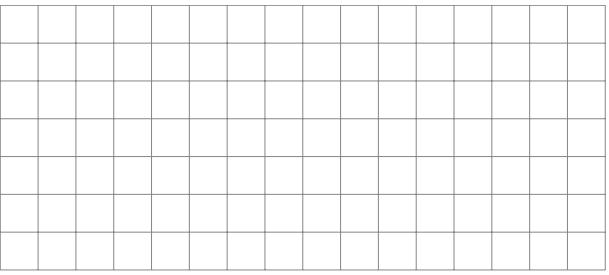
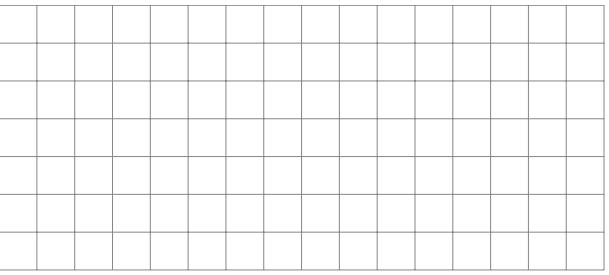
- а) a и b ; б) a и c ; в) c и b ?



Задание 5. Запишите с помощью математических знаков и символов.

1)	Прямая a лежит в плоскости α .	
2)	Прямая b не лежит в плоскости β .	
3)	Прямая k лежит в плоскости α , прямая b не лежит в плоскости α .	
4)	Прямые a и b лежат в плоскости φ .	
5)	Прямые n и q не лежат в плоскости β .	
6)	Точка D принадлежит прямой m , а прямая m лежит в плоскости γ .	
7)	Прямая l пересекает плоскость ω в точке A .	
8)	Прямая MP пересекает плоскость φ в точке M .	
9)	Прямая AC пересекает плоскость β в точке N .	
10)	Прямая a лежит в плоскости γ . Прямая m пересекает плоскость γ в точке P .	

Задание 6. Постройте чертёж, соответствующий данному условию.

1) Прямая a лежит в плоскости α .	4) Прямая l пересекает плоскость φ в точке T .
	
2) Прямая b пересекает плоскость γ в точке C .	5) Прямая AB пересекает плоскость φ в точке N .
	
3) Прямая n лежит в плоскости β .	6) Прямая QR пересекает плоскость γ в точке R .
	

<p>7) Прямая k принадлежит плоскости γ, а точка P не принадлежит плоскости γ.</p>	<p>12) Точка E – общая точка прямой n и плоскости φ.</p>
<p>8) Точка S принадлежит прямой k, которая лежит в плоскости α.</p>	<p>13) Прямая a лежит в плоскости β, а прямая t пересекает плоскость β и прямую a в точке T.</p>
<p>9) Точка C принадлежит плоскости γ, но не принадлежит прямой b, лежащей в плоскости γ.</p>	<p>14) Точка M и прямая b принадлежат плоскости β, причём точка M не принадлежит прямой b.</p>
<p>10) Точка A принадлежит прямой a, пересекающей плоскость φ, но не принадлежит плоскости φ.</p>	<p>15) Прямые AB и AC пересекают плоскость ω в точке A.</p>
<p>11) Точка B принадлежит плоскости β, но не принадлежит прямой m, пересекающей плоскость β.</p>	<p>16) Прямая PL лежит в плоскости β, а прямая KF пересекает плоскость β в точке P.</p>

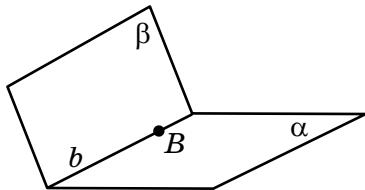


Важно знать:

- **Аксиома 3.**

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Например, если точка B принадлежит каждой из плоскостей α и β , то плоскости α и β пересекаются по такой прямой b , которой принадлежит точка B .



$$\left. \begin{array}{l} B \in \alpha, B \in \beta, \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} B \in b.$$

Задание 7. Используя данные рисунка, определите, каким плоскостям принадлежит точка A : а) α ; б) β ; в) α и β ; г) ни α , ни β ; д) нельзя определить.

1) Ответ: _____	4) Ответ: _____	7) Ответ: _____
2) Ответ: _____	5) Ответ: _____	8) Ответ: _____
3) Ответ: _____	6) Ответ: _____	9) Ответ: _____

Задание 8. Используя данные рисунка, закрасьте две какие-либо плоскости, которым принадлежит точка K .

1) _____	3) _____	5) _____	7) _____
2) _____	4) _____	6) _____	8) _____

Задание 9. Запишите с помощью математических знаков и символов.

1)	Плоскости α и β пересекаются по прямой l .	
2)	Плоскости γ и φ пересекаются по прямой a .	
3)	Плоскости β и ω пересекаются по прямой k .	
4)	Плоскости ABM и ACM пересекаются по прямой AM .	
5)	Плоскости KLT и DLT пересекаются по прямой LT .	
6)	Плоскости α и β пересекаются по прямой n , точка Q принадлежит прямой n .	
7)	Точка P принадлежит плоскостям φ и β .	
8)	Точка C – общая точка плоскостей α и ω .	
9)	Плоскости γ и α проходят через прямую b .	
10)	Плоскости α и φ проходят через прямую AB .	

Задание 10. Постройте чертёж, соответствующий данному условию.

1) Плоскости α и β пересекаются по прямой a .		4) Плоскости β и γ проходят через прямую PQ .	
2) Плоскости α и β пересекаются по прямой b .		5) Точка M принадлежит плоскостям α и β .	
3) Плоскости ABC и ABD пересекаются по прямой AB .		6) Точка K – общая точка плоскостей γ и ω .	

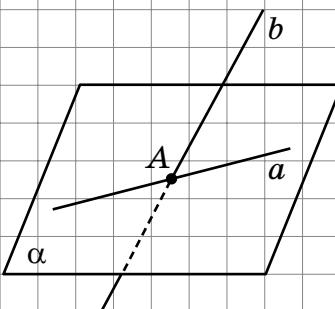
Задание 11. Запишите условие с помощью символов и изобразите соответствующий рисунок.

- 1) Прямая a лежит в плоскости α , прямая b пересекает плоскость α в точке A , принадлежащей прямой a .

$$a \subset \alpha,$$

$$b \cap \alpha = A,$$

$$A \in a.$$

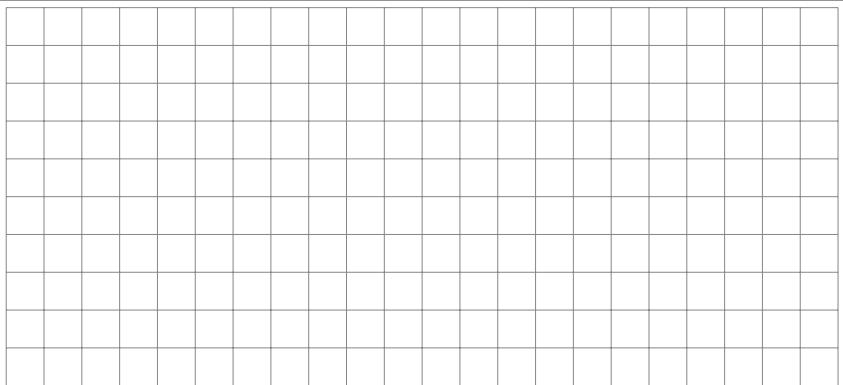
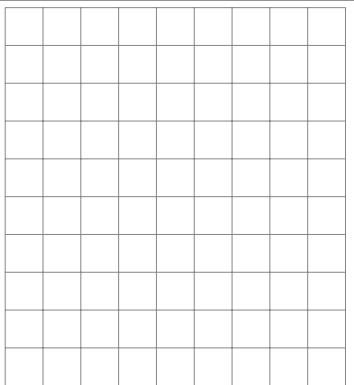


- 2) Прямая a лежит в плоскости α , прямая b пересекает плоскость α в точке A , не принадлежащей прямой a .

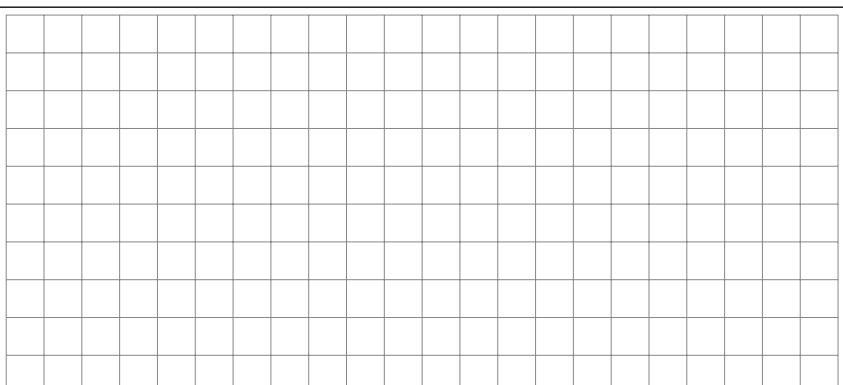
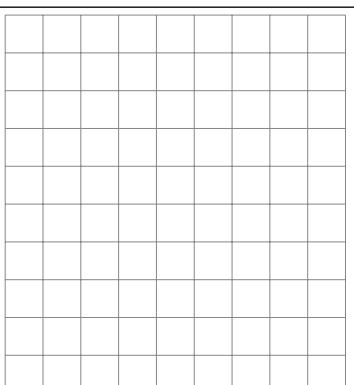
- 3) Прямые AB и AC пересекают плоскость α в точках B и C .

- 4) Прямые AB и AC пересекают плоскость α в точке A .

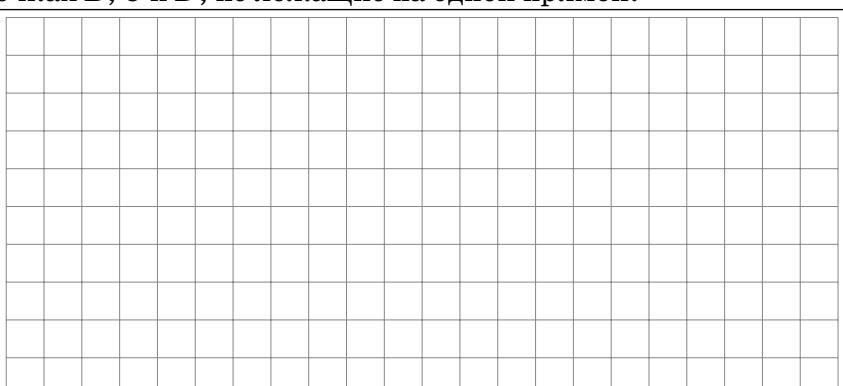
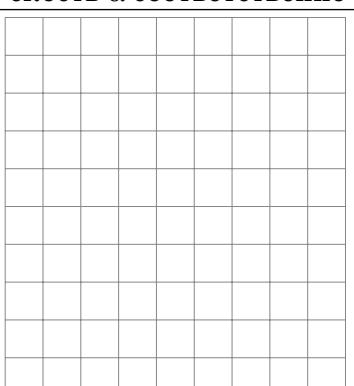
5) Прямые AB и CD не лежат в плоскости α , точки A и D принадлежат плоскости α .



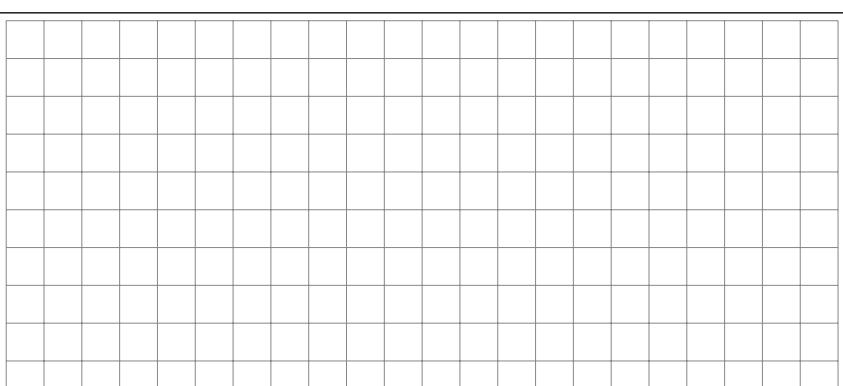
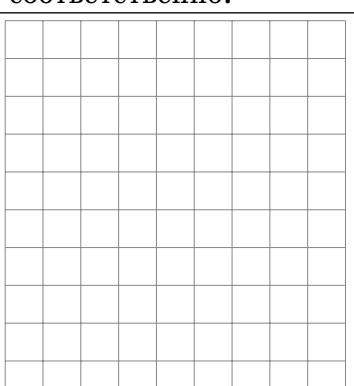
6) Вершины B и C треугольника ABC лежат в плоскости α , а вершина A не лежит в плоскости α .



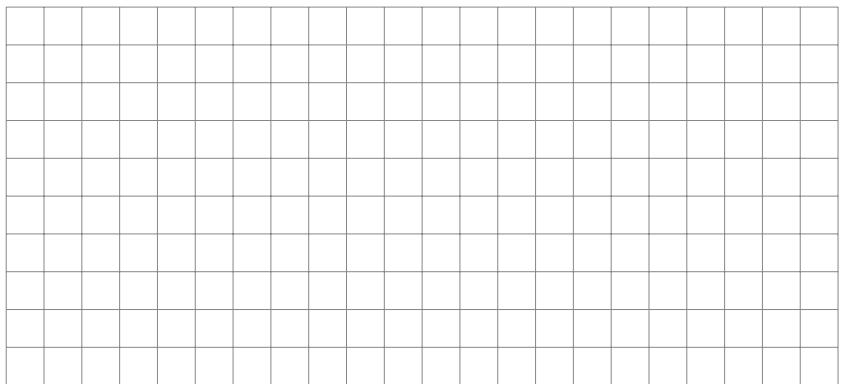
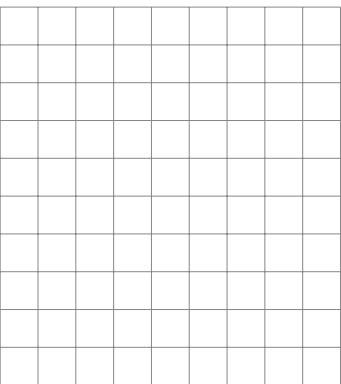
7) Из точки A , не лежащей в плоскости α , проведены лучи b , c и d , пересекающие плоскость α соответственно в точках B , C и D , не лежащие на одной прямой.



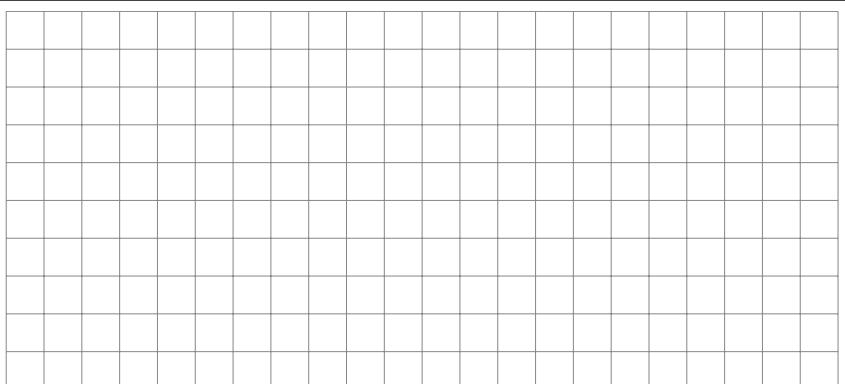
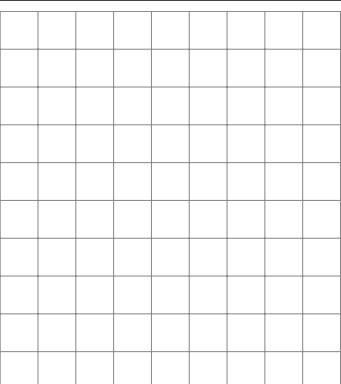
8) Из точки A , не лежащей в плоскости α , проведены три луча k , l и m , пересекающие плоскость α . Прямая b , не лежащая в плоскости α , пересекает эти лучи в точках K , L и M соответственно.



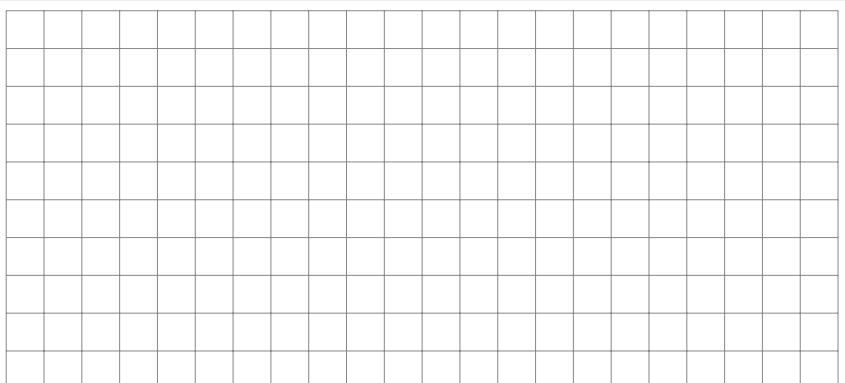
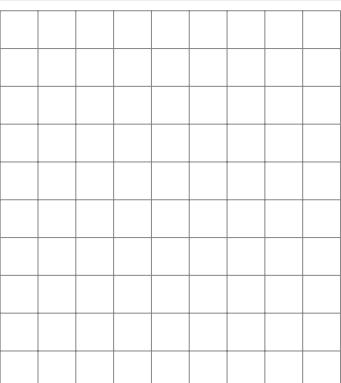
9) Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a , не лежащая ни в одной из плоскостей α и β , пересекает прямую c в точке M .



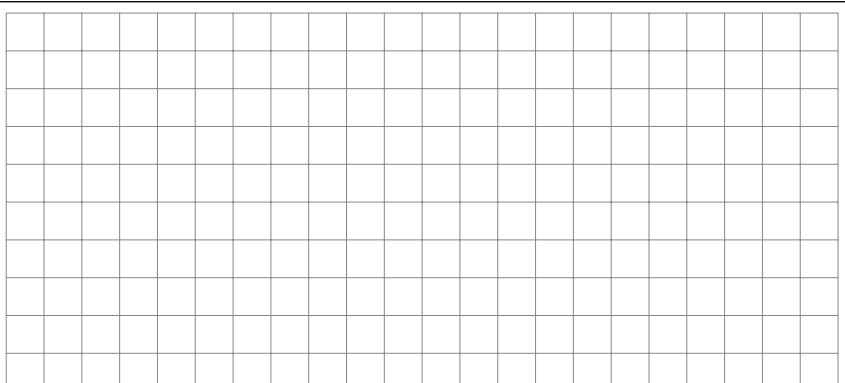
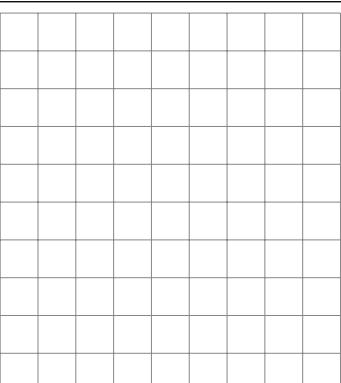
10) Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a , не лежащая в плоскостях α и β , пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно.



11) Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a , лежащая в плоскости α , пересекает прямую c в точке A .



12) Плоскости α и β пересекаются по прямой c . Прямая a , лежащая в плоскости α , пересекает плоскость β в точке K .



Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru