

Оглавление

1. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ОТКРЫТОГО ПОТОКА В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПРЯМЫМ УКЛОНОМ	5
1.1. Основные термины и определения	5
1.2. Расчет нормальных и критических глубин потока	6
1.3. Гидравлический прыжок	10
1.4. Расчет кривых свободной поверхности потока в призматическом трапецеидальном канале переменного уклона	17
2. СОПРЯГАЮЩИЕ СООРУЖЕНИЯ	34
2.1. Перепады	34
2.2. Быстротоки	51
Библиографический список	57

1. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕГОСЯ НЕРАВНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ОТКРЫТОГО ПОТОКА В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПРЯМЫМ УКЛОНОМ

1.1. Основные термины и определения

Движение жидкости под действием силы тяжести в открытых каналах и каналах со свободной поверхностью называется *безнапорным*.

Безнапорное течение может быть *неустановившимся*, когда скорости V и расход Q потока изменяются с течением времени, и *установившимся*, когда скорости и расход потока с течением времени остаются неизменными. В свою очередь, установившееся течение может быть *неравномерным*, если скорости V и глубины h открытого потока изменяются по длине l канала (или русла), и *равномерным*, если скорости и глубины открытого потока не изменяются по длине канала (русла).

Далее будем рассматривать установившееся неравномерное (плавно изменяющееся) течение в *призматическом* канале *трапецеидального поперечного сечения*. Термин «*призматический*» используется в гидравлике для обозначения каналов, *форма поперечного сечения* которых не изменяется по длине l . Форма поперечного сечения или *поперечный профиль* канала могут быть любыми. На практике наиболее распространенным является *трапецеидальный* профиль. Каналы подразделяют на: каналы с *прямым уклоном* i дна, с *горизонтальным дном* ($i = 0$) и с *обратным уклоном*. В каналах с прямым уклоном ($i > 0$) скат дна направлен *по ходу движения* открытого потока, с обратным уклоном ($i < 0$) — *против движения*. Подавляющее большинство каналов имеет прямой уклон дна. Схема неравномерного течения в таком канале показана на рис. 1.1, а, б.

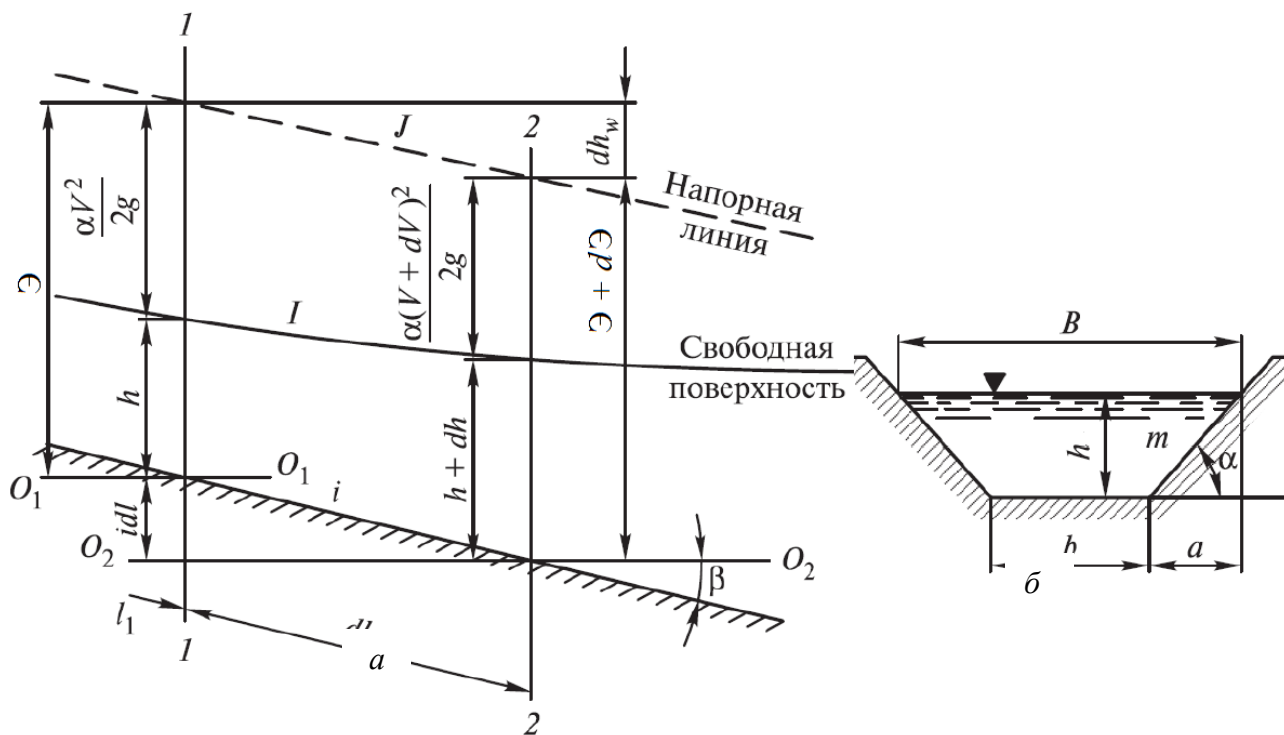


Рис. 1.1. Плавно изменяющееся течение в открытом канале:
 а — продольный профиль канала, б — поперечный профиль канала

На схеме кроме параметров, раскрытых выше по тексту, показаны: h_w — гидравлические потери; \mathfrak{E} — удельная энергия сечения:

$$\mathfrak{E} = h + \frac{\alpha V^2}{2g}.$$

I и J — пьезометрический и гидравлический уклоны:

$$I = -\frac{d}{dl}(z + h),$$

$$J = \frac{dh_w}{dl} = -\frac{d}{dl}\left(z + h + \frac{\alpha V^2}{2g}\right),$$

где g — ускорение силы тяжести; α — коэффициент Кориолиса (обычно принимается $\alpha = 1,1$); β — угол наклона дна канала к горизонту, $\beta = \arcsin(i)$.

На поперечном профиле (рис. 1.1, б) обозначены: b — ширина канала по дну; m — коэффициент откоса бортов канала, равный котангенсу угла наклона откоса к горизонту, $m = \operatorname{ctg}(\alpha) = a/h$; B — ширина канала по свободной поверхности (по урезу) воды, $B = b + 2mh$.

Согласно введенным обозначениям, площадь поперечного трапециoidalного сечения потока в канале составит:

$$\omega = (b + mh)h,$$

при этом его смоченный периметр (периметр поперечного сечения, исключая свободную поверхность потока) будет равен:

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}.$$

Задача расчета неравномерного течения открытого потока заключается в построении кривой его свободной поверхности вдоль канала заданной формы при заданном уклоне, т.е. в нахождении функции $h = f(l)$.

1.2. Расчет нормальных и критических глубин потока

Неравномерное течение обладает рядом характерных расчетных параметров, к которым относятся *нормальная* и *критическая* глубины. *Нормальной* называют такую глубину потока, при которой при заданном расходе Q в канале с заданными геометрическими параметрами (b, m) при заданном уклоне дна i имеет место равномерное течение. *Критической* называют глубину потока, при которой при заданном расходе Q в канале с заданными геометрическими параметрами (b, m) имеет место резкое на коротком участке канала изменение глубины потока.

Первым рассмотрим расчет *нормальной* глубины (глубины равномерного течения), ее обозначают с индексом 0: h_0 . С индексом 0 обозначают и все другие гидравлические или геометрические характеристики потока, функционально зависящие от его глубины.

Равномерное течение открытого водного потока, при котором его глубина остается постоянной по длине канала ($\partial h / \partial l = 0$), определяется *формулой Шези* [1]:

$$Q = V_0 \omega_0 = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i}, \quad (1.1)$$

где V_0 — скорость потока с равномерным течением (нормальная скорость);

$\omega_0 = (b + mh_0)h_0$ — площадь поперечного сечения равномерного потока в канале трапециoidalного поперечного профиля; $\chi_0 = b + 2h_0\sqrt{1 + m^2}$ — смоченный периметр; $R_0 = \frac{\omega_0}{\chi_0}$ —

гидравлический радиус; $C_0 = \frac{1}{n} R_0^{1/6}$ — коэффициент Шези; n — коэффициент шероховатости русла канала.

Из равенства (1.1) следуют два других:

– хорошо известное равенство:

$$\frac{nQ}{\sqrt{i}} = \frac{\omega_0^{5/3}}{\chi_0^{2/3}};$$

– равенство, тождественное ему, но более полезное в дальнейшем:

$$h_0 = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{0,6} \frac{\left(1 + 2 \frac{h_0}{b} \sqrt{1 + m^2} \right)^{0,4}}{1 + m \frac{h_0}{b}} = h_{01} \frac{\left(1 + 2 \frac{h_0}{b} \sqrt{1 + m^2} \right)^{0,4}}{1 + m \frac{h_0}{b}}, \quad (1.2)$$

где h_{01} — нормальная глубина потока в канале или русле, в которых ширина по дну много больше их глубины $b \gg h_0$ [2]:

$$h_{01} = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{0,6}.$$

Можно видеть, что решение равенства (1.2) получить прямым счетом не представляется возможным, ибо искомая величина h_0 стоит как в левой, так и в правой его частях. В этих случаях используется метод итераций.

Метод итераций

Методом итераций является поиск решения h_0 в процессе выполнения ряда последовательных численных приближений. Другими словами, итерации — это постепенное приближение к точному решению. Поэтому, чем больше итераций мы выполним, тем более точное решение в результате получим. Рассмотрим метод итераций на конкретном примере.

Задача 1.1. Заданы: шероховатость канала $n = 0,025$; расход потока $Q = 4,0$ м³/с; ширина канала по дну $b = 1,2$ м; коэффициент откосов канала $m = 1,5$; уклон дна канала $i = 0,0025$. Требуется определить нормальную глубину потока h_0 в канале заданного трапецеидального сечения.

Решение

$$1 \text{ итерация: } h_0 = h_{01} = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{0,6} = \left(\frac{0,025 \cdot 4,0}{1,2 \cdot \sqrt{0,0025}} \right)^{0,6} = 1,359 \text{ м.}$$

Полученная глубина соответствует нормальной глубине в гидравлически широком канале, когда $b \gg h_0$. Очевидно, это решение не может быть принято в качестве окончательного в нашем случае для канала, в котором условие $b \gg h_0$ не выполняется.

В следующем приближении в правой части формулы (1.2) заменим неизвестное h_0 его полученным в предыдущем приближении значением $h_0 = 1,359$ м. Аналогично мы будем поступать и в последующих итерациях.

$$2 \text{ итерация: } h_0 = h_{01} \frac{\left(1 + 2 \frac{h_0}{b} \sqrt{1 + m^2} \right)^{0,4}}{1 + m \frac{h_0}{b}} = 1,359 \frac{\left(1 + 2 \frac{1,359}{1,2} \sqrt{1 + 1,5^2} \right)^{0,4}}{1 + 1,5 \frac{1,359}{1,2}} = 0,9648 \text{ м,}$$

$$3 \text{ итерация: } h_0 = h_{01} \frac{\left(1 + 2 \frac{h_0}{b} \sqrt{1 + m^2} \right)^{0,4}}{1 + m \frac{h_0}{b}} = 1,359 \frac{\left(1 + 2 \frac{0,9648}{1,2} \sqrt{1 + 1,5^2} \right)^{0,4}}{1 + 1,5 \frac{0,9648}{1,2}} = 1,061 \text{ м,}$$

$$4 \text{ итерация: } h_0 = 1,359 \frac{\left(1 + 2 \frac{1,061}{1,2} \sqrt{1 + 1,5^2}\right)^{0,4}}{1 + 1,5 \frac{1,061}{1,2}} = 1,036 \text{ м,}$$

$$5 \text{ итерация: } h_0 = 1,359 \frac{\left(1 + 2 \frac{1,036}{1,2} \sqrt{1 + 1,5^2}\right)^{0,4}}{1 + 1,5 \frac{1,036}{1,2}} = 1,042 \text{ м.}$$

В конце расчетов производится оценка используемого метода *на сходимость*. Сходимость — это точность получаемых расчетных данных. В нашем случае было выполнено 5 итераций, каждая из которых приближала нас к точному результату. Оценим точность окончательно полученного результата. Для этого из результата последней более точной итерации вычтем результат предыдущей менее точной итерации, после чего полученное число (*невязку*) разделим на результат последней итерации и умножим на 100 %. Взяв окончательный результат по абсолютной величине, находим относительную невязку, характеризующую точность расчета:

$$\left| \frac{1,042 - 1,036}{1,042} \right| 100 \% = \left| 1 - \frac{1,036}{1,042} \right| 100 \% = \pm 0,576 \ %.$$

Такая процедура считается стандартной. Ее можно закрепить формулой для использования в дальнейшем. Например, пусть на итерации j получен результат расчета искомой функции A_j , а на предыдущей итерации получен результат расчета той же функции, равный A_{j-1} , тогда указанная процедура проверки на достаточность числа итераций будет иметь вид:

$$\left| \frac{A_j - A_{j-1}}{A_j} \right| 100 \% = \left| 1 - \frac{A_{j-1}}{A_j} \right| 100 \% \leq \pm 3 \ %. \quad (1.3)$$

Можно сказать, что полученная нами точность инженерного расчета, соответствующая 0,576 %, считается избыточно высокой. Допустимой точностью инженерных расчетов считается 3–5 %. Поэтому в равенстве (1.3) в правой части стоит инженерное ограничение 3 %. Иными словами, расчет можно было остановить раньше — на четвертой итерации без потери инженерной точности, но с определенной экономией времени счета.

Рассмотрим теперь определение *критической* глубины потока в канале трапецеидальной формы. Обозначим ее с индексом К: h_K . С индексом К обозначим и все другие гидравлические или геометрические характеристики потока, функционально связанные с глубиной h_K .

Условие, при котором глубина потока равна критической, определяется равенством [1]:

$$1 - \frac{\alpha Q^2 B_K}{g \omega_K^3} = 0, \quad (1.4)$$

где $\omega_K = (b + mh_K)h_K$ — площадь поперечного сечения потока с критической глубиной; $B_K = b + 2mh_K$ — ширина канала на свободной поверхности (по урезу) воды при критической глубине потока.

Анализ уравнения (1.4) позволяет записать очевидное равенство:

$$\frac{\omega_K^3}{B_K} = \frac{\alpha Q^2}{g},$$

которое может быть преобразовано для использования в классическом *численном методе итераций*:

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \frac{\sqrt[3]{1 + 2m \frac{h_K}{b}}}{1 + m \frac{h_K}{b}} = h_{K1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2m \frac{h_K}{b}}}{1 + m \frac{h_K}{b}},$$

здесь h_{K1} — критическая глубина в гидравлически широком канале, когда $b \gg h_K$, или в канале прямоугольного поперечного сечения с шириной, равной ширине трапецеидального канала по дну b ,

$$h_{K1} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}. \quad (1.5)$$

Поскольку сам метод итераций уже встречался ранее в предыдущем материале, перейдем к непосредственным вычислениям.

Задача 1.2. Пусть будут заданы такие же условия, как в задаче 1.1: расход потока $Q = 4,0 \text{ м}^3/\text{с}$; ширина канала по дну $b = 1,2 \text{ м}$; коэффициент откосов канала $m = 1,5$. Требуется определить критическую глубину потока h_K в заданном канале трапецеидального сечения.

Решение

$$1 \text{ итерация: } h_K = h_{K1} = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,1 \cdot 4,0^2}{9,81 \cdot 1,2^2}} = 1,076 \text{ м.}$$

$$2 \text{ итерация: } h_K = h_{K1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2m \frac{h_K}{b}}}{1 + m \frac{h_K}{b}} = 1,076 \frac{\sqrt[3]{1 + 2 \cdot 1,5 \frac{1,076}{1,2}}}{1 + 1,5 \frac{1,076}{1,2}} = 0,709 \text{ м.}$$

$$3 \text{ итерация: } h_K = h_{K1} \frac{\sqrt[3]{1 + 2m \frac{h_K}{b}}}{1 + m \frac{h_K}{b}} = 1,076 \frac{\sqrt[3]{1 + 2 \cdot 1,5 \frac{0,709}{1,2}}}{1 + 1,5 \frac{0,709}{1,2}} = 0,801 \text{ м.}$$

$$4 \text{ итерация: } h_K = 1,076 \frac{\sqrt[3]{1 + 2 \cdot 1,5 \frac{0,801}{1,2}}}{1 + 1,5 \frac{0,801}{1,2}} = 0,776 \text{ м.}$$

$$5 \text{ итерация: } h_K = 1,076 \frac{\sqrt[3]{1 + 2 \cdot 1,5 \frac{0,776}{1,2}}}{1 + 1,5 \frac{0,776}{1,2}} = 0,782 \text{ м.}$$

Проверка на погрешность расчета:

$$\left| \frac{0,782 - 0,776}{0,782} \right| 100 \% = \left| 1 - \frac{0,776}{0,782} \right| 100 \% = \pm 0,767 \ \%.$$

В данной ситуации выполнение 5 итераций оказалось целесообразным, так как на четвертой итерации погрешность составляла более 3 %.

1.3. Гидравлический прыжок

Гидравлическим прыжком называется резкий на коротком участке переход потока от глубин меньше критических к глубинам больше критических (рис. 1.2).

Переход потока из бурного в спокойное состояние, т.е. переход от малых глубин к большим через критическую глубину, может осуществляться только посредством гидравлического прыжка. Гидравлический прыжок является особой формой свободной поверхности жидкости, при которой функция $h = f(l)$ при критической глубине претерпевает разрыв, так как ее производная dh/dl обращается в бесконечность.

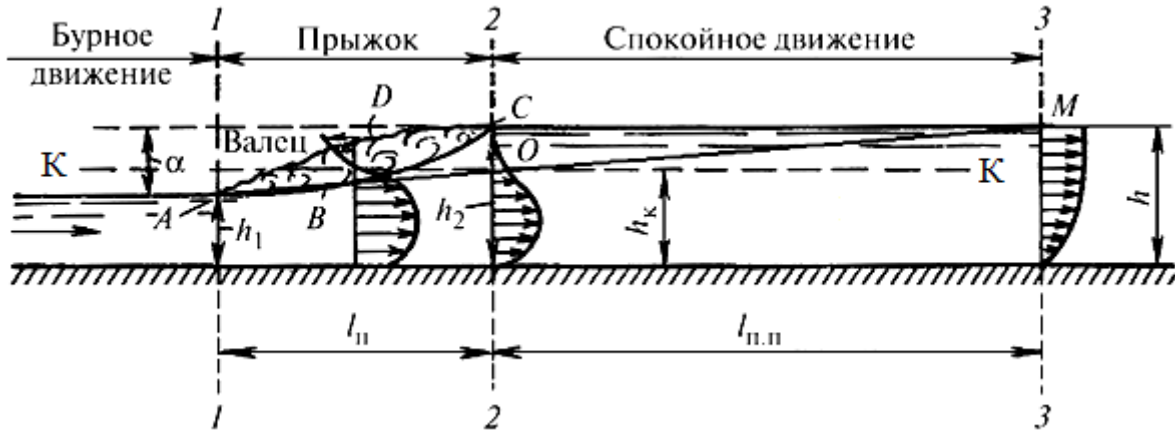


Рис. 1.2. Гидравлический прыжок

Рассматривая поле скоростей в области гидравлического прыжка, на рис. 1.2 можно заметить, что основное течение образует расширяющуюся в вертикальной плоскости струю, ее называют *транзитной*, а над ней находится *поверхностный валец*, по внешнему виду похожий на опрокинутую волну. Глубины h_1 и h_2 соответственно до и после прыжка называют *сопряженными*, а точку C — *точкой раздела*. Горизонтальная проекция вальца называется *длиной прыжка* $l_{п}$. Иногда длиной прыжка считают длину $l_{п} + l_{п.п}$ — расстояние от подошвы прыжка в створе 1-1 до створа 3-3, где эпюра скоростей приобретает характерный для безнапорного потока вид. Разность высот:

$$a = h_2 - h_1,$$

представляет собой *высоту прыжка*.

Причину образования прыжка можно видеть в невозможности для плавно изменяющегося потока увеличивать свою глубину сверх критической без подвода к нему извне некоторого дополнительного количества энергии. Как известно [2], удельная энергия сечения \mathcal{E} является функцией глубины и определяется формулой $\mathcal{E} = h + \alpha V^2 / 2g$ (см. выше). Эта функция имеет минимум при критической глубине потока. Поэтому, если бы поток изменял свою глубину вдоль горизонтального участка плавно по линии AOM так, как показано на рис. 1.2, то на участке от точки O (точка соответствует критической глубине h_k) до точки M удельная энергия потока нарастала бы, а это невозможно без подвода энергии извне. Поэтому переход через критическую глубину осуществляется в форме гидравлического прыжка с непрерывным убыванием энергии вследствие гидравлических потерь в самом прыжке, т.е. физически закономерно.

Различают следующие виды гидравлического прыжка:

1) совершенный или чистый прыжок — это гидравлический прыжок с образованием донной транзитной струи и поверхностного вальца (рис. 1.3, a) при соотношении сопряженных глубин $h_2 / h_1 \geq 2$;

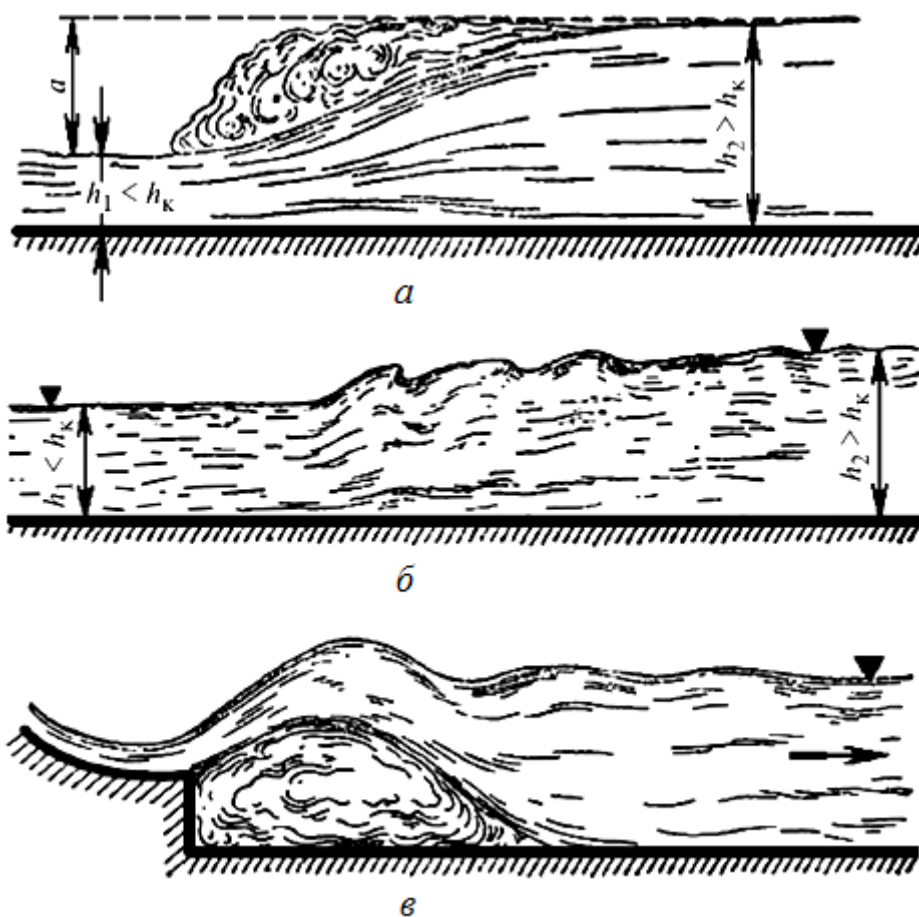


Рис. 1.3. Совершенный гидравлический прыжок (а), прыжок-волна (б) и поверхностный прыжок (в)

2) прыжок-волна — гидравлический прыжок небольшой высоты $h_2 / h_1 < 2$, принимающий форму ряда постепенно затухающих волн (рис. 1.3, б). В этом прыжке нет поверхностной зоны с вальцом;

3) поверхностный прыжок — гидравлический прыжок, образующийся при сходе струи с уступа, например с носка-трамплина водосливной плотины (рис. 1.3, в). Для него характерно образование поверхностной транзитной струи и донного вальца.

Теория совершенного гидравлического прыжка основывается на совместном решении уравнения импульсов и уравнения неразрывности и в качестве результирующего решения развития течения в гидравлическом прыжке приходит к окончательному уравнению следующего вида:

$$\frac{\alpha_{01} Q^2}{g \omega_1} + y_1 \omega_1 = \frac{\alpha_{02} Q^2}{g \omega_2} + y_2 \omega_2, \quad (1.6)$$

где ω_1, ω_2 — площади сечений 1-1 и 2-2 (т.е. до и после гидравлического прыжка); y_1 и y_2 — глубины погружения под уровень жидкости центров тяжести сечений 1-1 и 2-2; α_{01}, α_{02} — значения соответствующих коэффициентов Буссинеска, учитывающих неравномерность распределения скоростей (α_{01} и α_{02} обычно принимаются равными $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0 = 1,03$).

Равенство (1.6) называется *основным уравнением гидравлического прыжка*, его левая и правая части являются функцией глубины потока:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega} + y \omega = \Pi(h).$$

Функцию $\Pi(h)$ называют *прыжковой функцией*. Из основного уравнения гидравлического прыжка видим, что числовые значения прыжковой функции до и после прыжка равны между собой:

$$\Pi(h_1) = \Pi(h_2). \quad (1.7)$$

Расчет гидравлического прыжка в прямоугольном канале (с вертикальными стенками) сложности не представляет. Из уравнения (1.6) получены аналитические формулы, связывающие сопряженные глубины между собой:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_K}{h_2} \right)^3} - 1 \right], \quad (1.8)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_K}{h_1} \right)^3} - 1 \right]. \quad (1.9)$$

При расчете сопряженных глубин по (1.8) или (1.9) требуется знать одну из сопряженных глубин и критическую глубину, равную (1.5) или

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2}},$$

где b — ширина канала прямоугольного поперечного сечения.

Задача 1.3. В качестве примера возьмем условия задачи 1.2. Заданы: расход канала $Q = 4,0 \text{ м}^3/\text{с}$; ширина канала $b = 1,2 \text{ м}$; стенки канала вертикальные. Требуется определить критическую глубину потока h_K , вторую сопряженную глубину h_2 , если первая сопряженная глубина известна и равна $h_1 = 0,451 \text{ м}$, а также определить первую сопряженную глубину h_1 , если вторая сопряженная глубина составляет $h_2 = 1,359 \text{ м}$.

Решение

Определяем критическую глубину:

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,03 \cdot 4,0^2}{9,81 \cdot 1,2^2}} = 1,053 \text{ м}.$$

Подставляя результат вычисления в формулу (1.9), находим вторую сопряженную глубину при первой сопряженной глубине, равной $h_1 = 0,451 \text{ м}$:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_K}{h_1} \right)^3} - 1 \right] = \frac{0,451}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{1,053}{0,451} \right)^3} - 1 \right] = 2,061 \text{ м}.$$

Подставляя результат вычисления h_K в формулу (1.8), находим первую сопряженную глубину при второй сопряженной глубине, равной $h_2 = 1,359 \text{ м}$:

$$h_1 = \frac{h_2}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_K}{h_2} \right)^3} - 1 \right] = \frac{1,359}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{1,053}{1,359} \right)^3} - 1 \right] = 0,797 \text{ м}.$$

Вывод. Из рассмотренных в этой задаче гидравлических прыжков первый является совершенным, а второй — прыжком-волной.

Расчет сопряженных глубин гидравлического прыжка в трапецидальном канале более трудоемок. Для расчета сопряженных глубин гидравлического прыжка в трапецидальном канале будем использовать *численный итерационный метод Ньютона* (другое название метода — *метод касательных*).

Итерационный метод Ньютона (метод касательных)

Представим графически прыжковую функцию $\Pi(h)$ в общем виде на рис. 1.4, на нем же покажем и функцию удельной энергии сечения $\mathcal{E}(h)$. Обратим внимание, что согласно основному уравнению гидравлического прыжка (1.6) прыжковые функции в его левой $\Pi(h_1)$ и правой $\Pi(h_2)$ частях равны между собой (см. формулу (1.7)), а также обе функции $\Pi(h)$ и $\mathcal{E}(h)$ имеют минимумы при критической глубине потока. Эти важные свойства указанных функций способствуют быстрому решению задачи.

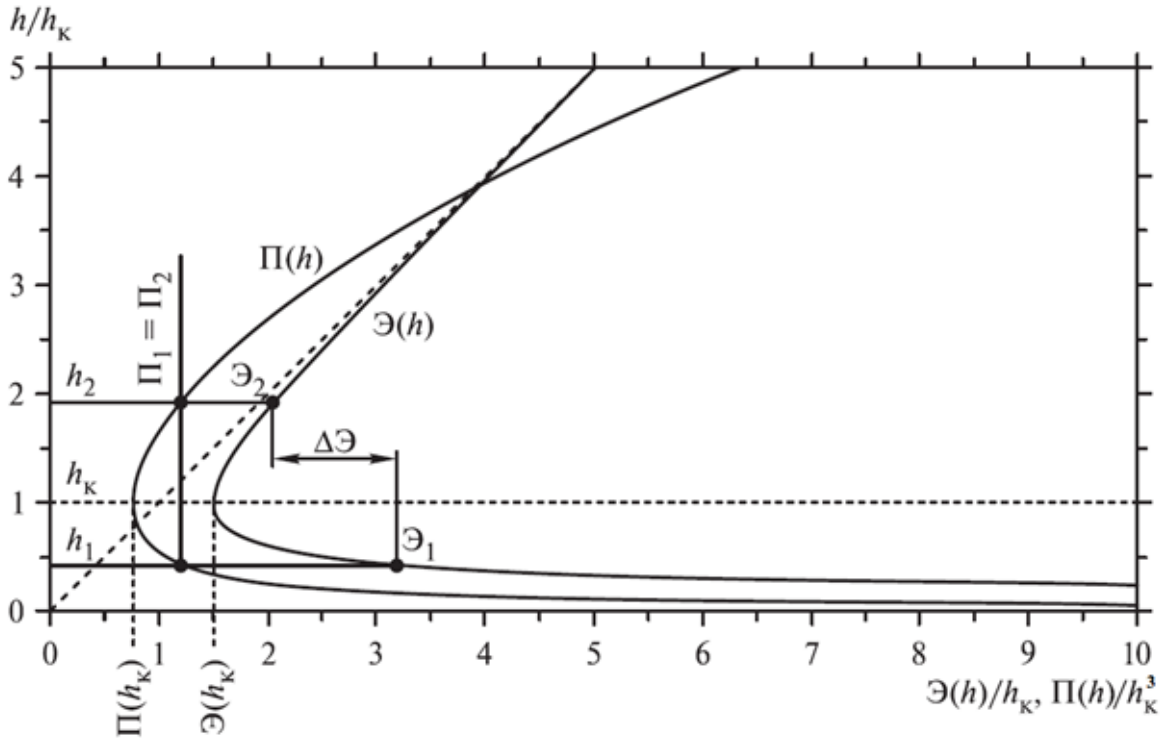


Рис. 1.4. Прыжковая функция $\Pi(h)$ и удельная энергия сечения $\mathcal{E}(h)$

Развернем рис. 1.4 вертикально, одновременно убрав из него все избыточные для нашей задачи детали.

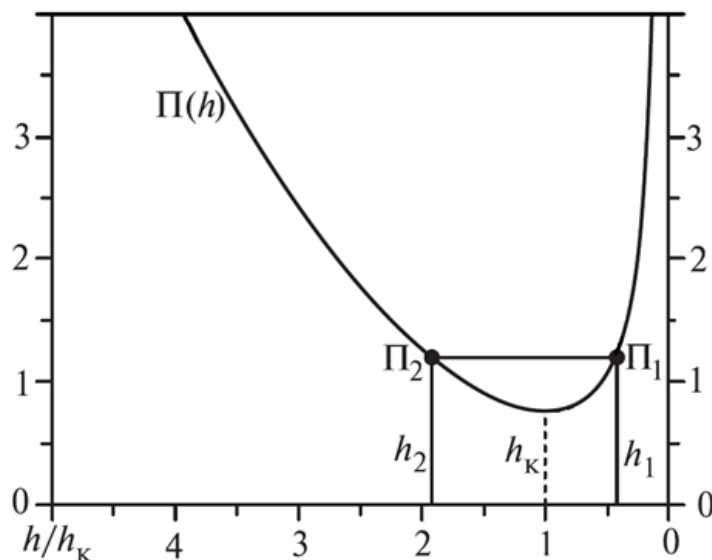


Рис. 1.5. Промежуточная схема к расчету

Пусть известна первая сопряженная глубина гидравлического прыжка в трапецидальном канале, и нам необходимо найти вторую сопряженную глубину. Но если первая сопряженная глубина известна, то мы можем рассчитать значение прыжковой функции:

$$\Pi(h_2) = \Pi(h_1) = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + y_1\omega_1.$$

В целях более точного и детального описания *итерационного метода Ньютона* возьмем конкретный пример.

Задача 1.4. Заданы: расход канала $Q = 4,0 \text{ м}^3/\text{с}$; ширина канала по дну $b = 1,2 \text{ м}$; коэффициент откосов $m = 1,5$ и первая сопряженная глубина $h_1 = 0,329 \text{ м}$. Требуется определить вторую сопряженную глубину h_2 в трапецидальном канале и длину гидравлического прыжка l_{Π} .

Решение

Определяем прыжковую функцию $\Pi(h_1)$, учитывая, что глубина погружения под уровень жидкости центра тяжести трапецидального сечения 1-1 равна:

$$y_1 = \frac{h_1}{3} \left(\frac{B_1 + 2b}{B_1 + b} \right) = \frac{h_1}{3} \left(1 + \frac{b}{B_1 + b} \right) = \frac{h_1}{3} \left[1 + \frac{b}{2(b + mh_1)} \right] = \frac{0,329}{3} \left[1 + \frac{1,2}{2(1,2 + 1,5 \cdot 0,329)} \right] = 0,1485 \text{ м},$$

где $B_1 = b + 2mh_1$ — ширина канала на свободной поверхности воды.

Далее вычисляем площадь сечения канала в сечении 1-1:

$$\omega_1 = (b + mh_1)h_1 = (1,2 + 1,5 \cdot 0,329) \cdot 0,329 = 0,5572 \text{ м}^2$$

и саму прыжковую функцию:

$$\Pi(h_1) = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_1} + y_1\omega_1 = \frac{1,03 \cdot 4,0^2}{9,81 \cdot 0,5572} + 0,1485 \cdot 0,5572 = 3,097 \text{ м}^3.$$

Обозначим найденное значение $\Pi(h_1)$ константой $C = 3,097 \text{ м}^3$, ибо этой константе должна быть равна прыжковая функция $\Pi(h_2)$. И перепишем основное уравнение гидравлического прыжка (1.6) в виде:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + y_2\omega_2 - C = 0$$

или в несколько ином виде:

$$F = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + y_2\omega_2 - C. \quad (1.10)$$

Последняя операция с вводом функции F поднимает ось абсцисс новой функции F (рис. 1.6) над осью абсцисс прыжковой функции $\Pi(h)$ (рис. 1.5) на величину константы $C = \Pi(h_1) = 3,097 \text{ м}^3$. Именно это позволяет достаточно легко далее найти вторую сопряженную глубину h_2 в трапецидальном канале как корень уравнения (1.10) при $F = 0$. Но для этого требуется еще одна численная величина: первая производная функции F по переменной h_2 . Обозначим эту производную как F' и для ее нахождения продифференцируем функцию (1.10) с учетом того, что C — константа.

$$F' = \frac{dF}{dh_2} = \frac{d}{dh_2} \left[\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + \frac{h_2}{3} \left(\frac{B_1 + 2b}{B_1 + b} \right) \omega_2 \right].$$

В результате дифференцирования получим:

$$F' = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2^2} B_2 + \omega_2.$$

Интересно отметить, что в общем случае деление производной F' на площадь сечения потока ω позволяет получить знаменатель известного дифференциального уравнения установившегося неравномерного плавно изменяющегося движения жидкости в открытом канале [1]:

$$\frac{F'}{\omega} = 1 - \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3} B.$$

Само по себе это примечательно, ведь именно знаменатель несет на себе функции регулирования процессов, связанных с резкими изменениями в характере течений, включая гидравлические прыжки.

Таким образом, *метод Ньютона* основан на замене функции $F(h)$ в точке начального приближения $h = h_{20}$ касательной $F'(h)$, пересечение которой с осью абсцисс дает первое приближение h_{21} и т.д. (рис. 1.6).

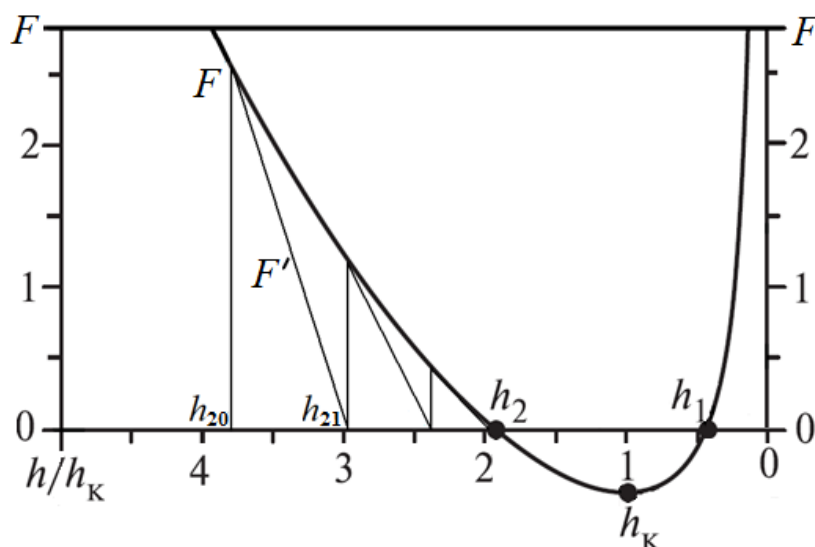


Рис. 1.6. Итерационный метод Ньютона (метод касательных)

Итерационный процесс схождения к корню реализуется формулой:

$$h_{n+1} = h_n - \frac{F(h_n)}{F'(h_n)}, \quad (1.11)$$

до тех пор, пока либо достигнуто условие (1.3), либо соблюдается условие:

$$|h_{n+1} - h_n| \leq \varepsilon,$$

здесь h_n и h_{n+1} — предыдущее и последующее приближения искомой величины, в данном случае второй сопряженной глубины h_2 ; ε — допустимая погрешность инженерного расчета.

Любой итерационный расчет начинается, задав первое значение искомой величины, которое может быть выбрано произвольно. Однако, поскольку по условиям задачи требуется определить вторую сопряженную глубину h_2 в трапециевидальном канале при известной первой сопряженной глубине $h_1 = 0,329$ м, а также при известной критической глубине потока $h_K = 0,782$ м (см. задачу 1.2), воспользуемся формулой (1.9) для вычисления второй сопряженной глубины h_2 в канале с вертикальными стенками.

$$1 \text{ итерация: } h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{h_K}{h_1} \right)^3} - 1 \right] = \frac{0,329}{2} \left[\sqrt{1 + 8 \left(\frac{0,782}{0,329} \right)^3} - 1 \right] = 1,548 \text{ м.}$$

Получив первое итерационное значение искомой величины, далее последовательно вычисляем:
– постоянную заданной прыжковой функции:

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g} = \frac{1,03 \cdot 4,0^2}{9,81} = 1,68 \text{ м}^5;$$

– глубину погружения под уровень жидкости центра тяжести трапецидального сечения 2-2:

$$y_2 = \frac{h_2}{3} \left[1 + \frac{b}{2(b + mh_2)} \right] = \frac{1,548}{3} \left[1 + \frac{1,2}{2(1,2 + 1,5 \cdot 1,548)} \right] = 0,6039 \text{ м};$$

– площадь сечения потока:

$$\omega_2 = (b + mh_2) h_2 = (1,2 + 1,5 \cdot 1,548) 1,548 = 5,452 \text{ м}^2;$$

– ширину канала на свободной поверхности воды (по урезу воды):

$$B_2 = b + 2mh_2 = 1,2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1,548 = 5,844 \text{ м};$$

– функцию F (1.10):

$$F = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + y_2\omega_2 - C = \frac{1,68}{5,452} + 0,6039 \cdot 5,452 - 3,097 = 0,5036 \text{ м}^3$$

и ее производную F' :

$$F' = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2^2} B_2 + \omega_2 = -\frac{1,68}{5,452^2} 5,844 + 5,452 = 5,122 \text{ м}^2.$$

В результате этих вычислений по формуле (1.11) находим новое приближение искомой второй сопряженной глубины h_2 в трапецидальном канале, реализуемое итерацией 2.

$$2 \text{ итерация: } h_2 = h_{n+1} = h_n - \frac{F(h_n)}{F'(h_n)} = 1,548 - \frac{0,5036}{5,122} = 1,450 \text{ м}.$$

Выполняем следующую итерацию, последовательно вычисляя:

– глубину погружения под уровень жидкости центра тяжести трапецидального сечения 2-2:

$$y_2 = \frac{h_2}{3} \left[1 + \frac{b}{2(b + mh_2)} \right] = \frac{1,450}{3} \left[1 + \frac{1,2}{2(1,2 + 1,5 \cdot 1,450)} \right] = 0,5583 \text{ м};$$

– площадь сечения потока:

$$\omega_2 = (b + mh_2) h_2 = (1,2 + 1,5 \cdot 1,450) 1,450 = 4,894 \text{ м}^2;$$

– ширину канала на свободной поверхности воды (по урезу воды):

$$B_2 = b + 2mh_2 = 1,2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1,450 = 5,55 \text{ м};$$

– функцию F (1.10):

$$F = \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2} + y_2\omega_2 - C = \frac{1,68}{4,894} + 0,5583 \cdot 4,894 - 3,097 = -0,0214 \text{ м}^3$$

и ее производную F' :

$$F' = -\frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega_2^2} B_2 + \omega_2 = -\frac{1,68}{4,894^2} 5,55 + 4,894 = 4,505 \text{ м}^2.$$

В результате 3 итерации получаем:

$$3 \text{ итерация: } h_2 = h_{n+1} = h_n - \frac{F(h_n)}{F'(h_n)} = 1,450 + \frac{0,0214}{4,505} = 1,455 \text{ м}.$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru