Предисловие

Пособие составлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта и программы по алгебре для 9 класса общеобразовательной школы. В сборник включены задачи по всем разделам алгебры, изучаемым в 9 классе средней школы. Содержит более 500 задач трех уровней сложности. В уровень А включены простые задачи, предназначенные для отработки элементарных навыков решения задач. В уровне В представлены базовые задачи, соответствующие обязательному уровню программы. В уровень С входят задачи повышенной сложности, олимпиадные и конкурсные задачи.

Как правило, представлены парные задачи, позволяющие отрабатывать пройденный материал в школе и закреплять его дома. В конце пособия приведены ответы, к наиболее сложным задачам даны и методические указания.

Все задачи данного сборника сгруппированы по темам:

I. Квадратичная функция.
   1. Функции и их свойства.
   2. Квадратный трехчлен.
   3. Квадратичная функция и ее график.
   4. Степенная функция. Корень n-й степени.

II. Уравнения и неравенства с одной переменной.
   5. Уравнения с одной переменной.
   6. Неравенства с одной переменной.

III. Уравнения и неравенства с двумя переменными.
   7. Уравнения с двумя переменными и их системы.
   8. Неравенства с двумя переменными и их системы.

IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
   9. Арифметическая прогрессия.
   10. Геометрическая прогрессия.

V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей.
   11. Элементы комбинаторики.
   12. Начальные сведения из теории вероятностей.

Задачник предназначен для учеников и учителей общеобразовательных и профильных школ. Наличие в пособии задач разного уровня сложности позволяет использовать его для классной и домашней работы, проведения самостоятельных, контрольных и зачетных работ, подготовки к олимпиадам и ОГЭ. Сборник задач апробирован в общеобразовательных классах и в классах с углубленным изучением математики.

I. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Функции и их свойства

Уровень А

1. Найдите $f(-1)$, $f(0)$ и $f(2)$, если:

а) $f(x) = 2x + 3$;

б) $f(x) = 2 - 3x$;

в) $f(x) = x^2 - 4$;

г) $f(x) = x^2 + 3x$;

д) $f(x) = \frac{x}{x-1}$;

е) $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

2. а) Даны функции $f(x) = \frac{3}{x} - 4x$ и $h(x) = 2x - 5$. Сравните:

1) $f(1)$ и $h(1)$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $h(4)$; 3) $f(-2)$ и $h(1)$.

б) Даны функции $y(x) = 2x - \frac{6}{x}$ и $z(x) = 4x - 3$. Сравните:

1) $y(-1)$ и $z(0)$; 2) $y(2)$ и $z\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $y(3)$ и $z(2)$.

3. а) Найдите значение x, при котором функция, заданная формулой $f(x) = 5 - 3x$, принимает значение:

1) 2; 2) –1; 3) 8.

б) Найдите значение x, при котором функция, заданная формулой $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, принимает значение:

1) –1; 2) 3; 3) 0.

4. Определите, существует ли значение x, при котором значение функции равно 2; 1; 0.

а) $g(x) = \frac{3}{x+1}$;

б) $g(x) = \frac{5}{2+x}$.

5. Найдите значение x, при котором $h(x) = 0$:

а) $h(x) = -3(x + 1)(x - 2)$;

б) $h(x) = 2(x - 3)(x - 5)$;

в) $h(x) = \frac{x+2}{5-x}$;

г) $h(x) = \frac{4-2x}{x+1}$.

6. а) Из множества чисел {–3; –1; 0; 2; 3; 7} выпишите числа:

1) входящие в область определения функции $f(x) = \sqrt{2x-3}$;

2) не входящие в область определения функции $g(x) = \sqrt{2-3x}$.

б) Из множества чисел {–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3} выпишите числа:

1) входящие в область определения функции $f(x) = \sqrt{3x+4}$;

2) не входящие в область определения функции $g(x) = \sqrt{-4x-3}$.

7. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = 2x - 4$;

б) $y = 6 - 2x$;

в) $y = \frac{2}{x}$;

г) $y = -\frac{3}{x}$.

8. Найдите область определения функции:

а) $y = 3x - 6$;

б) $y = 1 - 2x$;

в) $y = 2x^2 + 3x - 1$;

г) $y = -x^2 + 7x + 2$;

д) $y = \dfrac{2x+3}{2-x}$;

е) $y = \dfrac{7x+10}{x+1}$;

ж) $y = \sqrt{x-11}$;

з) $y = \sqrt{10-x}$.

9. а) Найдите область определения и множество значений функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 1. Чему равно $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$?

б) Найдите область определения и множество значений функции $y = g(x)$, график которой изображен на рисунке 2. Чему равно $g(1)$; $g(2)$; $g(4)$?

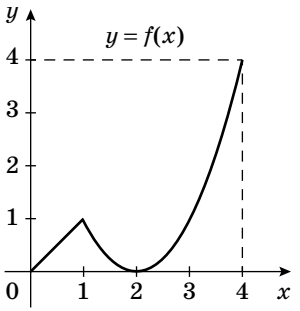

Рис. 1

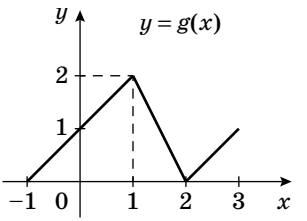

Рис. 2

10. Не выполняя построения, найдите точки пересечения графика функции с осями координат:

а) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$;

б) $f(x) = 3x + 15$;

в) $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$;

г) $f(x) = \dfrac{x+3}{3-2x}$.

11. а) Постройте график функции $f(x) = 2x - 4$ на отрезке $[-2; 3]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) множество значений функции;

2) нули функции;

3) промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения:

4) промежутки, в которых функция принимает положительные значения;

5) наибольшее и наименьшее значения функции;

6) промежуток возрастания функции.

б) Постройте график функции $g(x) = 6 - 3x$ на отрезке $[-1; 3]$. Пользуясь графиком, найдите:

1) множество значений функции;

2) нули функции;

3) промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения;

4) промежутки, в которых функция принимает положительные значения;

5) наибольшее и наименьшее значения функции;

6) промежуток убывания функции.

12. а) На рисунке 3 изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 5]$.

Пользуясь графиком, найдите:

1) область определения функции;

2) множество значений функции;

3) наименьшее и наибольшее значения функции;

4) нули функции;

5) промежутки, в которых функция принимает положительные значения;

6) промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения;

7) промежутки, на которых функция возрастает;

8) промежутки, на которых функция убывает.

б) На рисунке 4 изображен график функции $y = h(x)$ на отрезке $[-1; 4]$.

Пользуясь графиком, найдите:

1) область определения функции;

2) множество значений функции;

3) наименьшее и наибольшее значения функции;

4) нули функции;

5) промежутки, в которых функция принимает положительные значения;

6) промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения;

7) промежутки, на которых функция возрастает;

8) промежутки, на которых функция убывает.

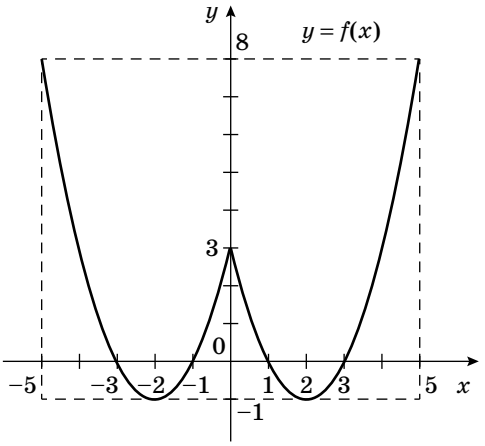

Рис. 3

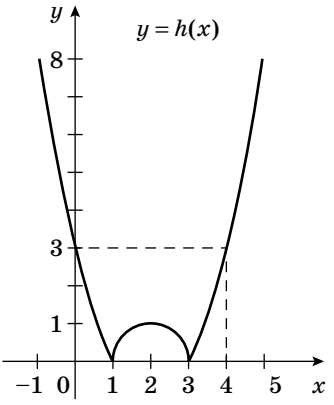

Рис. 4

13. а) Из следующего набора функций: $y = 2x - 3$; $y = 3 - 7x$; $y = \frac{1}{2}x + 3$; $y = 3$; $y = -10x + 1$; $y = 0{,}01x + 1$ выпишите:

1) возрастающие функции;
2) убывающие функции.

б) Из следующего набора функций: $y = 5x + 8$; $y = -2$; $y = 10 - 3x$; $y = 0{,}001x + 2$; $y = -100x - 3$; $y = -x + 1$ выпишите:

1) возрастающие функции;
2) убывающие функции.

14. Установите соответствие между функциями и множествами, являющимися их областями определения.

а) А) $f(x) = 3 - 2x$ Б) $g(x) = \sqrt{2x - 3}$ В) $h(x) = \sqrt{-2x - 3}$

1) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

б) А) $f(x) = 4x - 10$ Б) $g(x) = \sqrt{4x + 10}$ В) $h(x) = \sqrt{10 - 4x}$

1) $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$ 2) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$ 3) $(-\infty; +\infty)$

15. Найдите нули функции (если они существуют):

а) $y = \frac{1}{2}x - 10$;
б) $y = -0{,}4x + 8$;
в) $y = x(x + 2)$;
г) $y = (x - 1)(x - 5)$;
д) $y = -15$;
е) $y = 12$.

16. Опишите свойства функций:

а) $y(x) = -0{,}5x + 3$;
б) $y(x) = 0{,}2x - 4$;
в) $y(x) = \frac{2}{x}$;
г) $y(x) = -\frac{3}{x}$;
д) $y(x) = \sqrt{x - 1}$;
е) $y(x) = \sqrt{x + 2}$.

17. Задайте формулой какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа:

а) –5; б) 4; в) –3; 2; г) –1; 4.

18. Задайте формулой какую-нибудь функцию, областью определения которой является:

а) множество всех чисел;
б) множество всех чисел, кроме –1;
в) множество всех чисел, кроме 3;
г) множество $[2; +\infty)$;
д) множество $(-\infty; -3]$.

19. Найдите все значения x, при которых функция $f(x)$:

а) $f(x) = 2x - 7$;
б) $f(x) = 5x + 9$;
в) $f(x) = \frac{7}{x}$;
г) $f(x) = -\frac{5}{x}$

1) принимает отрицательные значения;
2) принимает положительные значения.

20. а) Дана функция $f(x) = -3x + 1$, где $-2 \le x \le 3$. Найдите область значений функции.

б) Дана функция $f(x) = 2x - 3$, где $-3 \le x \le 2$. Найдите область значений функции.

21. а) Дана функция $y = 4x - 3$. Найдите зависимость переменной x от величины y.

б) Дана функция $y = -3x + 2$. Найдите зависимость переменной x от величины y.

22. Высота подъема h (м) тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с), вычисляется по формуле $h = \frac{v_0^2}{2g}$ ($g = 10$ м/с^2). Определите, при какой скорости v_0 высота подъема h равна:

а) 20 м; б) 80 м.

Уровень В

23. Найдите $f(1) - f(-2)$, если:

а) $f(x) = \frac{3x - x^2}{x + 1}$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$;

б) $f(x) = \frac{2x + x^2}{x + 3}$; г) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4}$.

24. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 1 + \frac{1}{4 - \frac{1}{x}}$; г) $f(x) = 5 + \frac{2}{2x - \frac{8}{x}}$;

б) $f(x) = 2 + \frac{1}{5 - \frac{2}{x}}$; д) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 5}}{x^2 - 14x + 48}$;

в) $f(x) = 4 + \frac{3}{x - \frac{1}{x}}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x}}{x^2 + 5x + 6}$.

25. Найдите нули функций (если они есть):

а) $f(x) = \frac{3(x + 5)(x - 4)}{x^2 - 16}$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}$;

б) $f(x) = \frac{3x^2(1 - x)}{2x - 4x^2}$; г) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$.

26. Укажите промежутки возрастания и убывания для следующих функций:

а) $f(x) = \frac{4x - 3}{x - 1}$; в) $f(x) = 2|x| - 1$;

б) $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$; г) $f(x) = 3 - 2|x|$.

27. Найдите множество значений функции:

а) $f(x) = \frac{5}{6x - 2} - 3$; б) $f(x) = \frac{7}{2x - 5} + 2$;

в) $f(x) = 3 - \frac{x}{2-x}$;

г) $f(x) = 1 - \frac{x}{5-x}$;

д) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

е) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

28. Найдите наибольшее значение функции:

а) $f(x) = 5 - |x - 1|$;

б) $f(x) = 4 - |x + 3|$;

в) $f(x) = 6 - \sqrt{x - 4}$;

г) $f(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$.

29. Найдите наименьшее значение функции:

а) $f(x) = |x - 2| - 3$;

б) $f(x) = 2|x + 1| + 4$;

в) $f(x) = 3\sqrt{x - 1} + 5$;

г) $f(x) = 10\sqrt{x + 2} + 15$.

30. Найдите значение x, при которых функция:

а) $f(x) = |x - 1| - 2$;

б) $f(x) = -|x + 1| + 3$;

в) $f(x) = \sqrt{x - 1} - 1$;

г) $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

1) принимает положительные значения;

2) принимает отрицательные значения.

31. Найдите области определения и значений функции:

а) $y = \sqrt{2x - 4} + 3$;

б) $y = \sqrt{6 - 3x} - 4$.

32. а) Дана функция $f(x) = x^2 + 3$, где $-2 \le x \le 3$. Найдите область значений функции.

б) Дана функция $f(x) = 1 - x^2$, где $-3 \le x \le 2$. Найдите область значений функции.

33. а) Дана функция $y = \frac{x+3}{1-x}$. Найдите зависимость переменной x от величины y.

б) Дана функция $y = \frac{3-x}{x+1}$. Найдите зависимость x от величины y.

34. а) Поезд сначала ехал 2 ч со скоростью 50 км/ч, а затем еще 3 ч со скоростью 70 км/ч. Задайте зависимость пройденного пути S (км) от времени движения t (ч) (где $0 \le t \le 5$).

б) Поезд сначала ехал 3 ч со скоростью 50 км/ч, а затем еще 2 ч со скоростью 70 км/ч. Задайте зависимость пройденного пути S (км) от времени движения t (ч) (где $0 \le t \le 5$).

35. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой:

а) $y = 3x - 6$;

б) $y = 4 - 2x$.

36. Найдите площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и графиком функции:

а) $y = 4 - |x|$;

б) $y = |x| - 2$.

37. Найдите $f(f(x))$, если:

а) $f(x) = x + 2$;

б) $f(x) = 3 - x$;

в) $f(x) = 3 - 2x$;

г) $f(x) = 3x - 2$.

38. Найдите $f(x)$, если:

а) $f(x + 3) = 2x - 1$;

б) $f(2 - x) = 2 - 3x$;

в) $f(2x - 1) = 3x + 2$;

г) $f(2 - 3x) = 4 - 5x$.

39. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{3x^2 + 2x}{x}$;

б) $y = \dfrac{3x - 2x^2}{x}$;

в) $y = \dfrac{x^3}{|x|}$;

г) $y = -\dfrac{x^3}{|x|}$;

д) $y = 2x + |x| + 1$;

е) $y = -2x + |x| - 1$;

ж) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$;

з) $y = \dfrac{4 - x^2}{x - 2}$;

и) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$;

к) $y = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2}$;

л) $y = \dfrac{x - 3}{3x - x^2}$;

м) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x}$;

н) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{|x - 3|}$;

о) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{|x - 2|}$.

Уровень С

40. а) Найдите значение выражения $\dfrac{f(-6) + f(-1)}{f(3)}$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x \le -2, \\ 5x - 7, \text{ если } -2 < x \le 0, \\ 7 - x^2, \text{ если } x > 0; \end{cases}$$

б) найдите значение выражения $\dfrac{g(-2) + g(0)}{g(5) - 0{,}6}$, если

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, \text{ если } x < -1, \\ -\dfrac{4}{x^2 + 1}, \text{ если } -1 \le x < 3, \\ 2x - 6{,}4, \text{ если } x \ge 3; \end{cases}$$

в) найдите значение $h(a^2 - 1)$ при $a \in (-1;\ 1)$, если $h(x) = x + |x|$;

г) найдите значение $s(a^2 - 4a + 3)$ при $a \in (1;\ 3)$, если $s(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

41. Найдите количество целых чисел, входящих в область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{5 - |3 - x|}$;

б) $f(x) = \sqrt{2 - |5 - x|}$;

в) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - |x - 3|}{|x + 2| - 2}}$;

г) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - |x - 5|}{|x + 1| - 3}}$.

42. Найдите множество значений функции:

а) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x + 3}$;

б) $y = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$.

43. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ на отрезке $[-3; 4]$;

б) найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 2\sqrt{x^2 + 10x + 25}$ на отрезке $[-6; 1]$.

44. Постройте график функции:

а) $y = x + |x - 2|$;

б) $y = 2x - |x - 3|$;

в) $y = |x - 1| + |x + 2|$;

г) $y = |x - 1| - |x + 2|$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 9}{3 - x} + 2x + 1$;

е) $y = \dfrac{4 - x^2}{x + 2} + 3x - 1$;

ж) $\dfrac{y + x - 1}{x + 2} = 3$;

з) $\dfrac{2y - x - 2}{y + x} = 1$;

и) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 2x$;

к) $y = 3x - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

45. Найдите функцию $y(x)$, если известно значение:

а) $y(6 - x) = 5 + x$;

б) $y(6 - x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$;

в) $y(6 - x) = 2x^2 - 3x + 4$;

г) $y(6 - x) = 2 - |x + 3|$;

д) $y(6 - x) = \dfrac{3|x - 1| + 2}{2x - 1}$.

46. Найдите функцию $y(x)$, если известно значение:

а) $y(2x - 4) = 3 - 2x$;

б) $y(2x - 4) = \dfrac{2x - 1}{4x + 2}$;

в) $y(2x - 4) = 4x^2 + 2x - 7$;

г) $y(2x - 4) = 4x - 2|x + 1|$;

д) $y(2x - 4) = \dfrac{2|x + 1| + 3}{4|x| - 8}$.

47. Найдите функцию $y(x)$, если выполнено равенство:

а) $2y(x) + 3y(-x) = 4x^2 - 7x + 5$;

б) $3y(x) - 2y(-x) = -x^2 + 8x + 3$;

в) $2y(x - 3) - 5y(3 - x) = x^2 - 3x + 1$;

г) $y(x - 5) - 2y(5 - x) = -x^2 + 2x - 1$;

д) $2y(x) - 3y\left(\dfrac{1}{x}\right) = 5x^2 - \dfrac{3}{x^2}$;

е) $y(x) + 2y\left(\dfrac{1}{x}\right) = -x + \dfrac{7}{x} + 1$.

48. Найдите $f(f(x))$, если:

а) $f(x) = -3x + 5$;

б) $f(x) = 2x - 1$;

в) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$;

г) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$;

д) $f(x) = x^2 + x$;

е) $f(x) = 3x - x^2$.

49. Найдите $y_1 = f(h(x))$ и $y_2 = h(f(x))$, если:

а) $f(x) = 3x - 2$, $h(x) = 1 - 2x$;

б) $f(x) = 2x + 1$, $h(x) = 2 - 3x$;

в) $f(x) = x^2 + x$, $h(x) = 2x - x^2$;

г) $f(x) = x - x^2$, $h(x) = x^2 + 2x$;

д) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, $h(x) = x^2 + x$;

е) $f(x) = 2x - x^2$, $h(x) = \dfrac{x + 1}{1 - x}$.

50. Постройте график функции $g(x) = f(|x|)$ и опишите свойства функции $y = g(x)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ если } x \in [0; 3], \\ x - 5, \text{ если } x \in (3; 4], \\ 2x - 9, \text{ если } x \in (4; +\infty); \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \in [0; 2], \\ -2x + 7, \text{ если } x \in (2; 5), \\ x - 8, \text{ если } x \in [5; +\infty). \end{cases}$

2. Квадратный трехчлен

Уровень А

51. Из каждого набора многочленов выпишите квадратные трехчлены:

а) $x^2 - 4x^4 + 3$; $x - x^2 + 6$; $-x^2 + 2x$; $x^2 - 5$; $x - x^3$; $x^2 + 1 - x^2$;

б) $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 3x - x^2$; $x^2 - 3x^5 + x$; $2x + x^2$; $x^2 + 9$; $3x + 1 + x^2$.

52. а) Какие из чисел –3; –1; 1; 2; 3 являются корнями многочлена $x^2 - 4x + 3$?

б) Какие из чисел –5; –1; 1; 3; 5 являются корнями многочлена $x^2 - 6x + 5$?

в) Какие из чисел –2; $-\frac{1}{2}$; 1; $\frac{1}{2}$; 2 являются корнями многочлена $2x^2 - 5x + 2$?

г) Какие из чисел –3; –1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 3 являются корнями многочлена $3x^2 + 10x + 3$?

53. Установите соответствие между многочленом и его корнями.

а)	А) $x - x^2$	Б) $x^2 - 6x + 8$	В) $x^2 - 9$
	1) –3; 3	2) 0; 1	3) 2; 4
б)	А) $x^2 + 5x + 6$	Б) $x^2 - 16$	В) $4x + 2x^2$
	1) 0; –2	2) –4; 4	3) –2; –3

54. Определите количество корней у квадратного трехчлена:

а) $2x^2 + 5x + 4$;
б) $3x^2 - 2x + 4$;
в) $2x^2 + 5x + 2$;
г) $3x^2 - 10x + 3$;
д) $2x^2 + 8x + 8$;
е) $3x^2 - 6x + 3$.

55. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $2x^2 - 7x + 3$;
б) $3x^2 - 7x + 2$;
в) $x^2 - 2x - 3$;
г) $x^2 - 3x - 4$;
д) $4x^2 - 36$;
е) $5x^2 - 80$.

56. Из каждого набора квадратных трехчленов выпишите те, которые можно разложить на множители:

а) $2x^2 + 7x + 10$; $x^2 - 7x + 12$; $x^2 + 4$; $3x^2 + 12x + 12$; $2x^2 - 2x - 12$; $x^2 + 2x - 2$;

б) $x^2 - 4x + 1$; $3x^2 - 5x + 4$; $x^2 + 8x + 12$; $2x^2 + 10$; $2x^2 + 8x + 8$; $3x^2 + 3x - 18$.

57. Установите соответствие между квадратными трехчленами и их разложениями на множители.

а)	А) $x^2 - 3x + 2$	Б) $x^2 + 3x + 2$	В) $-x^2 + 3x - 2$
	1) $(x + 1)(x + 2)$	2) $(1 - x)(x - 2)$	3) $(x - 1)(x - 2)$
б)	А) $x^2 - 4x + 3$	Б) $-x^2 + 4x - 3$	В) $x^2 + 4x + 3$
	1) $(3 - x)(x - 1)$	2) $(x - 1)(x - 3)$	3) $(x + 1)(x + 3)$

58. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 10x + 21$;
б) $x^2 - 9x + 18$;
в) $x^2 + x - 12$;
г) $x^2 - x - 30$;
д) $2x^2 - 7x + 3$;
е) $3x^2 - 7x + 2$.

59. Запишите разложение приведенного квадратного трехчлена на множители, если корни этого квадратного трехчлена равны:

а) 3 и 5;
б) 2 и 4;
в) $\frac{1}{2}$ и 2;
г) $\frac{1}{3}$ и 3;
д) –3 и –2;
е) –5 и –1;
ж) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$;
з) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{2}$.

60. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы получилось верное равенство?

а) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(...)$;
б) $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(...)$;
в) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(...)$;
г) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(...)$;
д) $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(...)$;
е) $3x^2 - 10x + 3 = (3x - 1)(...)$.

61. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$;
б) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x - 6}$;
в) $\frac{x + 1}{x^2 - 6x - 7}$;
г) $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$.

62. а) Найдите значение дроби $\frac{x^2 - 11x - 26}{9x + 18}$ при $x = 9013$.

б) Найдите значение дроби $\frac{x^2 - 8x - 33}{10x + 30}$ при $x = 10\ 011$.

63. Выделите квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

а) $x^2 - 4x + 5$;
б) $x^2 - 6x + 10$;
в) $x^2 + 8x - 1$;
г) $x^2 + 10x - 3$.

64. а) Докажите, что квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 12x + 37$ принимает только положительные значения;
2) $x^2 - 10x + 27$ принимает только положительные значения.

б) Докажите, что квадратный трехчлен:

1) $-x^2 - 8x - 20$ принимает только отрицательные значения;
2) $-x^2 - 14x - 55$ принимает только отрицательные значения.

Уровень В

65. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $10x^2 - 7\sqrt{3}x + 3$;

б) $6x^2 - 5\sqrt{5}x + 5$;

в) $x^2 - \left(3 - 2\sqrt{3}\right)x + 5 - 3\sqrt{3}$;

г) $x^2 - \left(5 - 2\sqrt{5}\right)x + 11 - 5\sqrt{5}$.

66. Определите, при каких значениях параметра a можно разложить на множители квадратный трехчлен:

а) $2x^2 + 7x - a$;

б) $3x^2 + 5x + 2a$;

в) $ax^2 + 4x + 8$;

г) $ax^2 - 3x + 3$.

67. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{4x - x^2 - 3}$;

б) $\dfrac{6 - x - x^2}{x^2 - 7x + 10}$;

в) $\dfrac{4x^2 - 7x - 2}{11x - 4x^2 + 3}$;

г) $\dfrac{2x^2 + 3x - 2}{7x - 2x^2 - 3}$.

68. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$;

б) $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$;

в) $y = \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x + 1} - \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

г) $y = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1} - \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

69. а) При каком значении x квадратный трехчлен $2x^2 - 4x - 5$ принимает наименьшее значение? Чему оно равно?

б) При каком значении x квадратный трехчлен $-3x^2 + 6x - 7$ принимает наибольшее значение? Чему оно равно?

70. Определите, при каком наименьшем значении параметра a можно сократить дробь:

а) $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - a}$;

б) $\dfrac{x^2 + 2x - 48}{x^2 - a}$.

71. Найдите все значения параметра a, при которых можно сократить дробь:

а) $\dfrac{x^2 + 3x - 28}{x^2 + ax + 16}$;

б) $\dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + ax + 4}$.

72. Запишите многочлен $P(x)$ по степеням величины $x - 3$:

а) $P(x) = 3x^2 - 7x - 1$;

б) $P(x) = -2x^2 + 5x + 3$.

73. Запишите многочлен $P(x)$ по степеням величины $5 - 2x$:

а) $P(x) = 4x^2 - 6x + 1$;

б) $P(x) = -8x^2 + 2x - 7$.

74. Напишите квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, который имеет корни:

а) $-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{2}{3}$;

б) $-\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{4}$.

75. Квадратный трехчлен $3x^2 + 5x - 4$ имеет корни x_1 и x_2. Напишите квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, который имеет корни:

а) $2x_1$ и $2x_2$;

б) $-3x_1$ и $-3x_2$;

в) $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$;

г) $x_1 - 2$ и $x_2 - 2$.

76. Найдите связь между переменными x и y, если выполнено равенство:

а) $2x^2 + 3xy - 20y^2 = 0$;

б) $3x^2 - 13xy + 4y^2 = 0$;

в) $\dfrac{10x^2 - 13xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4$;

г) $\dfrac{9x^2 - 8xy - 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 2$.

77. Разложите на множители многочлен:

а) $x^9 - 5x^8 + 6x^7$;

б) $x^7 + 9x^6 + 20x^5$;

в) $x^4 - 5x^2 + 4$;

г) $x^4 - 13x^2 + 36$;

д) $5x^2 - 2ax - 3a^2$;

е) $7x^2 + 3ax - 10a^2$.

78. Найдите наибольшее значение выражения A. При каких значениях x и y оно достигается?

а) $A = \dfrac{7}{(x-2)^2 + (y+3)^2 + 1}$;

б) $A = \dfrac{5}{2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 5}$;

в) $A = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14}$;

г) $A = \dfrac{8}{x^2 + y^2 - 2x - 10y + 30}$.

79. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;

б) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$.

80. а) Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите его площадь, если она наибольшая из всех возможных.

б) Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите его площадь, если она наибольшая из всех возможных.

81. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3x-21}{x^2+x-6} + \dfrac{2x}{x+3}\right) \cdot \dfrac{x}{2x-5}$;

б) $\left(\dfrac{3}{x-4} + \dfrac{4x-6}{x^2-3x-4} + \dfrac{2x}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x}{2x-3}$.

82. а) При каких значениях параметра a трехчлен $3x^2 + (2a - 1)x + 12 - 6a$ имеет корни противоположных знаков?

б) При каких значениях параметра a трехчлен $2x^2 - (a - 3)x + 12 + 4a$ имеет корни противоположных знаков?

Уровень С

83. Найдите наибольшее значение выражения A. При каких значениях x и y оно достигается?

а) $A = 6y - 4x - x^2 - y^2$;

б) $A = 10x - 2y - x^2 - y^2 + 3$;

в) $A = 4x + 5 - 3x^2 - y^2 - 2xy$;

г) $A = 6 + 4y + 2xy - x^2 - 2y^2$.

84. а) Найдите наибольшее значение выражения $A = 5x^2 + 4xy - 5y^2$, если $2x - y = 1$.

б) Найдите наибольшее значение выражения $A = x^2 - 4xy + y^2$, если $x - y = 3$.

85. При каких значениях x выражение A принимает наименьшее значение?

а) $A = x^2(3x-2)^2 - 2x(3x-2) - 3$; б) $A = x^2(2x-5)^2 - 6x(2x-5) - 5$.

86. а) Стороны прямоугольника равны 11 см и 7 см. Большую его сторону уменьшили на a см, меньшую – увеличили на такое же число сантиметров. Найдите площадь полученного прямоугольника, если она наибольшая из всех возможных.

б) Стороны прямоугольника равны 13 см и 9 см. Большую его сторону уменьшили на a см, меньшую – увеличили на такое же число сантиметров. Найдите площадь полученного прямоугольника, если она наибольшая из всех возможных.

87. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$;

б) $y = \dfrac{-x^2 + 6x - 8}{2 - x}$;

в) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{2x - x^2}$;

г) $y = \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$;

д) $y = \dfrac{(x-1)(x^2 - x - 6)}{x^2 + x - 2}$;

е) $y = \dfrac{(x+3)(x^2 - 3x + 2)}{x^2 + x - 6}$.

88. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2$;
б) $x^2 - 2ax - 3a^2 + 4a - 1$;
в) $2a^2 - x^2 - ax - a + x$;
г) $x^2 - 2a^2 - ax - x - a$;
д) $x^2 + 3ax + 4x - 6a - 12$;
е) $x^2 - 2ax - 2x - 6a - 15$;
ж) $x(x+1)(x+2)(x+3) - 15$;
з) $(x+3)(x-2)(x+1)x + 8$;
и) $x^4 + 4$;
к) $4x^4 + 1$.

89. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2x^2 + xy - 6y^2}{3y - 2x}$;

б) $\dfrac{3y^2 + 2xy - 8x^2}{4x - 3y}$;

в) $\dfrac{10y^2 + 9y - 9}{6y^2 + 11y + 3}$;

г) $\dfrac{9y^2 - 6y - 8}{6y^2 - 5y - 4}$.

90. а) Сократите дробь $\dfrac{x^2 + 3xy - 4y^2}{x^2 - 9xy + 8y^2}$ и вычислите ее значение при $\dfrac{x}{y} = 2$.

б) Сократите дробь $\dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 - 5xy + 2x^2}$ и вычислите ее значение при $\dfrac{x}{y} = 3$.

91. Найдите значение выражения $\dfrac{x}{y}$, если:

а) $\dfrac{10x^2 - 13xy + 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 4$;

б) $\dfrac{9x^2 - 8xy - 3y^2}{2x^2 - 3y^2} = 2$;

в) $\dfrac{7x - y}{6x + 5y} = \dfrac{6x + 5y}{7x - y}$ и $xy < 0$;

г) $\dfrac{5x - 3y}{3x + 5y} = \dfrac{3x + 5y}{5x - 3y}$ и $xy < 0$.

92. Найдите значение выражения:

а) $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 4a + 3b$, если $a = \frac{3}{4}b$;

б) $9a^2 + 30ab + 25b^2 + 3a + 5b$, если $a = -\frac{5}{3}b$;

в) $25a^2 - 40ab + 16b^2 + 5a - 4b$, если $a = \frac{4b-1}{5}$;

г) $9a^2 + 12ab + 4b^2 + 9a + 6b$, если $a = -\frac{2b+3}{3}$.

93. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{4x}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-1}\right) : \frac{2x+4}{x^2-x-2} - \frac{x}{x-1}$;

б) $\left(\frac{6x}{x^2-x-2} + \frac{9}{x^2-4}\right) : \frac{2x+1}{x^2+3x+2} - \frac{x+13}{x-2}$.

94. Решите уравнение при всех значениях параметра a:

а) $(a^2 - a - 56)x = a^2 - 64$;
б) $(a^2 + 2a - 8)x = a^2 - 4$;
в) $(a^2 + 5a - 24)x = 2a^2 - 5a - 3$;
г) $(2a^2 - 5a - 3)x = 3a^2 - 10a + 3$.

95. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $2x^2 + 5x + 1$. Найдите значение выражения:

а) $x_1 + x_2$;
б) x_1x_2;
в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
г) $x_1^2 + x_2^2$;
д) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;
е) $x_1^3 + x_2^3$;
ж) $|x_1 - x_2|$.

96. Решите предыдущую задачу для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

97. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $3x^2 - 5x + 1$. Напишите квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, корни которого равны:

а) $2x_1$ и $2x_2$; б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$; в) $x_1 + x_2$ и x_1x_2.

98. Решите предыдущую задачу для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (где a, b, c – целые числа).

99. а) Найдите сумму корней многочлена $A(x) = 5p^2(x) + 4p(x)q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{6} - \frac{29}{6}$, $q(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{5x}{6} + \frac{71}{6}$.

б) Найдите сумму корней многочлена $A(x) = 8p^2(x) + 7p(x)q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} - \frac{13}{9}$, $q(x) = -\frac{x^2}{9} + \frac{8x}{9} + \frac{40}{9}$.

100. а) Найдите произведение корней многочлена $A(x) = 12p^2(x) - 11p(x)q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \frac{x^2}{13} + \frac{x}{13} - \frac{3}{13}$, $q(x) = \frac{x^2}{13} - \frac{12x}{13} - \frac{81}{13}$.

б) Найдите произведение корней многочлена $A(x) = 10p^2(x) + 9p(x)q(x) - q^2(x)$, если $p(x) = \frac{x^2}{11} + \frac{x}{11} - \frac{41}{11}$, $q(x) = -\frac{x^2}{11} + \frac{10x}{11} - \frac{14}{11}$.

101. а) Найдите все значения, которые может принимать выражение $A = 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 12x + 8y - 4$ при произвольных значениях x и y.

б) Найдите все значения, которые может принимать выражение $A = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 12x - 18y - 3$ при произвольных значениях x и y.

102. Найдите все значения, которые может принимать выражение $A = x^2 + y^2$, если:

а) $x - y = 1$; б) $x + y = 2$.

103. а) Найдите все значения параметра p, при которых квадратные трехчлены $2x^2 - (3p + 2)x + 12$ и $14x^2 - (9p - 2)x + 36$ имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра p, при которых квадратные трехчлены $(1 - 2p)x^2 - 6px - 1$ и $px^2 - x + 1$ имеют хотя бы один общий корень.

3. Квадратичная функция и ее график

Уровень А

104. а) Дана функция $y = \frac{1}{5}x^2$. Заполните таблицу.

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y						

Постройте график этой функции. Найдите наименьшее значение этой функции, а также промежутки ее возрастания и убывания.

б) Дана функция $y = -\frac{1}{4}x^2$. Заполните таблицу.

x	0	±1	±2	±3	±4
y					

Постройте график этой функции. Найдите наибольшее значение этой функции, а также промежутки ее возрастания и убывания.

105. а) Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 2x^2$ и сравните значения этих функций при $x = -2$ и $x = 2$. Каково множество значений каждой из этих функций?

б) Постройте в одной системе координат графики функций $y = -x^2$; $y = -\frac{1}{3}x^2$ и $y = -3x^2$ и сравните значения этих функций при $x = -3$ и $x = 3$. Каково множество значений каждой из этих функций?

106. а) Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой:

1) $y = 8$; 3) $y = 2x - 2$;

2) $y = 50$; 4) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

б) Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = -\frac{1}{3}x^2$ и прямой:

1) $y = -27$;
2) $y = -75$;
3) $y = 2x + 3$;
4) $y = \frac{1}{3}x - 2$.

107. а) Определите, принадлежит ли графику функции $y = -5x^2$ точка:

1) (2; –20);
2) (0,4; –0,8);
3) (–3; 45);
4) (–0,2; 0,2);
5) (–3; –45);
6) (–0,2; –0,2).

б) Определите, принадлежит ли графику функции $y = -10x^2$ точка:

1) (3; –90);
2) (0,1; –0,1);
3) (–2; –40);
4) (–0,5; 2,5);
5) (–2; –40);
6) (–0,5; –2,5).

108. а) С помощью параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси Oy постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 4$;
2) $y = x^2 - 1$;
3) $y = x^2 + 1$;
4) $y = x^2 + 3$.

б) С помощью параллельного переноса графика функции $y = -x^2$ вдоль оси Oy постройте графики функций:

1) $y = 2 - x^2$;
2) $y = -x^2 + 3$;
3) $y = -x^2 - 1$;
4) $y = -x^2 - 4$.

109. а) С помощью параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси Ox постройте графики функций:

1) $y = (x + 2)^2$;
2) $y = (x + 3)^2$;
3) $y = (x - 1)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$.

б) С помощью параллельного переноса графика функции $y = -x^2$ вдоль оси Ox постройте графики функций:

1) $y = -(x + 4)^2$;
2) $y = -(x + 3)^2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x - 1)^2$.

110. а) С помощью двух параллельных переносов графика функции $y = \frac{1}{3}x^2$ постройте графики функций:

1) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 - 1$;
2) $y = \frac{1}{3}(x + 3)^2 + 1$;
3) $y = \frac{1}{3}(x + 3)^2 - 2$;
4) $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 + 2$.

б) С помощью двух параллельных переносов графика функции $y = 2x^2$ постройте графики функций:

1) $y = 2(x - 1)^2 - 3$;
2) $y = 2(x + 1)^2 + 1$;
3) $y = 2(x + 1)^2 - 2$;
4) $y = 2(x - 1)^2 + 4$.

111. Определите, в каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = -(x - 1)^2 + 1$;
б) $y = (x - 3)^2 - 1$;
в) $y = -(x + 2)^2 + 3$;
г) $y = (x + 2)^2 - 2$.

112. Определите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 10x + 20$; в) $y = -x^2 + 4x + 15$;

б) $y = x^2 + 6x - 11$; г) $y = -x^2 + 8x + 3$.

113. Напишите уравнение оси симметрии параболы:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; в) $y = -x^2 + 2x + 8$;

б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 8$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$.

114. Постройте схематически график функции:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; в) $f(x) = 6x - 2x^2$;

б) $f(x) = x^2 - 4x - 12$; г) $f(x) = 4x - 2x^2$.

Найдите:

1) нули функции:

2) промежутки знакопостоянства;

3) множество значений функции;

4) наибольшее и наименьшее значения функции;

5) промежутки возрастания и убывания.

115. Найдите точки пересечения параболы с осями координат:

а) $y = -x^2 - 2x + 3$; в) $y = 2x^2 - 3x + 1$;

б) $y = x^2 + 4x + 3$; г) $y = -x^2 + 5x - 6$.

Уровень В

116. Постройте параболу с вершиной в точке $A(x_0, y_0)$ и проходящую через точку $B(x_1, y_1)$, если:

а) $A(0; -3)$; $B(3; 24)$; б) $A(0; 4)$; $B(-5; -46)$.

117. а) Постройте график функции $y = 3x^2 - 6x + a$, если наименьшее значение этой функции равно:

1) -2; 2) 10.

б) Постройте график функции $y = -2x^2 - 4x + a$, если наибольшее значение этой функции равно:

1) -5; 2) 7.

118. а) Постройте график функции $y = -x^2 - x + 6$ при $x \in [-2; 3]$ и найдите, используя график, наибольшее и наименьшее значения функции на этом отрезке.

б) Постройте график функции $y = x^2 - 2x + 3$ при $x \in [0; 3]$ и найдите, используя график, наибольшее и наименьшее значения функции на этом отрезке.

119. Постройте график функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, -4 < x < 2, \\ 5, x \le -4; x \ge 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, 0 < x < 4, \\ -5, x \le 0; x \ge 4. \end{cases}$

120. а) Найдите, при каких значениях параметра a график функции $y = f(x)$ расположен в первой и второй координатных четвертях:

1) $y = 2x^2 - 3x + a$; 2) $y = 0{,}4x^2 + 5x - a$.

б) Найдите, при каких значениях параметра a график функции $y = f(x)$ расположен в третьей и четвертой координатных четвертях:

1) $y = -2x^2 - 5x - a$; 2) $y = -0{,}5x^2 + 3x + a$.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru