Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Значительная часть настоящей книги посвящена изложению результатов исследования математической модели стержневого элемента консольного типа, представленной нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. В главе 2 рассматривается метод аналитической теории дифференциальных уравнений, позволяющий найти аналитическое приближенное решение для этого нелинейного дифференциального уравнения. Приведены теоремы, позволяющие оценить точность найденного приближенного решения и построить его аналитическое продолжение. В главе 3 приведены расчеты для консольной балки на статическое приложение нагрузки. Для проведения вычислений используется система Mathematica и программный комплекс ЛИРА 10. Расчеты для стальной консольной балки на внезапное приложение нагрузки, а также их сравнение приводятся в главе 4. Помимо системы Mathematica и программного комплекса ЛИРА 10, используется программа SCAD++. В главе 5 излагаются возможности системы Mathematica, программного комплекса ЛИРА 10 программы SCAD++, а также их использование в строительных моделях. Показаны условия численной реализации методов и процедур. В приложениях приведены листинги некоторых разработанных авторских программ.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В монографии рассматриваются различные модели строительных конструкций и приведены примеры решений на основе разработанных математических и компьютерных моделей.

Приведем основные понятия и определения, используемые в монографии.

Модель — образ (или отражение) какого-либо процесса или явления, полученный с помощью специальных средств. *Специальными средствами* могут быть средства: математические, технические, физические, компьютерные, имитационные и т.д. Поясняя в определении «модель» специальные средства, будем иметь в виду определения соответствующих моделей. Например:

компьютерная модель — образ (или отражение) какого-либо процесса или явления, полученный с помощью компьютерных средств;

математическая модель — образ (или отражение) какого-либо процесса или явления, полученный с помощью математических средств.

Показатель качества математической модели — показатель, который во многом зависит от основы математической модели и может выражаться как в безразмерных, так и в размерных единицах.

Погрешность математической модели делится на две составляющие: погрешность самой математической модели и погрешность методов исследования математических моделей. Выражается в размерных единицах.

Величина погрешности самой математической модели зависит от квалификации разработчика и является регулируемой.

Погрешность методов исследования моделей зависит от характера метода исследования: численного или аналитического. Более точные результаты соответствуют аналитическим методам исследования. С другой стороны, не всегда удается получить аналитический метод исследования и приходится ограничиться численным методом исследования моделей. В этом случае можно воспользоваться существующей теорией погрешности используемого численного метода.

Идентификация модели — выбор переменных модели, а также параметров ее уравнений с последующей их оценкой на основе статистических данных, полученных в результате наблюдения, эксперимента или иным способом.

Моделирование — процесс получения моделей.

Математическое моделирование — метод исследования процессов или явлений путем построения их математических моделей. Исследуемые процессы можно классифицировать в зависимости от характера элементов, определяющих процесс.

Статический процесс — процесс, содержащий только статические элементы.

Динамический процесс — процесс, содержащий динамические элементы. Является более сложным, чем статический процесс. Это находит отражение как в самой математической модели процесса, так и в методах ее исследования

Неподвижные особые точки — это особые точки интегралов дифференциальных уравнений, положение которых не зависит от начальных данных, определяющих эти интегралы.

Подвижные особые точки — это особые точки интегралов дифференциальных уравнений, положение которых зависит от начальных данных, определяющих эти интегралы.

Априорная оценка погрешности — оценка погрешности, полученная на основании математически доказанных теоретических рассуждений.

Апостериорная оценка погрешности — это предполагаемая оценка погрешности, позволяющая оптимизировать априорную оценку с помощью ряда дополнительных расчетов. Актуальна только при наличии априорной оценки.

Выводы: основу научных исследований в монографии составляют аналитические методы и решения теории дифференциальных уравнений. Поэтому в главе 1 особое внимание уделено формулировке математических терминов и определений, которые также будут полезны читателю, знакомому в основном с формулировками, употребляемыми при использовании программных комплексов для расчета строительных конструкций.

Глава 2
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2.1. Математические модели

Математической модели отводится особая роль как одному из строгих и точных методов обоснования проводимых исследований в различных областях деятельности человека: для исследования сложных технических, экономических, биологических процессов, в медицине и расчете строительных конструкций, что подтверждается многочисленными публикациями [1–39]. Только математическая модель позволяет получать прогнозы, качество которых напрямую зависит от качества самой математической модели.

Классификация моделей зависит от признака, по которому она осуществляется. На первом этапе в качестве признака определим математические средства получения моделей. На втором этапе рассмотрим основу математической модели. Приведем классификацию математических моделей в зависимости от ее основы:

1) математическая модель балансовых задач;
2) математическая модель линейной торговли;
3) математическая модель распределительных задач;
4) математическая модель оптимизационных задач;
5) математическая модель статистических задач;
6) математическая модель, основанная на дифференциальных и интегральных уравнениях, в том числе и в задачах расчета строительных конструкций.

В более сложных приложениях используются математические модели, в которых соотношения, описывающие связи между переменными объекта, задаются в виде определенных уравнений. Такие модели обычно называют *аналитическими моделями*. Математические модели представляют собой формализованные математические описания, отражающие с требуемой точностью процессы, происходящие в исследуемом объекте. Они могут быть снабжены набором поясняющих терминов (линейные, нелинейные, дискретные, непрерывные, детерминированные, стохастические и т.д.) в зависимости от типа исследуемых уравнений [40].

Каждый вид математической модели обоснован математической теорией, включающей строгое теоретическое обоснование получения модели и необходимые формулы для расчетов по этой модели. Для некоторых моделей возникает необходимость решения ряда математических задач при проведении расчетов. Для решения математических задач могут применяться аналитические приближенные методы и численные приближенные методы. Более точные результаты дают первые методы.

Процесс моделирования независимо от вида задачи состоит из следующих этапов:

1) подробный разбор всех этапов исследуемого процесса или явления;

2) выбор вида математической модели в зависимости от характера исследуемого процесса или явления;

3) разработка математической модели и ее теоретическое обоснование для исследуемого процесса или явления;

4) корректировка математической модели с учетом особенностей исследуемого процесса или явления;

5) проведение численных экспериментов построенной математической модели и проверка адекватности полученных результатов исследуемому процессу или явлению.

2.2. Развитие аналитических методов

Для описания ряда процессов и явлений применяют математические модели на основе дифференциальных уравнений. Если в некоторых случаях модели представлены линейными дифференциальными уравнениями, то сложностей в исследовании таких моделей не возникает в силу достаточно полной разработанной теории дифференциальных уравнений и методов решения как точных, так и приближенных, что подтверждается рядом публикаций [41–44]. Следует отметить, что на данный момент программные комплексы для расчетов строительных конструкций с помощью метода конечных элементов, как правило, ориентированы на математические модели, основанные на линейных дифференциальных уравнениях, будь то обыкновенные дифференциальные уравнения или уравнения в частных производных. Существующая классическая теория дифференциальных уравнений применима лишь к линейным дифференциальным уравнениям. В случае нелинейных дифференциальных уравнений актуально развитие математической теории, в частности доказательство теорем существования и единственности решения нелинейных дифференциальных уравнений как в области аналитичности, так и в окрестности подвижных особых точек. Так как нелинейные дифференциальные уравнения с подвижными особыми точками относятся к классу уравнений, в общем случае не разрешимых в квадратурах, то задача разработки и развития метода аналитического приближенного решения, позволяющая провести исследование модели, на данный момент также является актуальной. В последнее время для решения задачи жизнестойкости зданий и строительных сооружений, а также для расчета строительных конструкций стали рассматриваться математические модели, основанные на нелинейных дифференциальных уравнениях [15, 19, 45–47]. Для исследования этих моделей применялся математический аппарат, предложенный в работах [16, 48–60].

2.3. Аналитическое решение нелинейной математической модели консольной конструкции

Рассмотрим один из вариантов нелинейной математической модели для объектов консольного типа. Стержневые конструкции, а также конструкции консольного типа являются широко распространенными, в том числе в строительстве. Математическому и численному моделированию таких конструкций посвящено большое количество научных исследований. Необходимо отметить, что именно реальные объекты, которые используются в строительной, аэрокосмической или нефтяной отраслях, при определенных условиях можно рассматривать и рассчитывать как консольную конструкцию. Различные подходы к решению таких задач, приведенные в работах [41; 42; 44], указывают на необходимость получения аналитического решения с заданной точностью для нелинейной математической модели конструкции консольного типа.

Дифференциальное уравнение изгиба консольного стержня, представленного на рис. 2.1, нелинейное с подвижными особыми точками, в которых решение терпит разрыв, что является при определенных условиях физическим разрушением (переломом) консоли от заданной сосредоточенной силы.

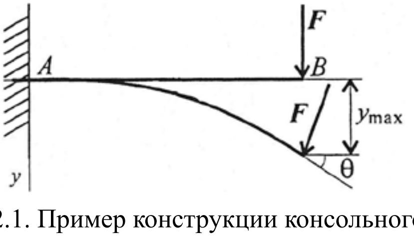

Рис. 2.1. Пример конструкции консольного типа

Применение метода мажорант к решению поставленной задачи позволяет, в отличие от классического подхода, установить границы области решения и построить аналитическое приближенное решение задачи с заданной точностью. В результате можно вычислить перемещение в любой точке консольной конструкции и рассчитать напряженно-деформированное состояние объекта. Высотное сооружение при определенных допущениях и, например, с наличием «ядер жесткости», также может рассматриваться в качестве такого объекта исследования. Математическая модель представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ_z}\sqrt{(1+(y')^2)^3}, \tag{2.1}$$

где M_x — изгибающий момент; EJ_z — жесткость конструкции постоянного сечения. Уравнение (2.1) допускает упрощение конструкции с помощью замены переменных $y' = Y$, $M(x) / (EJ_z) = \Psi(x)$:

$$Y' = \Psi(x)\sqrt{(1+Y^2)^3}. \tag{2.2}$$

Представленная математическая модель (2.1), и, соответственно, (2.2), может отражать в квазистатической форме процесс воздействия на объект различных внешних нагрузок: внезапной ударной волны, контактного взаимодействия с движущимся объектом и т.д. Такого рода уравнения обладают подвижными особыми точками, в которых решение терпит разрыв. С физической точки зрения получаем излом и разрушение объекта. Подвижная особая точка, как правило, указывает на место разрушения объекта. Рассмотрим математическое обобщение уравнения (2.2)

$$Y' = \Psi(x)\sqrt{(1+Y^2)^3} + M_F, \tag{2.3}$$

где M_F — дополнительный внутренний изгибающий момент от динамической составляющей внешней нагрузки (некоторая функция) по аналогии с примером в работе [61].

Уравнения (2.2) и (2.3) являются нелинейными с подвижными особыми точками одного характера. Если уравнение (2.2) возможно разрешить в квадратурах в общем виде, то уравнение (2.3) в общем случае не разрешимо в квадратурах. Следует отметить, что попытки линеаризации уравнения (2.3) приводят к ошибкам в расчетах, что математически обосновано в работе [62] для трехмерного случая. Область поиска решения этих уравнений состоит из области аналитичности и окрестности подвижной особой точки. Заметим, что разрешимость в квадратурах в общем виде требует проведения численных расчетов с использованием существующих численных методов [41; 42; 44]. В силу специфики подвижных особых точек, существующие численные методы не позволяют получать достоверный результат, так как они основаны на производных от искомой функции, а последняя связана с конечными разностями первого порядка. Подвижные особые точки требуют особого подхода, связанного с характером особой точки. На первом этапе рассмотрена область аналитичности, для которой была развита идея, предложенная в работе [48] и успешно апробированная для ряда классов нелинейных дифференциальных уравнений [49–51; 53; 56]. Отметим, что существующая классическая теорема Коши в данном случае не работает.

Дополним уравнение (2.3) начальным условием

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{2.4}$$

Сформулируем и докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши (2.3) – (2.4). При доказательстве теоремы воспользуемся авторской технологией [49–51].

Теорема 2.1. Пусть:

1) функции $\psi(x)$ и $M_F \in C^\infty$ в области $|x - x_0| < \rho_1$, $\rho = \text{const} \neq 0$;

2) существуют $M_{1,n}$ и $M_{2,n}$, что $\left|\frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \le M_{1,n}$, $\left|\frac{M_F^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \le M_{2,n}$ $\forall\ n = 0, 1, 2, ...$, где $M_{1,n}$ и $M_{2,n}$ являются некоторыми константами.

Тогда существует единственное решение задачи (2.3) – (2.4) в виде

$$Y(x) = \sum_0^\infty C_n (x - x_0)^n \tag{2.5}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$, где $\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{3(M+1)^3}\right\}$; $M = \max\{|Y(x_0)|, M_{1,n}, M_{2,n}\}$, $n = 0, 1, 2$.

Доказательство. По условию теоремы имеем

$$\psi(x) = \sum_0^\infty D_n (x - x_0)^n,\ M_F(x) = \sum_0^\infty A_n (x - x_0)^n. \tag{2.6}$$