ПРЕДИСЛОВИЕ

Причиной, побудившей авторов обратиться к написанию данной книги, послужило значительное увеличение объемов геодезических работ, связанных с ведением государственного кадастра недвижимости, и практическое отсутствие литературы по методам определения площадей.

Государственный кадастр недвижимости представляет собой систематизированный свод сведений об учтенном недвижимом имуществе, а также сведений о прохождении Государственной границы Российской Федерации, о границах между субъектами Российской Федерации, границах муниципальных образований, границах населенных пунктов, о территориальных зонах и зонах с особыми условиями использования территорий, иных сведений.

Государственный кадастр недвижимости служит обеспечению государственных гарантий прав собственности на недвижимое имущество и возможности их реализации при различных сделках (купле-продаже, залоге, дарении, наследовании и др.), обеспечению эффективного сбора налогов на недвижимость и эффективному и рациональному использованию недвижимости.

Объектами недвижимости являются земельные участки, здания, сооружения, помещения, объекты незавершенного строительства. Основной пространственной единицей кадастра объектов недвижимости является земельный участок. Под земельным участком понимается часть поверхности земли (в том числе поверхностный почвенный слой), границы которой описаны и удостоверены в установленном порядке уполномоченным государственным органом, а также все, что находится над и под поверхностью земельного участка, если иное не предусмотрено федеральными законами о недрах, об использовании воздушного пространства и иными федеральными законами.

Одним из основных сведений, вносимых в государственный кадастр недвижимости, является площадь объекта недвижимости.

Площадные характеристики участков, а также объектов в их пределах, используются для решения фискальных задач и учета земельных ресурсов и других объектов недвижимости по их количеству, распределения между собственниками и другими участниками рыночных отношений, а также служат основой для аналитической обработки с целью подготовки необходимых данных для принятия управленческих решений.

При совершении актов купли-продажи объектов недвижимости именно размер площади в значительной степени определяет рыночную цену объекта.

Основой для вычисления площадей служат результаты геодезических измерений. В большинстве случаев земельные участки и связанные с ними иные объекты недвижимости имеют многоугольную форму. Границы земельных участков закрепляют на местности межевыми знаками, координаты которых определяют геодезическими методами. Вычисление площадей подобных участков и объектов в их пределах выполняется преимущественно по плоским координатам их вершин. Методы таких вычислений разработаны в трудах Н. И. Козлова, Л. С. Хренова, В. Н. Ганьшина, Е. М. Ольховского, Н. А. Веденяшина и др. Выбор формул в значительной степени определялся требованиями простоты вычислений в условиях применения средств ручного счета и обеспечения при этом достоверных результатов. Определение площадей возможно и непосредственно по результатам их обмера, выполняемого измерением длин, углов или приращений координат, без вычисления координат вершин участка. В условиях, когда вычисления выполняются на персональных компьютерах, простота формул утрачивает прежнее значение.

Рассматривая площадь участка, различают следующие варианты: площадь земной поверхности с учетом рельефа, площадь горизонтальной проекции участка, площадь проекции участка на поверхность земного эллипсоида и, наконец, площадь изображения участка на плоскости картографической проекции (обычно — проекции Гаусса — Крюгера). Выбор варианта зависит от решаемой в каждом конкретном случае задачи. Так, при работе с картами и планами получают площадь изображения участка в проекции карты, которую принято называть геодезической площадью. Если при этом осевой меридиан проходит вблизи участка и за поверхность относимости принят средний уровень территории, значения геодезической площади и горизонтальной проекции площади практически не различаются.

В других случаях важным становится знание площади всей физической поверхности участка. В сельском хозяйстве важна как площадь горизонтальной проекции участка (она определяет количество растений, стоящих отвесно), так и площадь физической поверхности земли (она определяет объемы сельскохозяйственных работ).

Вычисление площадей объектов недвижимости необходимо сопровождать оценкой точности получаемых результатов. Оценка точности характеризует достоверность информации о площади, а также служит принятию верных решений об изменении первичных данных при повторных определениях площади.

Разработке способов определения и оценки точности площадей посвящены работы многих ученых, среди которых Ю. Г. Батраков, В. Д. Барановский, В. Н. Ганьшин, В. И. Гладких, А. В. Гордеев, Б. Н. Дьяков, Ю. А. Карпинский, А. А. Лященко, А. В. Маслов, Ю. К. Неумывакин, М. И. Перский, У. Д. Самратов, А. Г. Юнусов и др.

В книге систематически изложены вопросы теории и практические методы определения площадей земельных участков и оценки точности получаемых результатов на основе использования различной измерительной информации.

При подготовке книги использован практический опыт геодезического обеспечения кадастра объектов недвижимости, накопленный работниками ФГУП «Аэрогеодезия» и Московского и Петербургского государственных университетов путей сообщения.

В основу данной книги положена книга авторов [32], несколько измененная и дополненная. Части книги написаны: В. Н. Баландиным — раздел 5.1, 5.3; М. Я. Брынем — разделы 3.2, 4.3, 4.5; В. А. Коугия — предисловие и разделы 1.1, 2.3, 3.3, 6; А. Ю. Матвеевым — раздел 1.2; А. В. Юськевичем — разделы 2.1, 2.2; С. И. Матвеевым — раздел 7. Совместно написали: разделы 3.1 и 4.1 — В. Н. Баландин и М. Я. Брынь; разделы 4.2 и 4.4 — М. Я. Брынь и А. В. Юськевич; разделы 4.6 и 5.2 — М. Я. Брынь и А. Ю. Матвеев; раздел 5.4 — В. Н. Баландин и А. Ю. Матвеев.

Общее редактирование книги выполнено профессором В. А. Коугия.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам д. т. н., профессору С. С. Нехину и к. т. н., доценту Б. Н. Дьякову за ценные замечания, позволившие улучшить содержание книги.

1 СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ОСНОВЫ ОЦЕНКИ ИХ ТОЧНОСТИ

1.1. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ ОБЪЕКТОВ НЕДВИЖИМОСТИ

Площади земельных участков и других, связанных с ними объектов недвижимости вычисляют по результатам выполненных для этой цели измерений. В зависимости от стоящей задачи и требуемой точности измерения выполняют на местности или на плане.

Измерения на местности более трудоемки и требуют, как правило, существенных затрат средств и времени на выполнение работ, зависят от погодных условий, для их выполнения необходимы дорогостоящие геодезические приборы и достаточно высокая квалификация исполнителей. В то же время измерения, выполненные в натуре, позволяют вычислить площадь объекта с высокой точностью.

Вычисление площадей объектов недвижимости по результатам полевых геодезических измерений выполняют на компьютерах по заранее составленным программам. Наиболее распространенным является вычисление площади объекта недвижимости многоугольной формы по координатам его вершин. Для определения положения вершин, ограничивающих площади многоугольников, строят полигонометрические сети. При этом вершины многоугольников либо являются пунктами полигонометрических (или теодолитных) ходов, либо их координаты определяют от пунктов полигонометрии различного рода засечками — полярной, прямой, обратной, линейной, комбинированной. Координаты могут быть определены также и с помощью спутниковой геодезической аппаратуры. Определив координаты, вычисляют площадь объекта недвижимости и оценку ее точности. Формулы для таких вычислений приведены в разделе 2.

Возможно вычисление площади и без привязки границ объекта недвижимости к геодезической сети. Так, если с установленного в произвольной точке тахеометра видны все ограничивающие его знаки, то, измерив связывающие прибор и знаки горизонтальные направления и расстояния, получают положения вершин, выраженные в локальной полярной системе координат. Это позволяет выполнить требуемое вычисление площади. При использовании электронного тахеометра вместо направлений и расстояний результаты измерений можно получить в виде приращений прямоугольных координат, выраженных в той же локальной системе, что упрощает вычислительные формулы.

Если для определения площади по границам объекта недвижимости прокладывается ход, то также можно вычислить площадь без координатной привязки. При этом в случае использования электронного тахеометра, регистрируя вместо углов и расстояний приращения координат между вершинами хода, можем вычислить площадь по этим приращениям. Пояснения по этим методам даны в разделе 3.

В большинстве случаев земельные участки и другие объекты недвижимости представляют собой четырехугольники, чаще неправильной, а иногда и правильной прямоугольной формы. На этот случай в разделе 4 разработаны упрощающие вычисления формулы для четырехугольников и треугольников. Знание этих формул полезно и в том случае, если для определения площади объект с границами сложной формы был разбит на простые части — треугольники и четырехугольники.

Для определения площади земельного участка путем *измерений на плане* требуется наличие картографических материалов — плана местности с изображением границ участка. Измерение площадей на планах выполняют с помощью планиметров, механических или электронных, или современных компьютерных технологий, с использованием дигитайзеров или сканеров. С помощью дигитайзера в компьютер вводятся координаты точек на границах участка, по которым по стандартной программе вычисляется его площадь. С помощью сканера в компьютер вводится растровое изображение участка, которое высвечивается на экране дисплея. На этом изображении оператор указывает границы участка, после чего обозначенная площадь вычисляется автоматически по соответствующей программе. Так же площадь измеряется и при наличии электронной карты местности, которая хранится на магнитном носителе и вводится в компьютер через стандартные устройства ввода.

Измерения на плане или электронной карте по сравнению с измерениями на местности связаны с меньшими трудовыми затратами, могут быть выполнены в значительно более короткие сроки, но обладают существенно меньшей точностью. Поэтому к вычислениям площадей по результатам измерений на плане обращаются в тех случаях, когда высокая точность вычисления площади не обязательна.

1.2. ОСНОВЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПЛОЩАДЕЙ

Площади объектов недвижимости вычисляют, используя результаты измерений, выполненных на местности или картографических материалах (планах, картах). Измеряемыми величинами в зависимости от выбранного способа являются координаты, разности координат, горизонтальные углы, расстояния и другие величины. Таким образом, вычисляемые площади представляют собой функции результатов измерений. Ошибки в результатах измерений сказываются на точности вычисления площадей.

Обозначим $P_1, P_2, \ldots, P_k$ площади объектов 1, 2, ..., k; $U = [x, y, \ldots, u]^T$ вектор результатов измерений и напишем следующий вектор P — функцию от результатов измерений:

$$P(U) = \begin{bmatrix} P_1(x, y, \ldots, u) \\ P_2(x, y, \ldots, u) \\ \ldots \\ P_k(x, y, \ldots, u) \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Продифференцируем вектор P по всем переменным. Получим

$$dP = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_1}{\partial u} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_2}{\partial u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial P_k}{\partial x} & \frac{\partial P_k}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_k}{\partial u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ \ldots \\ du \end{bmatrix}.$$

Заменим бесконечно малые приращения — дифференциалы — истинными погрешностями и обозначим

$$\Delta_P = \begin{bmatrix} \Delta_{P_1} \\ \Delta_{P_2} \\ \ldots \\ \Delta_{P_k} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_1}{\partial u} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_2}{\partial u} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial P_k}{\partial x} & \frac{\partial P_k}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial P_k}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad \Delta_U = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \ldots \\ \Delta u \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

Полученную систему k линейных уравнений запишем так:

$$\Delta_P = F \cdot \Delta_U. \qquad (1.3)$$

От истинных ошибок измерений Δx, Δy, ..., Δu — компонентов вектора Δ_U, на практике не известных, перейдем к более устойчивым статистическим характеристикам точности, а именно выведем формулу вычисления ковариационной матрицы площадей P_1, P_2, ..., P_k по ковариационной матрице вектора Δ_U ошибок результатов измерений.

Ковариационная матрица вектора Δ_U имеет вид

$$K_U = \begin{bmatrix} m_x^2 & K_{xy} & \ldots & K_{xu} \\ K_{xy} & m_y^2 & \ldots & K_{yu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{xu} & K_{yu} & \ldots & m_u^2 \end{bmatrix}. \qquad (1.4)$$

На главной диагонали матрицы расположены дисперсии (квадраты средних квадратических погрешностей m_x^2, m_y^2, ..., m_u^2), а вне главной диагонали — ковариации.

Согласно определениям дисперсии и ковариации напишем следующие формулы для элементов ковариационной матрицы вектора P [6, 19]:

$$m_{P_i}^2 = M[\Delta_{P_i}^2] = M[(P_i - \bar{P}_i)^2], \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.5}$$

$$K_{P_iP_j} = M[\Delta_{P_i}\Delta_{P_j}] = M[(P_i - \bar{P}_i)(P_j - \bar{P}_j)],$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, k; i \neq j), \tag{1.6}$$

где M — знак математического ожидания и $\bar{P}_i = M[P_i]$, $\bar{P}_j = M[P_j]$.

Объединяя скалярные выражения (1.5) и (1.6) со всеми значениями индексов i и j в одно матричное выражение, запишем формулу искомой ковариационной матрицы:

$$K_P = M[(P - \bar{P})(P - \bar{P})^T] = M[(\Delta_P - \bar{\Delta}_P)(\Delta_P - \bar{\Delta}_P)^T].$$

Преобразуем полученное равенство с учетом (1.3):

$$\begin{aligned} K_P &= M[(F\Delta_U - M(F\Delta_U))(F\Delta_U - M(F\Delta_U))^T] = \\ &= M[F(\Delta_U - \bar{\Delta}_U)(\Delta_U - \bar{\Delta}_U)^T F^T] = \\ &= F \cdot M[(\Delta_U - \bar{\Delta}_U)(\Delta_U - \bar{\Delta}_U)^T] \cdot F^T = \\ &= F K_{\Delta_U} F^T. \end{aligned}$$

Учитывая, что $K_{\Delta_U} = K_U$, получим окончательно формулу для оценки точности векторной функции, называемую иначе правилом переноса погрешностей:

$$K_P = F K_U F^T. \tag{1.7}$$

Вычисленная по формуле (1.7) ковариационная матрица имеет следующую структуру, аналогичную (1.4):

$$K_P = \begin{bmatrix} m_{P_1}^2 & K_{P_1P_2} & \ldots & K_{P_1P_k} \\ K_{P_1P_2} & m_{P_2}^2 & \ldots & K_{P_2P_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{P_1P_k} & K_{P_2P_k} & \ldots & m_{P_k}^2 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим важные для практики вычисления площадей частные случаи.

При вычислении оценки точности определения площади только одного участка вектор P (1.1) состоит из единственного элемента и становится скаляром. При этом формула (1.7) приобретает вид

$$m_P^2 = FK_U F^T, \tag{1.9}$$

где F — строка производных:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \dots & \frac{\partial P}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

Если, кроме того, ошибки результатов измерений x, y, ..., u являются независимыми, то их ковариации обращаются в нуль и ковариационная матрица (1.4) становится диагональной:

$$K_U = \begin{bmatrix} m_x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_y^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_u^2 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

При этом формула (1.7) еще упрощается и принимает вид

$$m_P^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)^2 m_u^2. \tag{1.11}$$

Отметим, что значения недиагональных элементов ковариационных матриц связаны со значениями коэффициентов корреляции по формуле

$$K_{ij} = r_{ij} m_i m_j,$$

где r_{ij} $(i, j = x, y, \dots, u)$ — коэффициенты корреляции соответствующих индексам величин.

Тогда ковариационную матрицу вектора результатов измерений U вместо (1.4) можно представить в следующем виде:

$$K_U = \begin{bmatrix} m_x^2 & r_{xy} m_x m_y & \dots & r_{xu} m_x m_u \\ r_{xy} m_x m_y & m_y^2 & \dots & r_{yu} m_y m_u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xu} m_x m_u & r_{yu} m_y m_u & \dots & m_u^2 \end{bmatrix}.$$

Ковариации могут быть использованы для вычисления коэффициентов корреляции. Так, по элементам ковариационной матрицы (1.8) можно вычислить коэффициенты корреляции r между составляющими площадями P_i и P_j:

$$r_{P_i P_j} = \frac{K_{P_i P_j}}{\sqrt{K_{P_i P_i} K_{P_j P_j}}}, \tag{1.12}$$

и сформировать матрицу коэффициентов корреляции между элементами оцениваемого вектора P:

$$R_P = \begin{bmatrix} 1 & r_{P_1 P_2} & \dots & r_{P_1 P_k} \\ r_{P_2 P_1} & 1 & \dots & r_{P_2 P_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{P_k P_1} & r_{P_k P_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В заключение изложим порядок действий при практическом решении задач оценки точности вычисления площадей P_1, P_2, ..., P_k с использованием рекомендованных выше формул [21, 23].

1. Дифференцирование формул, использованных при вычислении площадей P_1, P_2, ..., P_k, по всем измеренным величинам x, y, ..., u. Вычисление значений частных производных по полученным при дифференцировании формулам и составление из них матрицы частных производных F.

2. Вычисление по формуле (1.7) ковариационной матрицы K_P площадей P_1, P_2, ..., P_k.

3. Вычисление средних квадратических ошибок m_{P_i} площадей P_1, P_2, ..., P_k как квадратных корней из диагональных элементов матрицы K_P, а в необходимых случаях и вычисление коэффициентов корреляции по формуле (1.12).

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПЛОЩАДЕЙ ОБЪЕКТОВ НЕДВИЖИМОСТИ МНОГОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПО КООРДИНАТАМ ВЕРШИН

2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ОБЪЕКТА МНОГОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПО ПЛОСКИМ КООРДИНАТАМ ЕГО ВЕРШИН

Чаще всего площадь участка или иного объекта недвижимости многоугольной формы вычисляют по координатам вершин ограничивающего объект многоугольника.

Для вывода необходимых формул рассмотрим объект четырехугольной формы (рис. 2.1). Вершины четырехугольника пронумерованы по ходу часовой стрелки и имеют координаты: вершина *1* — координаты x_1, y_1, вершина *2* — координаты x_2, y_2, вершина *3* — координаты x_3, y_3, вершина *4* — координаты x_4, y_4. Из вершин четырехугольника опустим перпендикуляры на оси координат. Площадь P объекта можно определить как разность площадей двух пятиугольников, $P = P_{A123D} - P_{A143D}$. В свою очередь, каждый из пятиугольников состоит из двух трапеций, поэтому $P_{A123D} = P_{A12B} + P_{B23D}$; $P_{A143D} = P_{C43D} + P_{A14C}$.

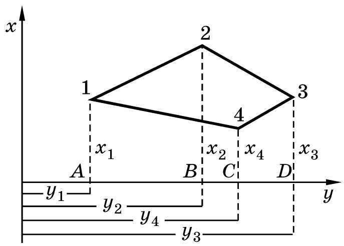

Рис. 2.1
К определению площади четырехугольника по координатам

Выразив площадь каждой трапеции как произведение полусуммы параллельных сторон на высоту и удвоив полученные результаты, будем иметь

$$2P = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) - (x_3 + x_4)(y_3 - y_4) - (x_4 + x_1)(y_4 - y_1).$$

Выполнив умножение и приведение подобных членов, получим

$$2P = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \\ + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_1 - x_1y_4. \quad (2.1)$$

Если в полученной формуле вынести за скобки общие абсциссы, то получим

$$2P = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)$$

или, в общем виде,

$$2P = \sum_{i=1}^{4} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Здесь предполагается, что если $i = 1$, то $i - 1 = 4$, а если $i = 4$, то $i + 1 = 1$.

Распространяя сделанный вывод на любой n-угольник, напишем [14, 31]

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}). \quad (2.2)$$

В этой формуле, если $i = 1$, то $i - 1 = n$, и если $i = n$, то $i + 1 = 1$.

Таким образом, удвоенная площадь объекта многоугольной формы равна сумме произведений абсциссы каждой вершины на разность ординат последующей и предыдущей вершин.

Выражение (2.1) можно преобразовать таким образом, чтобы первыми множителями были ординаты. Тогда получим

$$2P = y_1(x_4 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + y_4(x_3 - x_1)$$

или, для n-угольника,

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1}). \quad (2.3)$$

Здесь, как и выше, если $i = 1$, то $i - 1 = n$, и если $i = n$, то $i + 1 = 1$.

Вычисления по формулам (2.2) и (2.3) дают одинаковый результат, и на практике может использоваться любая из них.

При выполнении вычислений на микрокалькуляторах во избежание ошибок результаты вычислений можно продублировать по формулам, в которые наряду с координатами входят и приращения координат [12]. Приведем вывод таких формул. Запишем выражение (2.2) так:

$$2P = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_i + y_i - y_{i-1}),$$

или

$$2P = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_{i-1}.$$

С учетом того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta y_{i-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i+1} \Delta y_i$, будем иметь

$$2P = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_i + \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} \Delta y_i. \tag{2.4}$$

Формулу (2.4) можно записать так:

$$2P = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i (x_i + x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i (x_i + x_i + \Delta x_i),$$

или

$$2P = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i,$$

поэтому окончательно имеем

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i. \tag{2.5}$$

2.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПЛОЩАДИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КООРДИНАТАМ ВЕРШИН ОБЪЕКТА НЕДВИЖИМОСТИ

Рассмотрим влияние погрешностей координат x_i, y_i вершин объекта недвижимости на результат вычисления площади по формуле (2.2)

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Продифференцируем выражение (2.2) по всем переменным. Получим