Содержание

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе резкого убыстрения темпов структурных, экономических и социальных преобразований во всех сферах общественной жизни в России все актуальнее становится проблема подготовки бакалавров нового качества по направлению «Образование и педагогические науки». Данное учебное пособие ориентировано на обеспечение высокого качества геометрической подготовки бакалавров по направлению «Образование и педагогические науки» в условиях сохранения её фундаментальности и соответствия потребностям личности и государства.

Цель учебного пособия – управление самостоятельной учебно-профессиональной деятельностью студентов на основе достижения требований ФГОС высшего образования укрупненной группы специальностей и направлений подготовки «Образование и педагогические науки» бакалавриата и магистратуры.

В основу конструирования учебного пособия положены следующие дидактические принципы:

– научность (означает достаточную глубину, корректность и достоверность изложения содержания учебного материала с учетом последних научных достижений);

– доступность (означает необходимость определения степени теоретической сложности и глубины изучения учебного материала сообразно возрастным и индивидуальным особенностям обучающихся);

– проблемность (определяется сущностью и характером учебно-познавательной деятельности);

– наглядность (предполагает необходимость учета чувственного восприятия изучаемых объектов, их макетов, моделей и изображений);

– сознательность (предполагает развитие самостоятельности и активизации деятельности обучающихся, обеспечение понимания конечных целей и задач учебной деятельности. В основу разработки учебного пособия положен деятельностный подход. Для повышения активности студентов учебное пособие генерирует разнообразные учебные ситуации, формулирует разнообразные вопросы, предоставляя обучающемуся возможность выбора той или иной траектории изучения геометрии и управления учебно-профессиональной деятельностью);

– систематичность и последовательность (означает обеспечение последовательного усвоения обучающимися определенной системы знаний по геометрии);

– методологическая направленность (предполагает формирование целостного знания о методологии процесса освоения геометрических знаний, обеспечивает познавательно-мировоззренческую, эвристическую, исследовательскую, креативную, прогностическую функции в деятельности будущего бакалавра по направлению 44.03.01 Педагогическое образование профиль: «Математика»;

– профессионально-практическая направленность (означает раскрытие направлений практического использования изучаемого материала в будущей профессиональной деятельности).

Учебное пособие соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование (уровень бакалавриата) и 44.04.01 Педагогическое образование (уровень магистратуры).

Особенностью данного пособия является методологическая и профессионально-практическая направленность. В его основе лежит идея методологического освоения геометрии, когда студенты самоопределяются по отношению к различным методам изучения геометрических вопросов и осуществляют собственную самостоятельную учебно-профессиональную деятельность. В учебном пособии содержится материал, который позволяет организовать различные виды самостоятельной учебно-профессиональной деятельности студента: выявление и активизацию личного опыта, связанного с умением управлять деятельностью обучающихся по усвоению математических понятий, математических предложений и их доказательств; самоопределение по отношению к имеющимся методам; рефлексивное осознание процесса изучения геометрии. Методологические задания, включенные в каждый раздел учебного пособия, ориентируют будущего учителя математики на собственную инновационную деятельность в обучении математике. Выделяются следующие виды методологических заданий: на выявление существенных признаков понятий, способов конструирования определений; на установление связи и отношения данного понятия с другими понятиями; на выяснение состава теоремы; на определение вида теоремы; на установление связи между теоремами; на выяснение состава доказательства теоремы; на определение вида доказательства теоремы и оформление доказательства теоремы.

Такие задания играют роль связующего звена между методической и математической подготовкой студентов. Кроме того, они вооружают будущего бакалавра по направлению 44.03.01 Педагогическое образование профиль: «Математика» общими приемами учебно-профессиональной деятельности.

Материалы учебного пособия прошли многолетнюю экспериментальную проверку в образовательном процессе вуза.

Ссылки приводятся по учебным пособиям из библиографического списка.

РАЗДЕЛ 1. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1. Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Координаты вектора

При построении курсов геометрии широко применяется понятие «вектор». Термин «вектор» (латинское слово «vector» означает «переноситель») был введен ирландским математиком и механиком Вильямом Роуаном Гамильтоном (1805-1865 гг.) в его «Лекциях о кватернионах» (1853 г.). Наряду с термином «вектор» Гамильтон ввел термины «vehend» («переносимое») и «vectum» («перенесенное»). Однако эти термины не нашли широкого применения. Вместо них стали употреблять соответственно «начало вектора» и «конец вектора». Современный вид векторному исчислению придали в конце XIX века американский физик Джозайя Виллард Гиббс в «Элементах векторного анализа» (1881-1884 гг.) и английский физик Оливер Хевисайд в «Электромагнитной теории» (1893 г.).

При построении геометрических теорий понятием вектора пользуются как определяемым понятием (например, при построении геометрической теории с помощью системы аксиом Гильберта) или как неопределяемым (например, в системе аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства). В школьном курсе геометрии вектор определяется как направленный отрезок. Однако такое определение требует уточнения. С этой целью мы обратимся ко второму варианту – вектор является основным понятием, так же как и точка.

Будем обозначать вектор буквой (или парой букв, в зависимости от ситуации) со стрелочкой сверху, например $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$. Множество векторов обозначим через V. На этом множестве каждой паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ поставим в соответствие третий единственный вектор $\vec{c}$, который назовем суммой первых двух, а само соответствие сложением векторов. Запишем это соответствие в виде $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Заметим, что само соответствие мы не определяем. Потребуем, чтобы сложение обладало следующими свойствами:

***A*₁**. Сложение должно быть коммутативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

***A*₂**. Сложение должно быть ассоциативно, т.е. для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

***A*₃**. На множестве V существует такой вектор $\vec{0}$, что равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ выполняется для любого вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{0}$ называют нулевым вектором.

***A*₄**. Для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор, обозначаемый -$\vec{a}$, такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Вектор -$\vec{a}$ называют противоположным для вектора $\vec{a}$.

Свойства $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$ называют аксиомами сложения векторов. Эти аксиомы задают алгебраическую структуру, известную под названием *коммутативная группа.* Таким образом, множество векторов с операцией сложения есть коммутативная группа.

Добавим к множеству векторов множество действительных чисел (скаляров) R. Возьмем некоторое число (скаляр) k и некоторый вектор $\vec{a}$ и поставим паре $(k, \vec{a})$ в соответствие некий единственный вектор $\vec{b}$ и запишем $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$. Заметим, что мы не говорим, как выбирается вектор $\vec{b}$. Таким образом, каждой паре $(k, \vec{a})$ соответствует свой единственный вектор $\vec{b}$. Это соответствие называют операцией умножения вектора на скаляр. Потребуем, чтобы эта операция умножения вектора на число (скаляр) обладала следующими свойствами для любых чисел и векторов:

$\boldsymbol{A_5}$. $1\ \vec{a} = \vec{a}$;

$\boldsymbol{A_6}$. $k_1 (k_2\ \vec{a}) = (k_1 k_2)\ \vec{a}$;

$\boldsymbol{A_7}$. $(k_1 + k_2)\ \vec{a} = k_1\ \vec{a} + k_2\ \vec{a}$ (распределительный закон умножения вектора на число относительно сложения чисел);

$\boldsymbol{A_8}$. $k\ (\vec{a} + \vec{b}) = k\ \vec{a} + k\ \vec{b}$ (распределительный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов).

Эти четыре свойства называют аксиомами умножения вектора на число (скаляр).

Определение 1.1.1. Множество векторов с операциями сложения векторов и умножения вектора на число (скаляр) называют векторным пространством над полем действительных чисел (над полем скаляров).

В это определение входит термин «поле». Дело в том, что действительные числа можно складывать, умножать, делить число на другое число, отличное от нуля, и они образуют алгебраическую структуру, называемую полем.

Если воспользоваться нашими обозначениями, структура векторного пространства записывается так: $\{V,\ R,\ +,\ \cdot\}$. Договоримся обозначать векторное пространство так же, как и множество векторов, т.е. V.

Изложенный выше подход к построению векторного пространства называется аксиоматическим. Представление об аксиоматическом методе построения теории заложено в школьных учебниках по геометрии.

Существует много конкретных множеств, на которых определены операции сложения и умножения таким образом, что для них указанные выше восемь аксиом выполняются. Их называют моделями векторного пространства. Здесь мы остановимся на одной из них, знакомой из школьных учебников по геометрии.

Определение 1.1.2. Отрезок называется направленным, если установлен порядок следования его концов.

Одна точка направленного отрезка называется началом, вторая – концом. Если отрезок $[AB]$ направленный и A – его начало, а B – конец, то такой отрезок обозначают так: $\overline{AB}$. Направленный отрезок $\overline{AA}$ называют нулевым направленным отрезком.

Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются одинаково (противоположно) направленными, если одинаково (противоположно) направлены лучи [AB) и [CD). Пишут $\overline{AB}\uparrow\uparrow(\uparrow\downarrow)\,\overline{CD}$.

Определение 1.1.3. Направленные отрезки называются эквиполентными, если они имеют одинаковое направление и равные длины.

Запись $\overline{AB} = \overline{CD}$ означает эквиполентность отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, то есть $|AB| = |CD|$ и $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$.

Из определения 1.1.3 следует, что эквиполентность есть отношение на множестве направленных отрезков, и оно обладает следующими свойствами.

1. Каждый направленный отрезок эквиполентен сам себе, то есть $\overline{AB} = \overline{AB}$ (рефлексивное свойство).

2. Если отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен отрезку $\overline{CD}$, то отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен отрезку $\overline{AB}$, то есть из $\overline{AB} = \overline{CD}$ следует $\overline{CD} = \overline{AB}$ (свойство симметрии).

3. Если отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен отрезку $\overline{CD}$ и отрезок $\overline{CD}$ эквиполентен отрезку $\overline{EF}$, то отрезок $\overline{AB}$ эквиполентен отрезку $\overline{EF}$ (транзитивное свойство).

Отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется отношением эквивалентности. Следовательно, эквиполентность есть отношение эквивалентности на множестве направленных отрезков и разбивает это множество на непересекающиеся классы (подмножества).

Определение 1.1.4. Вектором называется класс эквиполентных отрезков.

Заметим, что это определение отличается от того определения, которое дается в школьных учебниках. Это вызвано необходимостью корректного определения сложения векторов.

Направленный отрезок, принадлежащий данному вектору, называется его представителем. Вектор может быть задан любым своим представителем. Вектор, заданный нулевым отрезком, называется нуль-вектором.

Вектор (класс) обозначается одной буквой, над которой ставится стрелка $\vec{a}, \vec{b}$ и т. д. Если $\overline{AB} \in \vec{a}$, то вектор (класс) $\vec{a}$ также обозначают $\overrightarrow{AB}$.

Для векторов (классов) можно ввести операции сложения, вычитания, умножения на число через соответствующие операции над их представителями.

Определение 1.1.5. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с представителями $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ соответственно называется вектор $\vec{c}$ с представителем $\overline{AC}$. Сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ или $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Указанное правило нахождения суммы называют правилом треугольника (рис. 1).

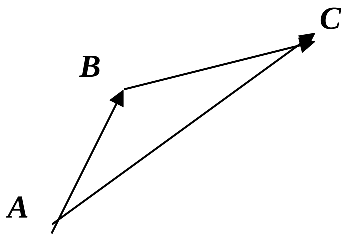

Рис. 1

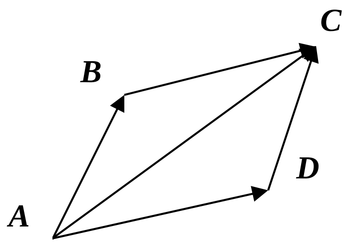

Рис. 2

Достроим треугольник *ABC* на рисунке 1 до параллелограмма *ABCD* (рис. 2). Исходя из свойств параллелограмма и определения 1.1.3., получаем:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Таким образом, для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно от некоторой точки A отложить представители этих векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ и на них построить параллелограмм *ABCD*. Направленный отрезок $\overline{AC}$ (диагональ параллелограмма) будет служить представителем искомой суммы. Это правило нахождения суммы двух векторов называется правилом параллелограмма. Итак, при нахождении суммы двух векторов можно использовать правило треугольника или правило параллелограмма.

Опираясь на определение эквиполентных отрезков, нетрудно показать, что вектор $\vec{c}$ не зависит от выбора точки A и сложение удовлетворяет четырем аксиомам сложения векторов.

Далее, на классах эквиполентных отрезков определим операцию умножения вектора (класса) на число.

Определение 1.1.6. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число k называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

1. $|\vec{c}| = |k||\vec{a}|$;

2. $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $k \geq 0$ и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $k < 0$.

Такой вектор $\vec{c}$ обозначают через $k\vec{a}$.

Нетрудно показать, что введенная операция умножения удовлетворяет четырем аксиомам умножения вектора на число.

Вывод. Множество классов эквиполентных отрезков, с установленными операциями сложения и умножения на число, образуют векторное пространство.

Вернемся теперь к нашему абстрактному векторному пространству и рассмотрим в нем свойства операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

Прежде всего напомним, что аксиомы сложения задают алгебраическую структуру, называемую коммутативной или абелевой группой. Примеров таких структур много. Векторное пространство – одна из них. Сформулируем это утверждение в следующем виде.

Теорема 1.1.1. Множество векторов с операцией сложения образует абелеву группу.

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами.

Теорема 1.1.2. В векторном пространстве нулевой вектор единственный.

Предположим, что кроме вектора $\vec{0}$ существует еще нулевой вектор $\vec{0}'$. Тогда, на основании третьей аксиомы будем иметь

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}', \text{ следовательно, } \vec{0} = \vec{0}'.$$

Теорема 1.1.3. Для всякого вектора противоположный вектор единственный.

Пусть для вектора $\vec{a}$ кроме вектора $(-\vec{a})$ существует еще один противоположный вектор $\vec{b}$, то есть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Тогда,

$$\vec{b}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}+(\vec{a}-\vec{a})=(\vec{b}+\vec{a})-\vec{a}=\vec{0}-\vec{a}=-\vec{a}.$$

что и требовалось доказать.

Определение 1.1.7. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что $\vec{a}=\vec{b}+\vec{x}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записывают так: $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. Легко показать, что разность двух векторов всегда существует и определяется однозначно. Если разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть нулевой вектор, то вектор $\vec{b}$ является противоположным вектору $\vec{a}$ и обозначается так: $\vec{b}=-\vec{a}$.

Далее отметим свойства операции умножения.

Теорема 1.1.4. Произведение вектора на нуль есть нулевой вектор, то есть $0\vec{a}=\vec{0}$.

Действительно, $k\vec{a}=(0+k)\vec{a}=0\vec{a}+k\vec{a}$, отсюда $0\vec{a}=\vec{0}$.

Теорема 1.1.5. Произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор, то есть $k\vec{0}=\vec{0}$.

Действительно, $k\vec{a}=k(\vec{a}+\vec{0})=k\vec{a}+k\vec{0}$. Отсюда $k\vec{0}=\vec{0}$.

Перечисленные выше свойства, естественно, будут выполняться на любой модели векторного пространства.

Операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число позволяют ввести в векторном пространстве новое понятие.

Определение 1.1.8. Система векторов $S=\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ называется линейно зависимой, если существуют числа $k_1, \ldots, k_n$, не равные нулю одновременно, и выполняется равенство

$$k_1\vec{a}_1 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \qquad (1.1.1)$$

Заметим, если в систему S входит нулевой вектор, то она всегда линейно зависима. Действительно, пусть, например, вектор $\vec{a}_1$ нулевой. Положим $k_1 = 1$, а остальные коэффициенты равными нулю. Тогда, в силу теорем 4 и 5, равенство (1.1.1) будет выполняться.

В том случае, когда равенство (1.1.1) может выполняться только при $k_1^2 + \ldots + k_n^2 = 0$, система S называется линейно независимой.

Пусть система S линейно зависима и пусть, например, $k_1 \neq 0$. Тогда прибавим к каждой части равенства (1.1.1) вектор $-k_1\vec{a}_1$ и, умножая затем обе части на число $-1/k_1$, получим

$$\vec{a}_1 = \frac{-k_2}{k_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{k_n}{k_1}\vec{a}_n. \qquad (1.1.2)$$

В этом случае говорят: вектор $\vec{a}_1$ выражен через остальные векторы системы S.

Если не нулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то их называют также коллинеарными векторами. На основании равенства (1.1.2) видно, что зависимость между коллинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Если три не нулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, то их называют компланарными. Зависимость между компланарными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ можно всегда представить в виде (1.1.2), например $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Понятие линейной зависимости векторов позволяет ввести понятие векторного пространства с размерностью.

Определение 1.1.9. Векторное пространство V называется *n-мерным,* если выполняются следующие условия:

A_9. В пространстве V существуют n линейно независимых векторов.

A_{10}. Всякие $n+1$ векторов линейно зависимы.

Эти два условия называются аксиомами размерности. Векторное пространство размерности n обозначим V_n.

Определение 1.1.10. Упорядоченная система из n векторов векторного пространства V_n называется базисом, а векторы $\vec{e}_i$ – базисными векторами, если:

1) система $\{\vec{e}_i\}$ линейно независима,

2) для всякого не нулевого вектора $\vec{a}$ пространства V_n система $\{\vec{e}_i, \vec{a}\}$ линейно зависима.

Будем обозначать базис пространства так $\beta = \{\vec{e}_i;\ i = \overline{1, n}\}$ и называть его аффинным, если на вектора не наложены дополнительные условия. Заметим, число базисных векторов совпадает с размерностью пространства.

Если $\{\vec{e}_i\}$ – базис пространства V_n, то, на основании равенства (1.1.2), всякий вектор $\vec{a}$ можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + ... + a_n\vec{e}_n. \qquad (1.1.3)$$

В нашем примере вектора, как класса эквиполентных отрезков, вопрос о линейной зависимости векторов решается следующим образом. Если мы рассматриваем направленные отрезки на плоскости, то два вектора могут быть неколлинеарными, а вот три всегда линейно зависимы. Действительно, пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $\vec{c}$ – третий произвольный вектор плоскости. Возьмем произвольную точку O плоскости и отложим от нее направленные отрезки $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно. На этих отрезках всегда можно построить параллелограмм OC_1CC_2, в котором направленный отрезок OC является диагональю и $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC_2}$. Отсюда получаем, $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $x = \overrightarrow{OC_1} : \overrightarrow{OA}, y = \overrightarrow{OC_2} : \overrightarrow{OB}.$ Следовательно, классы эквиполентных отрезков плоскости образуют двумерное векторное пространство, и базис в этом пространстве состоит из двух неколлинеарных векторов. В евклидовом 3-мерном пространстве базис состоит из трех некомпланарных векторов.

Теорема 1.1.6. Разложение вектора по векторам данного базиса единственное.

Предположим, что наряду с разложением (1.1.3) существует другое разложение:

$$\vec{a} = b_1\vec{e}_1 + \ldots + b_n\vec{e}_n . \qquad (1.1.4)$$

Из равенств (1.1.3) и (1.1.4) получаем:

$$(a_1 - b_1)\vec{e}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\vec{e}_n = \vec{0} .$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов, имеем: $a_1 - b_1 = 0$, … , $a_n - b_n = 0$. Следовательно, $a_1 = b_1$, … , $a_n = b_n$.

Итак, если в n-мерном векторном пространстве выбран базис, то с каждым вектором будет связан единственный упорядоченный набор их n действительных чисел и обратно. В силу этого обстоятельства числа a_i, входящие в равенство (1.1.3), называются аффинными координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$, если базис аффинный, и записывают $\vec{a}(a_1,\ldots,a_n)$. Очевидно, что базисные векторы имеют координаты

$$\vec{e}_1(1,0,\ldots,0),\ldots,\vec{e}_n(0,0,\ldots,1).$$

Пусть нам дана некоторая линейная комбинация векторов. Так как каждый вектор, входящий в комбинацию, имеет в данном базисе определенные координаты, то следует ожидать, что между координатами этих векторов также будет существовать некоторая зависимость. Рассмотрим, для простоты рассуждений, линейную комбинацию трех векторов, которую запишем в следующем виде: $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Пусть координаты этих векторов в некотором базисе $\{\vec{e}_i\}$ будут соответственно (a_i), (b_i), (c_i). Здесь индекс i принимает целые значения от 1 до n включительно. Представляя каждый из векторов, используя их координаты, в виде разложения по базису и учитывая независимость базисных векторов, получим

$$a_1 = \beta b_1 + \gamma c_1,\ a_2 = \beta b_2 + \gamma c_2,\ \dots ,\ a_n = \beta b_n + \gamma c_n.$$

Замечаем, что соответствующие координаты взятых векторов находятся в той же зависимости, что и векторы. Ясно, что данный вывод распространяется на любое число векторов, входящих в комбинацию, и мы приходим к теореме.

Теорема 1.1.7. Соответствующие координаты векторов, входящих в линейную комбинацию, находятся в линейной комбинации с такими же коэффициентами, что и векторы.

Эта теорема широко используется в решении задач с векторами.

В векторном пространстве существует бесконечно много базисов, и все они связаны между собой. Эти связи задаются координатами векторов одного базиса относительно другого.

Пусть в пространстве V_3 даны два базиса $\beta = \{\vec{e}_i\}$ и $\beta' = \{\vec{e}'_i\}$, здесь $i = 1,2,3$. Возьмем, например, первый базис β. Тогда каждый вектор базиса β' будет иметь некоторые координаты относительно первого базиса β, то есть

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = c_1^1\vec{e}_1 + c_1^2\,\vec{e}_2 + c_1^3\vec{e}_3\,, \\ \vec{e}'_2 = c_2^1\vec{e}_1 + c_2^2\,\vec{e}_2 + c_2^3\vec{e}_3\,, \\ \vec{e}'_3 = c_3^1\vec{e}_1 + c_3^2\,\vec{e}_2 + c_3^3\vec{e}_3\,. \end{cases}$$

Эти формулы называются формулами перехода от базиса β к базису β'. В сокращенном виде эти формулы записываются так:

$$\vec{e}_i^{\,'} = c_i^j\vec{e}_j\,, \text{ где } i, j = 1, 2, 3. \qquad (1.1.5)$$

В равенствах (1.1.5) предполагается суммирование по индексу j. Коэффициенты c_i^j в равенствах (1.1.5) образуют табличку, называемую квадратной матрицей:

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix} \qquad (1.1.6)$$

Эта матрица обозначается (c_i^j) и называется матрицей перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{e}_i^{\,'}\}$. В двумерном пространстве V_2 формулы перехода от одного базиса к другому содержат не три равенства, а только два и в правой части будет стоять сумма не трех слагаемых, а двух. Соответственно, матрица будет состоять из двух столбцов и двух строчек, то есть из четырех чисел. Это объясняется тем, что в двумерном пространстве базис состоит только из двух векторов.

С каждой квадратной матрицей связывают число, называемое определителем и обозначаемое $det(c_I^J)$. Эти числа вычисляются следующим образом:

1) Для двумерного пространства

$$det\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 \\ c_2^1 & c_2^2 \end{vmatrix} = c_1^1 c_2^2 - c_1^2 c_2^1 \,. \qquad (1.1.7)$$

2) Для 3-хмерного пространства:

$$\det\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix} = c_1^1\begin{vmatrix} c_2^2 & c_2^3 \\ c_3^2 & c_3^3 \end{vmatrix} - c_1^2\begin{vmatrix} c_2^1 & c_2^3 \\ c_3^1 & c_3^3 \end{vmatrix} + c_1^3\begin{vmatrix} c_2^1 & c_2^2 \\ c_3^1 & c_2^3 \end{vmatrix} \qquad (1.1.8)$$

Определитель (1.1.7) называется определителем второго порядка, а определитель (1.1.8), соответственно, третьего порядка. Заметим, что определитель (1.1.8) мы представили в виде произведений элементов, стоящих в первой строке, на определители второго порядка, которые вычисляются по формуле (1.1.7). Отметим свойство этих определителей. Если какие-либо две строки пропорциональны, то такой определитель равен нулю. В нашем случае таких строчек быть не может, так как базисные векторы линейно независимы и, следовательно, их координаты не пропорциональны. Таким образом, определитель матрицы перехода больше нуля или меньше.

Определение 1.1.11. Говорят, что два базиса имеют одинаковую ориентацию, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому больше нуля.

На основании данного определения множество всех базисов данного векторного пространства можно разбить на два класса следующим образом. Выберем в пространстве некоторый базис β и отнесем к первому классу все те базисы, которые имеют с ним одинаковую ориентацию. Очевидно, что сам базис β попадет в первый класс. Все базисы, имеющие с базисом β разную ориентацию, отнесем во второй класс.

Определение 1.1.12. Пространство, в котором из двух классов базисов выбран один, называется ориентированным.

Таким образом, в векторном пространстве имеется только две ориентации. Одну ориентацию называют «положительной», другую – «отрицательной». Базисы положительной ориентации называются правыми, а базисы отрицательной ориентации – левыми. Правые и левые системы координат в пространстве введены Коши в работе «Приложения исчисления бесконечно малых к геометрии» (1826 г.). Как указывает Коши, он сделал это под влиянием работ французского физика Андре Ампера (1775-1836 гг.) и французского механика Гюстава Гаспара Кориолиса (1792-1843 гг.).

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru