Предисловие

Радиоэлектроника и специфика ее применения столь широки, а развитие столь стремительно, что, несмотря на обилие литературы, во многих научных и учебных приложениях остается еще значительный неудовлетворенный спрос. Результаты новых исследований, совершенствование образовательного процесса во многих случаях требуют переосмысления и обновления как узкоспециализированных изданий, так и учебно-методической литературы.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой попытку движения в этом направлении. Пособие оформлено в виде двух книг, первая из которых посвящена аналоговым сигналам и устройствам, вторая – цифровым. Цели, поставленные при его написании, сводились к простоте изложения в сочетании с достаточной строгостью, минимизации количества ссылок в математических расчетах, учету новых тенденций и направлений.

1. СИГНАЛЫ

Одно из главных назначений радиоэлектронных устройств – передача, прием и преобразование сигналов.

Сигнал – это изменение состояния материальной среды той или иной физической природы, отображающее (моделирующее) информацию. Примеры: механический (взмах руки), световой, звуковой, электрический и другие сигналы. Нас будут интересовать сигналы электрической природы.

Сигналы могут классифицироваться по различным признакам. Различают детерминированные (т.е. определенные, заданные, известные) сигналы и случайные. Детерминированные сигналы могут быть предсказаны для любого момента времени. Случайные сигналы принимают значения, которые нельзя предсказать.

Детерминированные сигналы подразделяются на непрерывные и импульсные. Непрерывные – это сигналы, выражаемые с помощью медленно меняющихся функций, сигналы, большую часть времени отличные от нуля. Импульсные сигналы – сигналы, действующие только в определенные интервалы времени, между которыми их значение равно нулю. Конечно, это деление в достаточной степени условно. И есть значительное число сигналов, которые могут быть отнесены и к тем, и к другим. Кроме того, сигналы делятся на аналоговые и цифровые. В аналоговом сигнале содержится информация о процессе или явлении в каждый момент времени. В цифровом сигнале представляется информация в отдельные (дискретные) моменты времени. При этом значение величины отображается в цифровом коде. Например, при аналоговом методе передачи напряжения можно сказать о его значении в каждый момент времени, причем измерительный прибор определяет именно напряжение, пропорциональное передаваемому. В цифровом же методе измерительное устройство определяет число, которым выражено измеряемое напряжение в выбранный момент времени.

Одно из назначений сигнала – быть переданным на расстояние. Эта процедура осуществляется с помощью как проводных, так и беспроводных способов (радиоволн). Сигналы, формируемые объектами, непосредственно несущими информацию, занимают в основной массе случаев относительно небольшой диапазон частот [звуковой сигнал (0-20) кГц, телевизионный - (0-8) МГц]. По проводам в некоторых случаях передаются сами сигналы. Однако попытки передать сигналы непосредственно источников с помощью радиоволн натолкнулись бы на значительные трудности. Во-первых, невозможно было бы передавать сигнал более чем с одного источника. Иначе они смешались бы и приемник принимал смесь, которую нельзя разделить. Во-вторых, электрические колебания тем эффективнее преобразуются в электромагнитные волны, чем больше характерные размеры источника в сравнении с длиной радиоволны, определяемой из соотношения $\lambda = c \cdot T = c/f$, где T и f – соответственно период и частота радиосигнала, c – скорость света. В самом деле, в неизлучающем колебательном контуре вся энергия электрического поля сосредоточена между обкладками конденсатора, и расстояние между ними значительно меньше λ. Когда обкладки разносятся, то длина силовой линии становится больше, т.е. ближе к λ. Одна обкладка становится «землей», другая - антенной в обычном понимании. Из этого следует, что для передачи низкочастотной информации (0-20 кГц) потребовались бы антенны с характерными размерами около 10 км. Наконец, в-третьих, относительная ширина полосы $\Delta f / f_{cp}$ для звуковых и видеосигналов, равная приблизительно двум, делает проблематичным построение передающей и приемной антенн.

Передавать по проводам исходный сигнал тоже не очень выгодно. Линия оказывается занятой одним источником. Для передачи информации от нескольких источников требуется несколько линий либо преобразование сигнала специальным образом. Экономически и технически это не всегда рационально.

Вследствие изложенного для передачи электрических сигналов используют явление модуляции. Суть его заключается в том, что передаваемый сигнал закладывается в высокочастотное колебание. Осуществляется это за счет того, что информационный сигнал управляет одним из параметров высокочастотного (амплитудой, частотой или фазой). Поэтому различают амплитудную, частотную и фазовую модуляции.

Высокочастотное колебание называется несущей, его частота обычно более чем на порядок превосходит высшую частоту в спектре передаваемого (модулирующего) сигнала $f_{мод}$. Модулируемый высокочастотный сигнал является как бы носителем (переносчиком) более низкочастотной информации. Причем, кроме требования $f_{несущ} >> f_{мод}$, других существенных требований к несущему и информационному сигналам не предъявляется.

Таким образом, использование явления модуляции позволяет одновременно передавать огромное количество информации, для сигнала каждой из которых может быть выделена своя несущая частота. Более того, используя различные способы модуляции, можно передавать несколько сигналов на одной несущей. Приемник, настроившись на частоту несущей, выделяет только тот сигнал, который нужен (информационные сигналы не мешают друг другу).

В настоящее время освоен диапазон частот вплоть до рентгеновского. В этом диапазоне можно разместить, к примеру, до 10^9 телевизионных каналов.

Если несущую записать в виде

$$U_a(t) = U_m \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

где U_m – амплитуда несущей, ω – частота, φ – фаза, то модулированный сигнал представляется следующим образом:

$U_a(t) = U_m(t)\cos(\omega t + \varphi)$ при амплитудной модуляции,
$U_a(t) = U_m \cos[\omega(t) \cdot t + \varphi]$ при частотной модуляции,
$U_a(t) = U_m \cos[\omega t + \varphi(t)]$ при фазовой модуляции.

В такой форме информация передается в виде радиосигнала или по проводной системе.

Устройства, для которых предназначается сигнал, однако, не могут реагировать на столь высокочастотные колебания. Необходимо вновь выделить модулирующую частоту, т.е. перенести информацию в нижнюю часть частотного диапазона. Этот процесс носит название демодуляции или детектирования. Детектирование исключает высокочастотную составляющую с частотой ω и оставляет сигналы с низкой частотой.

Таким образом, передающее устройство должно содержать источник сигнала, генератор высокочастотных колебаний, модулятор, осуществляющий загрузку несущей передаваемой информацией, и излучающее устройство (антенну).

В свою очередь, приемное устройство должно содержать антенну, усилитель слабого модулированного сигнала, демодулятор (детектор), усилитель модулирующего сигнала, устройство, для которого этот сигнал предназначен (телевизионная трубка, звуковой динамик, реле и т.д.).

1.1. Представление сигнала

Сигнал всегда является функцией времени. Многообразие жизненных ситуаций обусловливает многообразие сигналов, т.е. многообразие зависимостей от времени. В то же время устройства для передачи и приема сигналов и их преобразования характеризуются вполне определенными возможностями (например, по мощности, частоте, степени искажения и т.д.). Для того чтобы осуществить в большей или меньшей степени однообразную связь между характеристиками сигналов и возможностями устройств, используют определенные приемы описания сигналов.

Один из таких приемов – представление сложного сигнала в виде суммы относительно более простых. Этот процесс называется разложением функций.

Обычно говорят о разложении в ряд по какой-то определенной системе функций. Обозначается система символом $\{\varphi_i(t)\}$. Это вид функций, по которым осуществляется разложение. Например, совокупность тригонометрических функций 1, $\sin t$, $\cos t$, $\sin 2t$, $\cos 2t$… обозначается $\{\sin it,\ \cos it\}$, а ряд записывается как

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i \sin it + B_i \cos it\right).$$

Наиболее распространен и разработан способ разложения по так называемым ортонормированным системам функций. Напомним основы этого способа разложения достаточно произвольной функции.

Пусть задана какая-то система функций $\{\varphi_i(t)\}$. Задана система – значит задан закон, по которому определяется каждая функция системы (т.е. задано множество функций) и интервал независимой переменной t, в котором эти функции определены. Ставится задача представить функцию $f(t)$ (т.е. какой-то сигнал) по этой системе функций в том же интервале изменения t.

Естественно, в основной массе случаев сумма $\varphi_i(t)$ не равна в точности $f(t)$. Необходимо установить критерий отличия суммы от $f(t)$. Наиболее широко распространенный критерий – среднеквадратичное отклонение, которое записывается в виде:

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(t) - f(t) \right]^2 dt .$$

Почему скобка в квадрате? Если бы скобка не возводилась в квадрат, то в случае знакопеременной на интервале (t_1, t_2) подынтегральной функции интеграл мог часть промежутка (t_1, t_2) быть положительным, а часть – отрицательным. Может случиться, что эти части равны и тогда δ было бы равно нулю. Чтобы исключить такой случай, функция под интегралом возводится в квадрат.

Итак, попытаемся представить функцию $f(t)$ в виде ряда

$$f(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + ... + c_n\varphi_n(t).$$

Функции $f(t)$ и $\varphi_i(t)$ известны. Неизвестны коэффициенты c_i.

В соответствии с принципом наименьших квадратов коэффициенты подбираются таким образом, чтобы среднеквадратичное отклонение ряда от функции было минимальным, т.е. $\delta = C(c_0, c_1, c_2, ..., c_n)$ было минимально для выбранных c_i. Для нахождения минимума (точнее, экстремума) функции δ необходимо найти ее производные по всем c_i и приравнять их нулю (напомним, что $\dfrac{\partial [y(t)]^2}{\partial t} = 2y\dfrac{\partial y}{\partial t}$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial c_0} = \int\limits_{t_1}^{t_2} 2\left[\sum c_i \varphi_i - f(t)\right]\varphi_0 dt = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial c_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2} 2\left[\sum c_i \varphi_i - f(t)\right]\varphi_1 dt = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial c_n} = \int\limits_{t_1}^{t_2} 2\left[\sum c_i \varphi_i - f(t)\right]\varphi_n dt = 0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений, например $\dfrac{\partial \delta}{\partial c_\kappa}$, записывается в виде

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_\kappa} = \int\limits_{t_1}^{t_2} c_0 \varphi_0 \cdot \varphi_\kappa dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} c_1 \varphi_1 \cdot \varphi_\kappa dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} c_2 \varphi_2 \cdot \varphi_\kappa dt + \dots + \int\limits_{t_1}^{t_2} c_\kappa \varphi_\kappa \cdot \varphi_\kappa dt + \dots +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} c_n \varphi_n \cdot \varphi_\kappa dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi_\kappa dt = 0.$$

Вынесем за знак интеграла постоянную c_κ и обозначим:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i \varphi_\kappa dt = (\varphi_i, \varphi_\kappa), \qquad \text{а} \qquad \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_\kappa f dt = (\varphi_\kappa, f).$$

Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_0, \varphi_1) + c_2(\varphi_0, \varphi_2) + \dots + c_n(\varphi_0, \varphi_n) = (\varphi_0, f) \\ c_0(\varphi_1, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + c_2(\varphi_1, \varphi_2) + \dots + c_n(\varphi_1, \varphi_n) = (\varphi_1, f) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0(\varphi_n, \varphi_0) + c_1(\varphi_n, \varphi_1) + c_2(\varphi_n, \varphi_2) + \dots + c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (\varphi_n, f). \end{cases} \qquad (1.1)$$

Так как функции φ_i и f известны, т.е. известны $(\varphi_i \varphi_\kappa)$, то в принципе c_i можно найти, решив систему n уравнений с n неизвестными. Оказывается, однако, что решение может быть чрезвычайно упрощено, если

а) $(\varphi_i \varphi_\kappa) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i \varphi_\kappa dt = 0$ для $i \neq \kappa$;

б) $(\varphi_i \varphi_i) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2 dt$ отличен от нуля.

Тогда из первого уравнения сразу получается:

$$c_0 = \frac{(\varphi_0, f)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_0 f dt}{\int\limits_{0}^{t_1} \varphi_0^2 dt}, \quad \text{а из } i\text{-го: } c_i = \frac{(\varphi_i, f)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = \frac{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i f dt}{\int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2 dt}.$$

Функции, которые на интервале t_1, t_2 удовлетворяют условиям а) и б), называются ортогональными на этом интервале. Если

$$(\varphi_i, \varphi_i) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2 dt = 1,$$

то эти функции к тому же являются нормированными к единице и называются ортонормированными.

Коэффициенты c_i называются коэффициентами Фурье функции $f(t)$ относительно заданной ортогональной системы $\{\varphi_i\}$.

1.2. Разложение по тригонометрическим функциям

Покажем, что система тригонометрических функций 1, $\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\sin nx$, $\cos nx$…. ортогональна на отрезке, равном периоду функции 2π. Для этого проверим обращение в нуль интегралов:

I. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$, если $m \neq n$.

II. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$, если $m \neq n$.

III. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx$ для всех m и n.

I. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$, т.к. $\sin \kappa\pi = 0$ при $m \neq n$.

II. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, т.к. $\sin \kappa\pi = 0$ при $m \neq n$.

III. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]dx =$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{m+n}} - \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m-n}\right]$ для всех m и n.

Еще одна функция системы -1 (единица). Для того чтобы доказать, что она также ортогональна на [- π, π], положим в II и III m = 0:

II. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{\sin x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$. III. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Итак, показано, что тригонометрическая система ортогональна на отрезке [- π, π].

Поскольку заменой переменных любой отрезок $[\alpha, 2\pi + \alpha]$ может быть сведен к отрезку [- π, π], рассмотренная система ортогональна на любом интервале 2π. Найдем нормы функций, входящих в тригонометрическую систему:

$$\varphi_0 = 1; \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_0^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

$$\varphi_n = \sin nx; \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

$$\varphi_m = \cos mx; \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi.$$

Следовательно, если вместо системы 1, $\sin x$, $\cos x$ рассматривать систему $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$ то эта система будет ортонормированной, т.к. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_i^2 dx = 1$.

Таким образом, любая функция с периодом 2π может быть представлена рядом

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(a_\kappa\cos\kappa x+b_\kappa\sin\kappa x).$$

Слагаемые a_0, $a_\kappa\cos\kappa x$, $b_\kappa\sin\kappa x$ называются гармониками ряда.

В соответствии с формулами для коэффициентов ряда по ортогональным функциям (c_0, c_i) для разложения в ряд по тригонометрическим функциям можно получить:

$$a_\kappa=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\kappa x dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\kappa x dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\kappa x dx;$$

$$b_\kappa=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\kappa x dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\kappa x dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\kappa x dx.$$

При разложении в ряд первый член обозначен $a_0/2$ для того, чтобы он получался из общей формулы для a_κ при $\kappa=0$: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$

Из формулы для c_0:

$$c_0=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}{\int_{-\pi}^{\pi}1^2 dx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad \text{т.е. } c_0=\frac{a_0}{2}.$$

Коэффициенты a_κ, b_κ называются коэффициентами Фурье.

Используя формулу тригонометрии $a\cos x+b\sin x=A\cos(x+\varphi)$, $A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=arctg\frac{b}{a}$, ряд можно записать в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}A_\kappa\cos(\kappa x+\varphi_\kappa),$$

$$A_\kappa=\sqrt{a_\kappa^2+b_\kappa^2},\ \varphi_\kappa=arctg\frac{b_\kappa}{a_\kappa},\quad a_\kappa=A_\kappa\cos\varphi_\kappa,\quad b_\kappa=A_\kappa\sin\varphi_\kappa.$$

Заметим, что x – величина безразмерная.

1.3. Случай произвольного и размерного периодов

Если периодическая функция имеет период, отличный от 2π и, более того, размерный (например, имеющий размерность времени T), то его надо масштабировать к 2π. Это значит, что при изменении независимой переменной на T, например от t до $t+T$, аргумент sin, cos должен измениться на 2π. Это достигается заменой переменной $x = 2\pi \frac{t}{T}$, где T и t имеют одинаковую размерность (с). Когда t изменяется на T, например от $t = 0$ до $t = T$, x изменяется на 2π. Величина $\frac{1}{T} = f_0$ – частота сигнала, $2\pi f_0 = \omega_0$ – круговая частота – число колебаний за 2π секунд.

Итак, когда речь идет о процессах, периодических во времени с периодом T, запись разложения будет иметь вид:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\right) \text{ или}$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)dt.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\cos n\omega_0 t dt.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\sin n\omega_0 t dt.$$

$A_n(n\omega_0)$ называется амплитудным спектром периодичного сигнала, $\varphi_n(n\omega_0)$ называется фазовым спектром.

Таким образом, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Заметим, что мы рассмотрели лишь одну из возможных систем ортогональных функций, которую после нормировки (деления на $\sqrt{\pi}$) сделали ортонормированной.

Ряд Фурье – это только один, но самый распространенный представитель ортонормированных систем.

1.4. Представление в комплексной форме

Рассмотрим теперь другие представления (формы) ряда Фурье. Для этого воспользуемся формулами Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x .$$

Из них следует:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right); \quad \cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right) = \frac{1}{2}e^{in\omega_0 t}e^{i\varphi_n} + \frac{1}{2}e^{-in\omega_0 t}e^{-i\varphi_n} .$$

Подставим последнее в формулу для $F(t)$:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}dt}_{a_n}\underbrace{\left[\frac{e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}}{2}\right]}_{\cos n\omega_0 t} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t)\frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i}dt}_{b_n}\underbrace{\left[\frac{e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t}}{2i}\right]}_{\sin n\omega_0 t}\right].$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int F(t)e^{in\omega_0 t}dt\left(e^{in\omega_0 t}\right) + \frac{1}{T}\int F(t)e^{in\omega_0 t}dt\left(e^{-in\omega_0 t}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{T}\int F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\left(e^{in\omega_0 t}\right) + \frac{1}{T}\int F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\left(e^{-in\omega_0 t}\right) -$$

$$- \frac{1}{T}\int F(t)e^{in\omega_0 t}dt\left(e^{in\omega_0 t}\right) + \frac{1}{T}\int F(t)e^{in\omega_0 t}dt\left(e^{-in\omega_0 t}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{T}\int F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\left(e^{in\omega_0 t}\right) - \frac{1}{T}\int F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\left(e^{-in\omega_0 t}\right)\right].$$

$$F(t)=\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\left(e^{in\omega_0 t}\right)+\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)e^{in\omega_0 t}dt\left(e^{-in\omega_0 t}\right)\right].$$

Если ввести отрицательные гармоники, т.е. сумму распространить от $-\infty$ до $+\infty$, то $F(t)$ можно записать короче:

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{c}_n e^{in\omega_0 t};\ \dot{c}_n=\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\,.$$

Члены с $n > 0$ будут соответствовать первому слагаемому под знаком суммы, с $n < 0$ – второму и $n = 0$ – слагаемому перед суммой. Естественно, отрицательная частота здесь понятие чисто математическое.

Коэффициент $\dot{c}_n = c(n\omega_0)e^{i\varphi(n\omega_0)}$ – комплексная величина, имеющая определенное значение для каждого n. Модуль c_n – амплитудный спектр, фаза c_n – фазовый спектр.

Рассмотрим пример разложения.

Дана периодическая последовательность импульсов с периодом T, длительностью τ и амплитудой U:

$$F(t)=\begin{cases} const=U, -\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}, \\ 0 \qquad ,\frac{\tau}{2}<t<\frac{T}{2}, \\ 0 \qquad ,-\frac{\tau}{2}>t>-\frac{T}{2}. \end{cases}$$

Коэффициент $\dot{c}_n$ определится формулой

$$\dot{c}_n=\frac{U}{T}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-in\omega_0 t}dt=\frac{2U}{n\omega_0 T}\sin n\omega_0\frac{\tau}{2}=U\frac{\tau}{T}\frac{\sin n\omega_0\frac{\tau}{2}}{n\omega_0\frac{\tau}{2}}.$$

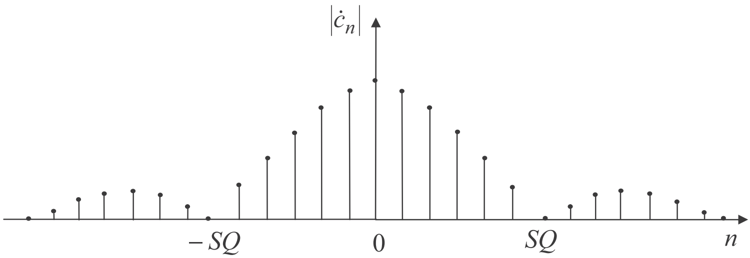

Рис. 1.1. Амплитудный спектр периодической последовательности импульсов

Отношение $\dfrac{T}{\tau}$ называется скважностью. Обозначим ее SQ.

$$\text{Тогда } \dot{c}_n = U\frac{\tau}{T}\frac{\sin n\pi\frac{\tau}{T}}{n\pi\frac{\tau}{T}} = U\frac{1}{SQ}\frac{\sin\frac{n\pi}{SQ}}{\frac{n\pi}{SQ}}.$$

$$\text{Модуль } \dot{c}_n = |\dot{c}_n| = \frac{U}{SQ}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{SQ}}{\frac{n\pi}{SQ}}\right|.$$

На рис. 1.1 дано графическое представление $|\dot{c}_n(n)|$.

Коэффициент $|\dot{c}_n| = 0$ при $n = \pm\kappa SQ$ или $n\omega_0\dfrac{\tau}{2} = \pm\kappa\pi(\kappa = 1, 2, 3, ...)$.

1.5. Спектр одиночного импульса. Интеграл Фурье

Если период следования последовательности импульсов устремить к бесконечности, т.е. увеличить расстояние между импульсами, то можно прийти к одиночному импульсу. Спектр такого импульса получим на основе предельного перехода $T \to \infty$.

Запишем ряд Фурье для периодической последовательности импульсов произвольной формы:

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\right]e^{in\omega_0 t}.$$

Используем $\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\omega_0$.

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}F(t)e^{-in\omega_0 t}dt\right]e^{in\omega_0 t}\omega_0.$$

С увеличением периода повторения импульсов T частота $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ стремится к нулю. При этом расстояние между соседними гармониками $(\omega_{n+1}-\omega_n)=\omega_0$ также будет стремиться к нулю, т.е. спектр будет приближаться к сплошному. Из-за $\omega_0\to 0$ его можно заменить на $d\omega$, а сумму на интеграл.

Текущая частота будет определяться членом $n\omega_0$. Обозначим ее просто ω:

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt)\,e^{i\omega t}d\omega.$$

Внутренний интеграл зависит лишь от ω и имеет смысл коэффициента разложения. Его обычно обозначают $\dot{S}(\omega)$. Это комплексная величина:

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\ .$$

Функция $\dot{S}(\omega)$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой сигнала. Как видно из последнего выражения, она, так же как и коэффициенты разложения $\dot{c}_n$, зависит только от формы сигнала $F(t)$. Функцию $\dot{S}(\omega)$ называют еще прямым преобразованием Фурье, т.е. преобразованием, определяющим спектральную характеристику функции, или преобразованием, осуществляющим переход из временной области в частотную.

Подставив $\dot{S}(\omega)$ в формулу для $F(t)$, получим

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega.$$