Оглавление

Введение 4
Глава 1. Расстояния и углы 7
§ 1.1. Расстояние между двумя точками 7
§ 1.2. Расстояние от точки до прямой 10
§ 1.3. Расстояние от точки до плоскости 19
§ 1.4. Расстояние между скрещивающимися прямыми 38
§ 1.5. Угол между двумя прямыми 53
§ 1.6. Угол между прямой и плоскостью 66
§ 1.7. Угол между плоскостями 77
Глава 2. Площади и объёмы многогранников 112
§ 2.1. Площадь поверхности многогранника 112
§ 2.2. Площадь сечения многогранника 118
§ 2.3. Объём многогранника 134
Глава 3. Круглые тела 160
§ 3.1. Цилиндр. Конус. Шар 160
§ 3.2. Взаимное расположение круглых тел и многогранников . . . 175
§ 3.3. Взаимное расположение круглых тел 195
Глава 4. Дополнения 207
§ 4.1. Методы построения сечения многогранника плоскостью . . 207
§ 4.2. Векторный метод 218
§ 4.3. Координатный метод 221
§ 4.4. Задачи на доказательство 228
§ 4.5. Опорные задачи 241
Упражнения 256
Ответы и указания 322
Литература 327

Введение

Учебное пособие предназначено для подготовки старшеклассников к выполнению задания 14 ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задание 14 содержит два пункта:

— в пункте *а* требуется доказать некоторое геометрическое утверждение для данной в условии задачи геометрической конфигурации;

— в пункте *б* требуется вычислить некоторую величину для данной в условии задачи геометрической конфигурации с использованием (или без него) утверждения предыдущего пункта задачи.

Задание 14 оценивается 3 баллами. При его проверке экспертами выставление баллов производится в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Анализ результатов ЕГЭ последних лет показывает, что около 30 % участников экзамена приступали к выполнению задания 14. В таблице ниже указан средний процент решаемости этого задания участниками экзамена в период в 2022 – 2024 гг.

<table>
<tr><th rowspan="2">Баллы</th><th colspan="3">Процент решаемости задания 14, %</th></tr>
<tr><td>2022 г.</td><td>2023 г.</td><td>2024 г.</td></tr>
<tr><td>0</td><td>94,7</td><td>95,1</td><td rowspan="4">Средний процент решаемости 4,0 %</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4,0</td><td>4,1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,4</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,9</td><td>0,66</td></tr>
</table>

В первой главе «Расстояния и углы» нашей книги разбираются разные методы решения таких задач. Геометрические методы решения задачи опираются на определение расстояния или угла и требуют от учащихся развитого пространственного воображения. Кроме этого подхода, в пособии рассматриваются координатный и векторный методы, которые могут быть эффективно использованы при решении задач разного вида. Применение опорных задач также может привести к рациональному решению задачи.

В кодификатор элементов содержания контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена входят разделы, связанные с темой **«Многогранники»**. Указанный материал в полном объёме изложен в данном пособии:

— сечения плоскостью куба, призмы, пирамиды;

— боковая и полная поверхности призмы, пирамиды;

— объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы.

Во второй главе «Площади и объёмы многогранников» представлены методы решения стереометрических задач на многогранниках с использованием формул вычисления площади их поверхности и объёма.

В третьей главе «Круглые тела» собран основной материал, используемый при решении стереометрических задач, в условии которых фигурируют цилиндр, конус, сфера и шар. Даны основные способы решения задач на взаимное расположение круглых тел и многогранников, а также на взаимное расположение круглых тел.

В четвёртой главе «Дополнения» собран основной материал, который используется при решении многих стереометрических задач. В частности, даны основные способы построения сечений многогранников плоскостью, основные способы введения систем координат для использования координатного метода, дано представление о векторном методе решения задач. В примерах решения, приведённых в пособии, имеются ссылки на опорные задачи, полный набор которых помещён в пункте 4.5 на с. 241—255.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно выпускникам при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты legionrus@legionrus.com.

Глава 1. Расстояния и углы

Тема «Расстояния и углы» является основой для других разделов стереометрии. В данном разделе представлено взаимное расположение точек, прямых и плоскостей на многогранниках, рассмотрены основные виды задач и методы их решения.

§ 1.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удаётся включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{1}$$

где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

3) по формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \tag{2}$$

где $\{a, b, c\}$ — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в декартовой системе координат.

Поэтапно-вычислительный метод

Пример 1. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$* (см. рис. 1). *Найдите длину отрезка EF.*

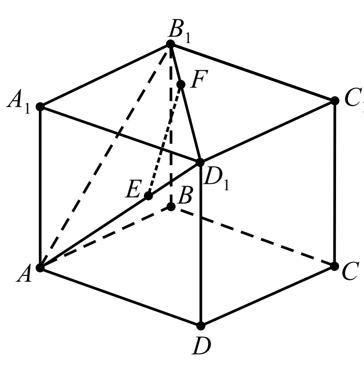

Рис. 1

Решение. Длину отрезка EF найдём по теореме косинусов из треугольника D_1EF (см. рис. 1 на с. 7), в котором $D_1F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$EF^2 = D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E \cdot D_1F \cdot \cos\frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3},$$

откуда $EF = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Координатный метод

Приступая к решению задач этим методом, полезно разобрать задачу № 1 из списка опорных задач (см. главу 4, п. 4.5 на с. 241).

Пусть точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — концы отрезка AB. Тогда внутренняя точка C отрезка AB такова, что $AC : CB = k$, имеет координаты $C\left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}; \frac{y_1 + ky_2}{k+1}; \frac{z_1 + kz_2}{k+1}\right)$.

Пример 2. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E и K — середины рёбер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L, где Q — середина отрезка EM, а L — такая точка отрезка MK, что $ML = 2LK$.*

Решение. Введём прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 2 (см. с. 9).

Тогда $E\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B_1(0; 1; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$. Для нахождения координат точки M используем формулу координат точки (опорная задача № 1), делящей отрезок B_1D_1 в отношении $2 : 1$. Имеем

$$M\left(\frac{0 + 2 \cdot 1}{1+2}, \frac{1 + 2 \cdot 0}{1+2}, \frac{1 + 2 \cdot 1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

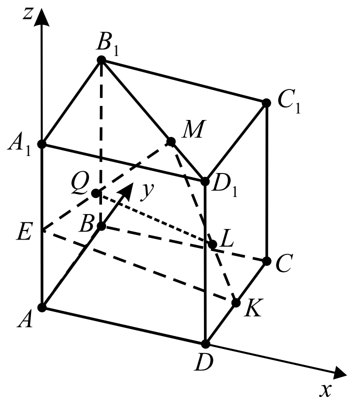

Рис. 2

Аналогично получим координаты точки L, делящей отрезок MK в отношении $2:1$. Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому $Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{3}{4}\right)$. Применим формулу (1) для расстояния между точками с заданными координатами:

$$LQ=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{725}{36^2}}=\frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Векторный метод

Пример 3. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E=\frac{1}{3}AD_1$, $D_1F=\frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.*

Решение. Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ (см. рис. 1 на с. 7), тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Выразим вектор $\overrightarrow{EF}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1F} = -\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) =$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

Тогда по формуле (2) $|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{\overrightarrow{EF}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{4}{9}\vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{c}^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Вектор $\overrightarrow{EF}$ в данном базисе имеет координаты $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, поэтому его длину можно найти по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то есть

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

§ 1.2. Расстояние от точки до прямой

• *Расстояние от точки до прямой,* не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведённого из этой точки на прямую.
• *Расстояние между двумя параллельными прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра.
• *Расстояние между двумя параллельными прямыми* равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки M до прямой AB, обозначаемое $\rho(M; AB)$, вычисляют как длину высоты, опущенной из точки M на основание AB (или её продолжение) треугольника ABM.

Пример 4. *При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой EF.*

Решение. Пусть h — длина высоты треугольника D_1EF, опущенной из точки D_1. Найдём h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна

$$\frac{1}{2}D_1F \cdot D_1E \cdot \sin\angle FD_1E = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

С другой стороны, площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{6}h$.

Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим искомое расстояние $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство

$$FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2,$$

т. е. треугольник D_1EF прямоугольный, и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Пример 5.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (см. рис. 3 на с. 12).

В прямоугольном треугольнике ACD, где $\angle ACD = 90^\circ$, $AD = 2$, находим $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника ACC_1 имеем $AC_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. В треугольнике ABC_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8},$$

где $\angle AC_1B = \varphi$.

Далее находим $\sin\varphi = \frac{\sqrt{14}}{8}$ и из треугольника AC_1H высоту AH:

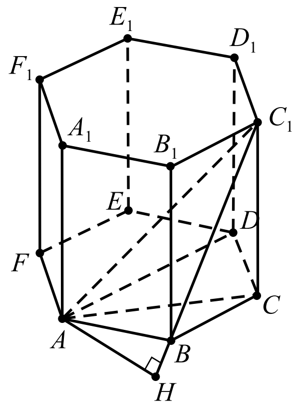

Рис. 3

$$AH = AC_1 \sin\varphi = 2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Пример 6. (МИОО, 2010.) *В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.*

Решение. Так как все грани тетраэдра $ABCD$ — равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и ADC (см. рис. 4) равны и $BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

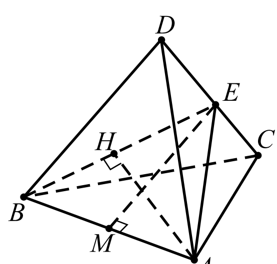

Рис. 4

Рассмотрим равнобедренный треугольник BEA и его высоты EM и AH. Выражая площадь треугольника BEA двумя способами, получаем

$$S_{BEA} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot EM \cdot AB,$$

в итоге имеем равенство $AH \cdot BE = EM \cdot AB$.

Так как $EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то получаем

$$AH = \frac{EM \cdot AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

В некоторых задачах удобно использовать плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Пример 7. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D до прямой A_1C.*

Решение. Пусть $A_1C \cap BDC_1 = F$ (см. рис. 5). Так как $A_1C \perp BDC_1$ (опорная задача № 20, глава 4, п. 4.5 на с. 253), то $FC_1 = FB = FD$ как проекции на плоскость BDC_1 равных наклонных CC_1, CB и CD соответственно. Следовательно, точка F является центром правильного треугольника BDC_1.

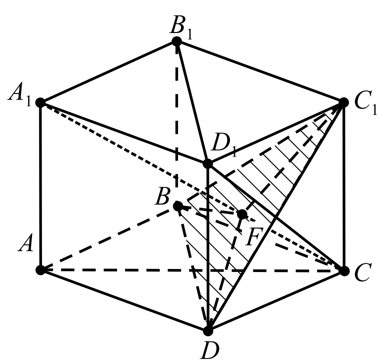

Рис. 5

Поэтому искомое расстояние равно радиусу окружности, описанной около треугольника BDC_1. Сторона этого треугольника равна $\sqrt{2}$, значит

$$\rho(D, A_1C) = DF = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Метод параллельных прямых

Данный метод основан на использовании следующего утверждения: расстояние от точки M до прямой a равно расстоянию до прямой a от произвольной точки P, лежащей на прямой b, проходящей через точку M и параллельной прямой a.

Этот метод удобен в применении, когда искомый перпендикуляр выходит за пределы многогранника. В этом случае его можно заменить перпендикуляром, расположенным внутри многогранника, либо перпендикуляром, длина отрезка которого известна.

Решим указанным методом пример 5.

Решение. В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$ (см. рис. 6). Пусть O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований соответственно. Так как $AB \parallel O_1C_1$ и $AB = O_1C_1$, то ABC_1O_1 — параллелограмм. Отсюда $AO_1 \parallel BC_1$, поэтому расстояние $\rho(A; BC_1) = \rho(O_1; BC_1)$. Из прямоугольного треугольника BOO_1 находим $BO_1 = \sqrt{2}$.

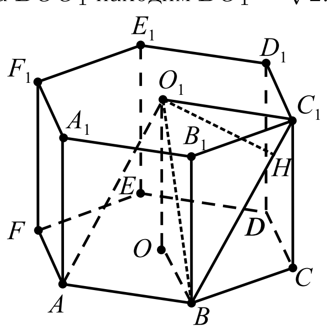

Рис. 6

В треугольнике BO_1C_1, используя теорему косинусов, получаем

$$\cos\varphi = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot 1\cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

где $\varphi = \angle O_1C_1B$.

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru