Предисловие

В 11 классе продолжается изучение нового раздела математики – **начал математического анализа**. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить четкое и грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену, такое понимание будет способствовать усвоению высшей математики в вузе (напомним, что в вузах математический анализ изучается 2 года). Также в 11 классе рассматриваются **элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей.** Кроме того, в этом классе продолжается изучение **алгебры** – детально рассматриваются степенные, показательные, логарифмические функции, уравнения и неравенства.

11 класс необходимо рассматривать как **целенаправленную подготовку к сдаче ЕГЭ**, так как варианты этого экзамена содержат значительное количество задач, содержащих изучаемый материал.

Цели данного пособия: изучить материал по алгебре и началам математического анализа, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для УМК А.Г. Мордковича и др. (М.: Мнемозина). Нумерация задач в поурочных планах соответствует задачнику этого УМК.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: более детально рассмотрены типы иррациональных, показательных и логарифмических уравнений, систем уравнений, неравенств; изучены и систематизированы способы интегрирования функций; более широко представлено применение интегралов в математике и физике. Изложение материала вполне доступно для одиннадцатиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены следующие виды фронтального контроля успеваемости: самостоятельные работы, письменные опросы, тесты, контрольные работы, зачетные работы.

Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется учителем или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе всегда на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора для учащихся.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество баллов может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки необходимо решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора задач.

В конце обучения проводится итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы приведены с ответами, для наиболее сложных задач дано их полное решение. Ответы и разбор задач могут быть использованы для размещения на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время. Приведены подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания. Предлагаемый материал достаточен для проведения уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 11 класса по предмету, но и целенаправленно подготовить учащихся к сдаче ЕГЭ.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит **исключительно рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются подготовленность класса, его работоспособность, интерес к изучению алгебры. Поэтому ни одно планирование не может являться догмой. Весь ход урока должен способствовать обучению школьников. На наш взгляд, пусть каждый школьник лучше усвоит тот материал, который в состоянии понять, чем не поймет ничего. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает комплекс неполноценности, к выполнению домашнего задания привлекаются все домочадцы, начинается списывание, подсказки, шпаргалки и т. д. В итоге результаты ужасающие – ЕГЭ по математике сдается школьниками хуже всех других предметов (примерно 20% выпускников пишут его на двойку).

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, − наличие нескольких различных вариантов обучения (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение). При этом некоторые варианты обучения предусматривают использование дополнительных учебных пособий.

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия с использованием только одного базового учебника (82 ч в год). Содержание уроков является избыточным (в расчете на очень сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается достаточно поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает на максимальный вариант. Учитывая сложность материала, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании сдвоенные уроки математики.

Поурочное планирование включает в себя **четыре вида занятий**:

1. Урок изучения нового материала.
2. Урок отработки и закрепления пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

1. **Урок изучения нового материала** включает в себя семь этапов.

I. **Сообщение темы и цели** занятий делает учитель (~1÷2 мин). Необходимо донести до учащихся необходимость изучения данной темы (области применения этих знаний) и цель урока (навыки и приемы, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. **Изучение нового материала** (основные понятия) (~15 мин) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя школьники самостоятельно (при фронтальной работе) приходят к формулировке основных понятий и правил рассматриваемого раздела алгебры. Затем учитель уточняет и корректирует эти результаты. Однако, учитывая, что многие понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать лишь для самых простых тем либо отдельных фрагментов урока.

2. Учитель формулирует основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. **Контрольные вопросы** по изучаемому материалу задает учитель для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 мин). Вопросы можно задавать как индивидуально, так и фронтально. Следует обратить внимание именно на понимание понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется кроме определения попросить учащегося привести соответствующие примеры. В случае затруднения такие примеры могут привести другие школьники или учитель.

IV. **Задание на уроке** дает учитель из числа наиболее характерных, типовых задач (~15 мин). Задание может выполняться:

1. Самостоятельно учащимися всего класса в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная работа всех учащихся (поиск ошибок в решении на доске, вопросы по решению, другие способы решения и т. д.).

2. В виде диалога учащихся за одной партой (решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения).

3. В виде работы у доски одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможны как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и диалог учителя с отвечающим у доски.

V. **Задание на дом** дается учителем из числа типовых, характерных задач, аналогичных рассмотренным в классе. Задание должно быть рассчитано на 60−80 мин. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены разные способы решения задачи. Это приводит к активизации мышления школьников, творческому пониманию материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников фиксировать непонятый материал: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников формулировать, что именно им непонятно. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в вузе. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо разобрать на ближайшем занятии по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или большей сложностью, или нестандартностью формулировки, задания или новым способом решения. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) на внеклассных занятиях (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) со всеми учащимися как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно с наиболее подготовленными школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) во время проведения математических боев, олимпиад, недель математики и т. д.

Творческие задания выполняются в пределах отведенного времени на урок.

VII. **Подведение итогов урока** (~1–2 мин) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности выставляются оценки с их кратким обоснованием.

2. **Урок на отработку и закрепление пройденного материала** отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено повторение и закрепление пройденного материала (~20 мин). Прежде всего, оно включает ответы на вопросы по домашнему заданию. Желательно, чтобы такие ответы давались самими учащимися класса. Вопросы могут включать в себя непонятые понятия, определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость разбора нерешенных задач.

В этой части урока желательна максимальная активность всего класса. Школьник, объясняя и комментируя свое решение задачи, лучше усваивает изучаемый материал. Кроме того, его объяснения могут оказаться более удобными для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5−10 мин.

На второй стадии этого этапа предусмотрен контроль усвоения материала (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10−15 мин.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1−2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание на его понимание, а не на строгость и четкость формулировок (тем более что строгие формулировки некоторых понятий будут даны только в вузе).

Самостоятельная работа включает 2−3 типовые характерные задачи.

В материалах уроков **тесты** используются в небольшом количестве для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование не дает возможности выявить причину ошибки: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д.

3. По каждой изучаемой теме приводятся **контрольные работы**. Они составлены в шести вариантах различной сложности (варианты 1, 2 − самые простые, варианты 3, 4 − сложнее, 5, 6 − самые сложные). Вариант содержит 6 задач, из которых две последние чуть сложнее предыдущих. Как правило, задачи вариантов подобны задачам, решаемым в классе и дома. Выбор вариантов может быть сделан или самими учащимися (с учетом их самооценки), или учителем (с учетом успехов школьника).

Оценка контрольной работы может быть выполнена следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». Шестая задача дает учащимся некоторую свободу выбора и определенный резерв. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана на два урока (на наш взгляд, это оптимальное время для написания работы). Изучаемый в 11 классе материал достаточно сложен. Предлагаемые задачи требуют раздумья и времени. Поэтому одного урока на проведение контрольной работы недостаточно. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводятся ее анализ и разбор наиболее сложных задач. Ко всем заданиям вариантов 1−4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы вывешивать на стенде в классе разбор заданий всех вариантов. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна некоторая необъективность оценок за контрольную работу.

4. Чтобы устранить подобную необъективность, дать возможность повышения оценок у учащихся, еще раз повторить и закрепить пройденную тему, на последнем занятии проводится письменный тематический зачет. Ему предшествует урок на повторение данной темы.

Тематический зачет предложен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа A − самые простые задачи, группа B − более сложные задачи и группа C − самые сложные задачи). Каждая задача из A оценивается в 1 балл, из B – в 2 балла, из C – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока A можно получить 7 баллов, блока B – 8 баллов и блока C − 9 баллов (всего 24 балла). Оценку «3» ставят за 6 баллов, оценка «4» − за 10 баллов, оценка «5» − за 14 баллов.

Тематическое планирование учебного материала

I полугодие (48 ч)

Глава 6. Степени и корни. Степенные функции (15 ч)

Понятие корня *n*-й степени из действительного числа (2 ч)

Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики (2 ч)

Свойства корня *n*-й степени (2 ч)

Преобразование выражений, содержащих радикалы (3 ч)

Контрольная работа № 1 (1 ч)

Обобщение понятия о показателе степени (2 ч)

Степенные функции, их свойства и графики (3 ч)

Глава 7. Показательная и логарифмическая функции (24 ч)

Показательная функция, ее свойства и график (3 ч)

Показательные уравнения и неравенства (3 ч)

Контрольная работа № 2 (1 ч)

Понятие логарифма (1 ч)

Функция $y = \log_a x$, ее свойства и график (2 ч)

Свойства логарифмов (2 ч)

Логарифмические уравнения (3 ч)

Контрольная работа № 3 (1 ч)

Логарифмические неравенства (3 ч)

Переход к новому основанию логарифма (2 ч)

Дифференцирование показательной и логарифмической функций (2 ч)

Контрольная работа № 4 (1 ч)

Глава 8. Первообразная и интеграл (9 ч)

Первообразная (3 ч)

Определенный интеграл (3 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч)

Резервные уроки (2 ч)

II полугодие (34 ч)

Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей (11 ч)

Статистическая обработка данных (2 ч)

Простейшие вероятностные задачи (2 ч)

Сочетания и размещения (2 ч)

Формула бинома Ньютона (2 ч)
Случайные события и их вероятности (2 ч)
Контрольная работа № 6 (1 ч)

Глава 10. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств (17 ч)

Равносильность уравнений (2 ч)
Общие методы решения уравнений (3 ч)
Решение неравенств с одной переменной (3 ч)
Уравнения и неравенства с двумя переменными (1 ч)
Системы уравнений (3 ч)
Уравнения и неравенства с параметрами (3 ч)
Контрольная работа № 7 (2 ч)

Повторение (6 ч)

Поурочные разработки
I полугодие

Глава 6. Степени и корни. Степенные функции

Уроки 1–2. Понятие корня *n*-й степени из действительного числа

Цель: рассмотреть корень n-й степени из числа.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Изучение нового материала

Сначала необходимо обсудить с учащимися **понятие квадратного корня из числа *a*:** это такое **число, квадрат которого равен числу *a***. Другими словами, x – квадратный корень из числа a, если выполнено равенство $x^2 = a$.

Предложите ученикам по аналогии ввести понятие корня n-й степени из числа a. Обобщение совершенно очевидно: **корнем *n*-й степени из числа *a* называется такое число *x*, *n*-я степень которого равна *a***. Другими словами, x – решение уравнения $x^n = a$.

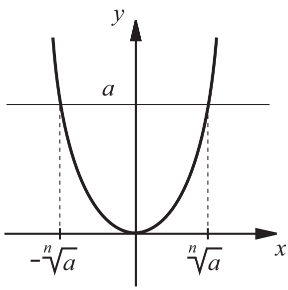
Пример 1

а) Число 4 является корнем уравнения $x^3 = 64$, т. к. выполнено равенство $4^3 = 64$.

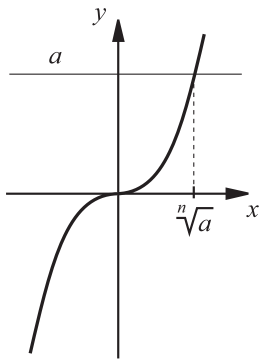
б) Числа 2 и -2 являются корнями уравнения $x^4 = 16$, т. к. выполнены равенства: $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$.

Вообще, при рассмотрении уравнения $x^n = a$, как правило, получаем решения, которые являются **иррациональными числами**. Такое решение обозначают символом $\sqrt[n]{a}$ (читают: корень n-й степени из числа a). Например, решением уравнения $x^3 = 2$ является иррациональное число, которое обозначают символом $\sqrt[3]{2} \approx 1,25$.

При решении уравнения $x^n = a$ (где $a > 0,\ n \in N,\ n \geq 2$) получаем в случае четного n два корня: $x_1 = -\sqrt[n]{a}$ и $x_2 = \sqrt[n]{a}$; в случае нечетного n – один корень $x = \sqrt[n]{a}$. Это проиллюстрировано рисунком, на котором приведен график функции $y = x^n$ и приведено решение уравнения $x^n = a$.



n – четное



n – нечетное

Приведем теперь строгое определение корня.

Определение 1. Корнем *n*-й степени ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) **из неотрицательного числа *a* называют такое неотрицательное число, при возведении которого в степень получают число *a*.** Таким образом, если $a \geq 0$ и $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то: 1) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ и 2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Приняты термины: $\sqrt[n]{a}$ – корень n-й степени из числа a, число a – подкоренное число, число n – показатель корня.

Для наиболее часто встречающихся корней приняты специальные названия: при $n = 2$ говорят «квадратный корень» и обозначают символом $\sqrt{a}$, при $n = 3$ говорят «кубический корень» и обозначают символом $\sqrt[3]{a}$.

Вообще, зависимости $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ обозначают одну и ту же связь между неотрицательными числами a и b. Операцию нахождения корня называют **извлечением корня**. Такая операция является обратной по отношению к операции возведения в соответствующую степень, что видно из данных таблицы.

Возведение в степень	Извлечение корня
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$0{,}5^4 = 0{,}0625$	$\sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$
$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$	$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$
$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$	$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$

Пример 2

Используя определение, вычислим:

а) $\sqrt[3]{125}=5,$ так как $125 \geq 0$, $5 \geq 0$ и $5^3 = 125$;

б) $\sqrt[4]{0,0081}=0,3,$ так как $0,0081 \geq 0$, $0,3 \geq 0$ и $0,3^4 = 0,0081$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{125}}=\dfrac{4}{5},$ так как $\dfrac{64}{125}\geq 0,\ \dfrac{4}{5}\geq 0$ и $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$;

г) $\sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}}=\sqrt[4]{\dfrac{625}{81}}=\dfrac{5}{3},$ так как $\dfrac{625}{81}\geq 0,\ \dfrac{5}{3}\geq 0$ и $\left(\dfrac{5}{3}\right)^4=\dfrac{625}{81}$;

д) $\sqrt[9]{0}=0,$ так как $0 \geq 0$ и $0^9 = 0$.

Операцию извлечения корня можно ввести и **для отрицательного числа *a***, но только в случае **нечетного показателя** n корня. Например, равенство $(-4)^3 = -64$ можно записать в виде $\sqrt[3]{-64}=-4.$ Для этого случая определение корня аналогично уже приведенному.

Определение 2. Корнем нечетной степени *n* (n = 3, 5, 7, …) **из отрицательного числа *a* называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень *n* получают число *a*.** Таким образом, если $a < 0$ и n = 3, 5, 7, …, то: 1) $\sqrt[n]{a}<0$ и 2) $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Пример 3

Используя определение, вычислим:

а) $\sqrt[5]{-32}=-2,$ так как $-32 < 0$, $-2 < 0$ и $(-2)^5 = -32$;

б) $\sqrt[3]{-0,125}=-0,5,$ так как $-0,125 < 0$, $-0,5 < 0$ и $(-0,5)^3 = -0,125$;

в) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}=-\dfrac{2}{3},$ так как $-\dfrac{8}{27}<0,\ -\dfrac{2}{3}<0$ и $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3=-\dfrac{8}{27}.$

Таким образом, корень четной степени имеет смысл (т. е. определен) только для неотрицательных подкоренных чисел; корень нечетной степени имеет смысл для любых подкоренных чисел.

В заключение остановимся на решении простейших иррациональных уравнений и неравенств.

Пример 4

Решим уравнение:

а) $\sqrt[4]{3x+7}=-1.$ Корень четной степени – число неотрицательное и не может равняться числу -1. Поэтому данное уравнение решений не имеет.

б) $\sqrt[4]{5x-14}=1.$ Обе части уравнения – неотрицательные выражение и число. Поэтому обе части возведем в четвертую степень и получим линейное уравнение $5x - 14 = 1$ или $5x = 15$, корень которого

$x = 3$. Итак, данное иррациональное уравнение имеет единственное решение $x = 3$.

в) $\sqrt[3]{3x+10} = -2$. Уравнение содержит корень нечетной степени. Возведем в куб обе части и получим линейное уравнение $3x + 10 = -8$ или $3x = -18$, корень которого $x = -6$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x = -6$.

г) $\sqrt{11-x} = x+1$. Левая часть уравнения – неотрицательное выражение, т. к. является квадратным корнем. Поэтому правая часть также должна быть неотрицательным выражением, т. е. $x + 1 \geq 0$ (откуда $x \geq -1$). Возведем в квадрат обе части данного уравнения $11 - x = (x + 1)^2$. При этом очевидно, что подкоренное выражение $11 - x \geq 0$, т. к. $(x + 1)^2 \geq 0$. Получим квадратное уравнение $11 - x = x^2 + 2x + 1$ или $0 = x^2 + 3x - 10$. Его корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -5$. Однако условию $x \geq -1$ удовлетворяет только значение $x = 2$. Поэтому корень $x = -5$ посторонний. Итак, данное иррациональное уравнение имеет единственное решение $x = 2$.

Пример 5

Решим неравенство:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{2x-3}{4-x}} > -2$. Левая часть неравенства – неотрицательное выражение, правая часть – отрицательное число. Поэтому неравенство выполнено для всех значений x из ОДЗ неравенства. Решим неравенство $\dfrac{2x-3}{4-x} \geq 0$, например, методом интервалов. Получаем $x \in [1,5;\ 4)$. Этот промежуток является решением данного иррационального неравенства.

б) $\sqrt{x^2+3x} \geq 2$. Левая часть неравенства – неотрицательное выражение, правая часть – положительное число. Поэтому возведем обе части неравенства в квадрат: $x^2 + 3x \geq 4$. При этом подкоренное выражение положительно. Решим полученное квадратное неравенство $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ и получим: $x \in (-\infty;\ -4] \cup [1;\ +\infty)$.

в) $\sqrt{x^2+8x} < 3$. ОДЗ неравенства задается условием $x^2 + 8x \geq 0$. Решение этого неравенства $x \in (-\infty;\ -8] \cup [0;\ +\infty)$. Обе неотрицательные части неравенства $\sqrt{x^2+8x} < 3$ возведем в квадрат. Получаем квадратное неравенство $x^2 + 8x < 9$ или $x^2 + 8x - 9 < 0$. Его решение $x \in (-9;\ 1)$. С учетом ОДЗ находим решение данного иррационального неравенства: $x \in (-9;\ -8] \cup [0;\ 1)$.

г) $\sqrt{x+3} > 3-x$. ОДЗ неравенства определяется условием $x + 3 \geq 0$, откуда $x \in [-3; +\infty)$. При таких значениях x правая часть данного неравенства может быть и отрицательной, и положительной.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $3 - x < 0$ (т. е. $x > 3$) правая часть отрицательна, левая – неотрицательна. Получаем верное неравенство. Поэтому промежуток $x \in (3; +\infty)$ – решение данного неравенства.

2) При $3 - x \geq 0$ (т. е. $x \leq 3$) обе части неравенства неотрицательны. Возведем их в квадрат. Получаем: $x + 3 > (3 - x)^2$ или $0 > x^2 - 7x + 6$. Решение этого квадратного неравенства – промежуток $x \in (1; 6)$. С учетом ограничения $x \leq 3$ находим, что промежуток $x \in (1; 3]$ – решение данного неравенства.

Объединяя решения рассмотренных двух случаев, окончательно найдем решение данного иррационального неравенства: $x \in (1; +\infty)$.

III. Контрольные вопросы

1. Определение корня *n*-й степени из неотрицательного числа.
2. Корень нечетной степени из отрицательного числа.

IV. Задание на уроках

§ 33 № 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, в); 4 (а, б); 9 (а, в); 11 (а, б); 12 (в, г); 14 (а, б); 15 (а, г); 16 (б, в); 17 (а, б); 18 (в).

V. Задание на дом

§ 33 № 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (б, г); 4 (в, г); 9 (б, г); 11 (в, г); 12 (а, б); 14 (в, г); 15 (б, в); 16 (а, г); 17 (в, г); 18 (а).

VI. Подведение итогов уроков

Уроки 3–4. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

Цель: рассмотреть свойства и графики функций $y = \sqrt[n]{x}$.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Определение корня n-й степени из неотрицательного числа.
2. Решите уравнение (неравенство):

а) $\sqrt{3x+1}=x+1$;

б) $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$;

в) $\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}\geq 2$.

Вариант 2

1. Определение корня нечетной степени из отрицательного числа.
2. Решите уравнение (неравенство):

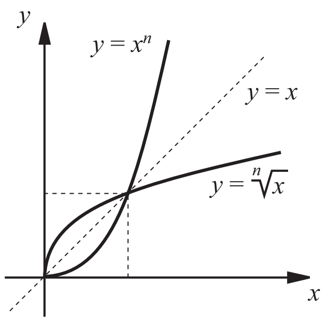
а) $\sqrt{8x+1}=2x+1$;

б) $\sqrt{x^2-4x+4}=2-x$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}\geq 2$.

III. Изучение нового материала

Сначала обсудим свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ для неотрицательных значений аргумента. Степенная функция $y=x^n$ при $x\in[0;+\infty)$ монотонна. Поэтому такая функция обратима. Найдем обратную функцию. Из равенства $y=x^n$ выразим переменную x и получим $x=\sqrt[n]{y}$. Поменяем переменные x и y местами и получим функцию $y=\sqrt[n]{x}$, обратную для функции $y=x^n$. Поэтому график функции $y=\sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y=x^n$ относительно прямой $y=x$ для $x\geq 0$.



Перечислим основные **свойства** функции $y=\sqrt[n]{x}$ $(x\geq 0)$:

1) область определения $D(f)=[0;+\infty)$.
2) функция не является ни четной, ни нечетной;
3) функция возрастает на $[0;+\infty)$;

4) функция ограничена снизу и не ограничена сверху;

5) наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет;

6) функция непрерывна;

7) область значений $E(f) = [0; +\infty)$;

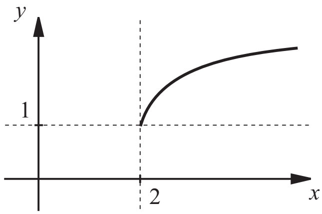
8) функция выпукла вверх;

9) функция дифференцируема (имеет производную) в любой точке $x > 0$ и не имеет производной в точке $x = 0$.

Пример 1

Построим график функции $y = \sqrt[4]{x-2}+1$.

Построим вспомогательную систему координат с началом в точке (2; 1) и осями – прямыми $y = 1$ и $x = 2$. В этой новой системе координат построим график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

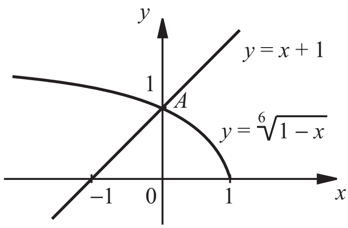


Можно было также сместить график функции $y = \sqrt[4]{x}$ на две единицы вправо и на одну единицу вверх.

Пример 2

Решим уравнение $\sqrt[6]{1-x} = x+1$.

В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt[6]{1-x}$ и $y = x + 1$. Видно, что графики функций пересекаются в единственной точке $A(0; 1)$. Проверка показывает, что эта точка принадлежит и графику функции $y = \sqrt[6]{1-x}$, и графику функции $y = x + 1$. Тогда данное уравнение имеет единственный корень: $x = 0$ – абсцисса точки A.

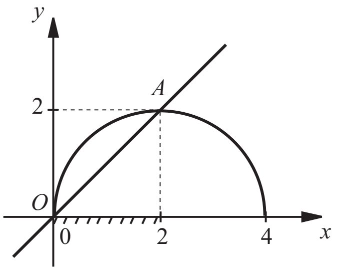


Графический способ решения подсказывает и аналитическое решение. Легко проверить, что $x = 0$ – корень данного уравнения. При этом функция $y = x + 1$ возрастает, а функция $y=\sqrt[6]{1-x}$ убывает. Тогда данное уравнение имеет только один корень.

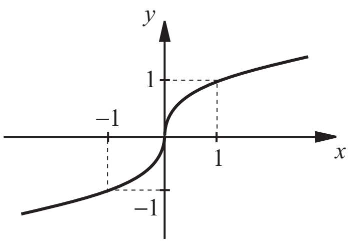
Пример 3

Решим неравенство $\sqrt{4x-x^2} \geq x$.

Сначала построим график функции $y=\sqrt{4x-x^2}$. Очевидно, что $y \geq 0$. Возведем обе части равенства в квадрат: $y^2 = 4x - x^2$ – и приведем его к виду $(x^2-4x+4)+y^2=4$ или $(x-2)^2+y^2=2^2$. Видно, что графиком функции $y=\sqrt{4x-x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса 2 с центром в точке (2; 0). Графиком функции $y = x$ является биссектриса I и III координатных углов. Видно, что графики функций пересекаются в точках $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ 2)$ и данное неравенство выполняется на промежутке $x \in [0;\ 2]$.



Остановимся теперь на свойствах функции $y=\sqrt[n]{x}$ в случае **нечетного значения *n* и любых значений аргумента *x***. Очевидно, что такая функция является нечетной. Действительно, получаем: $y(-x)=\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x}=-y(x)$. Так как выполнено равенство $y(-x) = -y(x)$, то функция $y=\sqrt[n]{x}$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. На рисунке приведен график этой функции.



Перечислим основные **свойства** функции $y=\sqrt[n]{x}$ для нечетного **значения *n***:

1) область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат;

3) функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

4) функция не ограничена;

5) функция наименьшего и наибольшего значения не имеет;

6) функция непрерывна;

7) область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

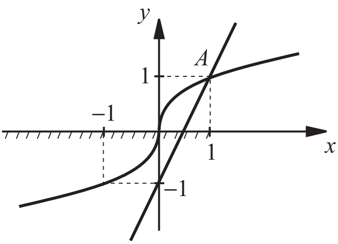
8) функция выпукла вниз на промежутке $(-\infty; 0]$ и выпукла вверх на промежутке $[0; +\infty)$;

9) функция дифференцируема (имеет производную) в любой точке $x \neq 0$ и не имеет производной в точке $x = 0$.

Пример 4

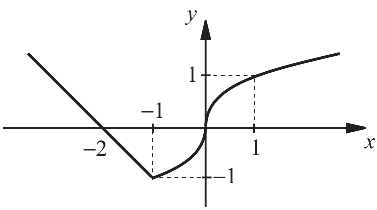
Решим неравенство $\sqrt[3]{x} \geq 2x - 1$.

В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = 2x - 1$. Графики функций пересекаются в единственной точке $A(1; 1)$, и данное неравенство выполняется на промежутке $x \in (-\infty; 1]$.



Пример 5

Построим и прочитаем график функции $y = f(x)$, где
$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geq -1. \end{cases}$$



Сначала построим график функции $y = -x - 2$ на промежутке $(-\infty; -1)$. Затем строим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ на промежутке $[-1; +\infty)$. С учетом построенного графика перечислим основные свойства функций: