Лекция 1

Определение случайного процесса. Фазовое пространство. Реализация случайного процесса

Теорией случайных процессов называют раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений в динамике их развития. Теория случайных процессов — это сравнительно новый раздел теории вероятностей, особенно интенсивно развивающийся в настоящее время в связи с широким кругом его практических приложений.

При изучении явлений окружающего мира мы достаточно часто наблюдает процессы, течение которых нельзя заранее предсказать точно, например:

1) частица, совершающая броуновское движение, меняет свое положение случайным образом в результате соударений с молекулами жидкости;

2) численность населения города меняется с течением времени случайным образом под влиянием рождаемости, смертности, миграции и т.д.;

3) уровень воды в реке меняется случайным образом в зависимости от погоды, количества осадков, таяния снега, интенсивности оросительных мероприятий и т.д.

Вообще говоря, в природе нет совершенно детерминированных, т.е. неслучайных процессов; но есть процессы, на ход которых случайные факторы влияют так слабо, что ими можно пренебречь при изучении данного явления (например, процесс обращения планет вокруг солнца). Однако существуют и такие процессы, где случайность играет основную роль (уже упоминавшееся броуновское движение частицы). Между двумя крайними случаями лежит целый спектр процессов, где случайность играет большую или меньшую роль. Учитывать или не учитывать случайность процесса зависит также от того, какую практическую задачу требуется решить. Так, при составлении расписания движения самолетов между двумя городами, можно считать их траектории прямолинейными, а движение равномерным. Те же допущения не подойдут, если решается задача конструирования автопилота для управления полетом самолета.

Случайный процесс — это семейство случайных величин $X(t)$, зависящих от некоторого параметра t, где параметр $t \in T$ — множеству значений параметра. В большинстве практических приложений параметр t трактуется как время.

Сечение случайного процесса в момент времени t_0 — это обычная случайная величина $X(t_0)$, которая получается, если зафиксировать у случайного процесса значение времени t_0.

Таким образом, понятие случайного процесса является обобщением понятия случайной величины.

Аналогично тому, как случайная величина может быть представлена функцией элементарного события (появляющегося в результате стохастического эксперимента), можно и случайный процесс $X(t)$ трактовать как функцию двух аргументов — времени t и элементарного события ω:

$$X(t) = \phi(t, \omega);\ t \in T;\ \omega \in \Omega;\ X(t) \in \aleph,$$

где ω — элементарное событие;

Ω — пространство элементарных событий;

ℵ — множество возможных значений случайного процесса, которое называют *фазовым пространством.*

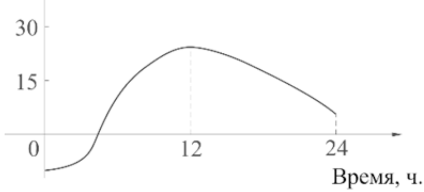
Предположим, что стохастический эксперимент (или опыт) уже произведен, и произошло некоторое событие $\omega_0 \in \Omega$, т.е. зафиксируем второй аргумент ω у функции $\varphi(t, \omega)$. Тогда мы получим функцию одного аргумента t:

$$x(t) = \phi(t, \omega_0);\ t \in T.$$

Эту функцию называют реализацией или траекторией случайного процесса. Таким образом, *реализация случайного процесса* является неслучайной функцией, в которую превращается случайный процесс в результате опыта.

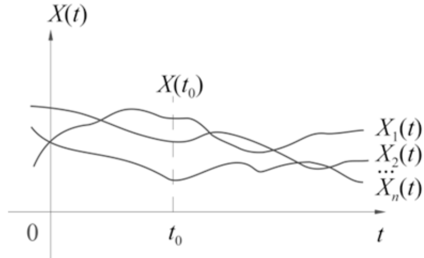
Записывая температуру воздуха θ в течение суток в некоторой географической точке в зависимости от времени t, можно получить реализацию $\theta(t)$ случайного процесса $\Theta(t)$.

Другим примером реализации случайного процесса могут быть записи прибора — самописца: кардиограммы, эхограммы и другие подобные.



Если произведён не один опыт, а несколько, в результате каждого из которых наблюдалось какая-либо реализация случайного процесса, то получают целое семейство реализаций.

Семейство реализаций случайного процесса — это несколько различных реализаций одного случайного процесса

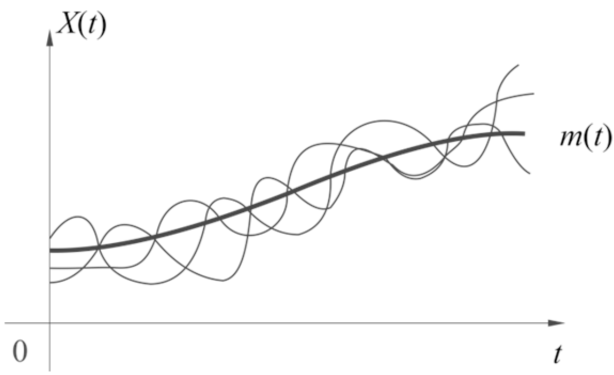


Семейство реализации случайного процесса аналогично совокупности наблюдавшихся значений случайной величины $X\left(t_0\right)$. Различие состоит в том, что здесь наблюдается не числовые значения, а функции аргумента *t*.

Семейство реализаций случайного процесса является основным экспериментальным материалом, на базе которого можно получить статистические характеристики случайного процесса.

Характеристики случайных процессов

К характеристикам случайного процесса относят математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию.



Математическим ожиданием случайного процесса называется траектория математических ожиданий, составляющих этот процесс случайных величин:

$$m\left(t\right) = MX\left(t\right).$$

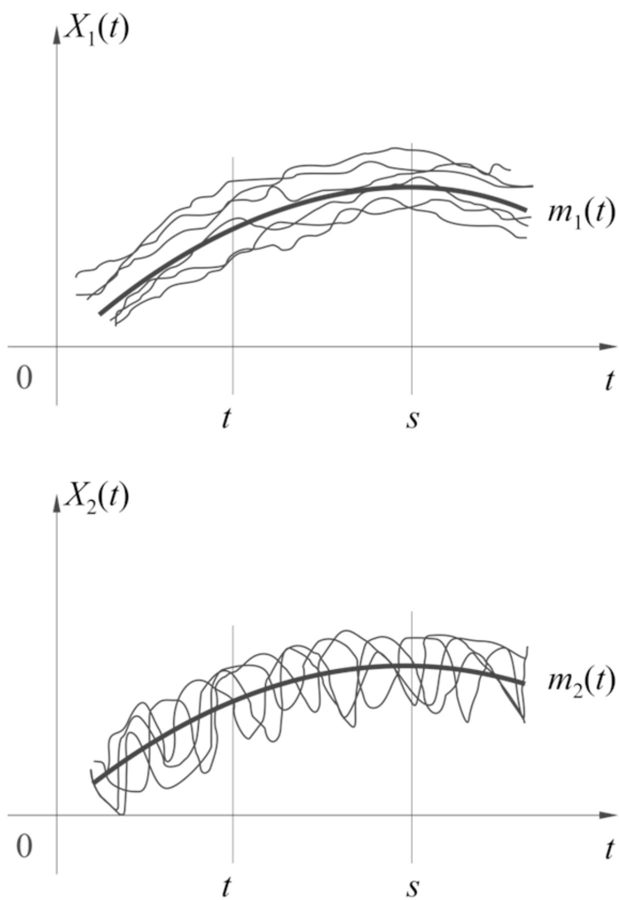
Дисперсией случайного процесса называется траектория дисперсий, составляющих этот процесс случайных величин:

$$\sigma^2\left(t\right) = DX\left(t\right).$$

Таким образом, математическое ожидание $m(t)$ случайного процесса $X(t)$ представляет собой некоторую неслучайную «среднюю функцию», около которой варьируются реализации случайного процесса.

Дисперсия случайного процесса $\sigma^2(t)$ представляет собой неслучайную неотрицательную функцию, характеризующую степень разброса реализаций случайного процесса $X(t)$ около его математического ожидания $m(t)$.

Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса являются весьма важными, но отнюдь не исчерпывающими, так как определяются только одномерным законом распределения.



Например, у процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$, реализации которых изображены на рисунке математические ожидания и дисперсии примерно одинаковы. Однако внутренняя структура этих процессов резко различна. Случайный процесс $X_1(t)$ имеет плавно меняющиеся реализации, тогда как случайный процесс $X_2(t)$ имеет резко выраженную колебательную структуру. Для процесса $X_1(t)$ характерна большая предсказуемость реализации: если реализация процесса $X_1(t)$ была в какой-то момент t больше его математического ожидания $m_1(t)$, то с большой вероятностью можно ожидать, что и её продолжения будет лежать выше кривой $m_1(t)$. Другими словами, для случайного процесса $X_1(t)$ характерна сильная вероятностная зависимость между двумя его сечениями $X_1(t)$ и $X_1(s)$ Это утверждение не справедливо для случайного процесса $X_2(t)$. Между его сечениями $X_2(t)$ и $X_2(s)$ практически нет вероятностной зависимости при достаточном удалении сечений друг от друга.

Для характеристики степени линейной зависимости между сечениями случайного процесса используют ещё одну характеристику — ковариационную функцию.

Ковариационной функцией случайного процесса называется функция двух переменных, значения которой представляют собой коэффициенты ковариации сечений процесса в соответствующие моменты времени:

$$B(t,s) = \operatorname{cov}\left[X(t), X(s)\right] = M\left\{\left[X(t) - m(t)\right]\cdot\left[X(s) - m(s)\right]\right\}.$$

Ясно, что у случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ ковариационные функции различны: корреляционная функция $B(t, s)$ убывает по мере увеличения разности $t - s$ гораздо медленнее, чем ковариационная функция процесса $X_2(t)$.

Итак, понятие математического ожидания случайного процесса, дисперсии случайного процесса и ковариационной функции обобщают соответствующие понятия для случайных величин.

Подобно тому, как любая случайная величина полностью характеризуется своим законом распределения, случайный процесс может быть охарактеризован так называемым *конечномерным распределением*.

Конечномерным распределением случайного процесса в моменты $t_1, t_2, \dots t_n$ называется распределение многомерной случайной величины, составленной из сечений процесса в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$, т.е. по определению

$$F_{t_1,t_2,...t_n}\left(x_1, x_2, ... x_{1n}\right) = P\left\{X\left(t_1\right) < x_1, X\left(t_2\right) < x_2, ... X\left(t_n\right) < x_n\right\}.$$

Конечномерное распределение случайного процесса — это совокупность совместных законов распределения различных сечений процесса для всевозможных моментов времени. В качестве примера рассмотрим важный класс случайных процессов, где числовые характеристики полностью определяют распределение вероятностей. В теории случайных процессов большой класс образуют так называемые нормальные или *гауссовские* случайные процессы.

Процесс называется *гауссовским,* если все его конечномерные распределения нормальные. Распределение вероятностей гауссовского случайного процесса полностью задается его математическим ожиданием $m(t)$ и корреляционной функцией $B(t,s)$.

Лекция 2

Классификация случайных процессов. Стационарные случайные процессы

Теперь остановимся на вопросе о том, как классифицируют случайные процессы.

В теории случайных процессов принято классифицировать их по тем или иным признакам. Самая элементарная классификация — «по времени» и «по состояниям». Для того, чтобы о ней рассказать, заметим, что при решении практических задач обычно предполагают, что случайный процесс протекает в некоторой системе S. Под системой может пониматься что угодно: техническое устройство, ремонтная мастерская, железнодорожный узел, биологическая популяция и т.д. Случайный процесс, протекающий в любой системе, представляет собой случайные переходы системы из состояния в состояние. Состояние системы может быть охарактеризовано с помощью каких-то численных переменных.

Пример. Электронный банкомат в операционном зале банка может находиться в одном из трех состояний: S_1 — исправен, работает; S_2 — неисправен, отключён; S_3 — ремонтируется.

Далее обратимся к определениям.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты времени, число которых конечно или счетно (т.е. множество T — множество моментов времени, когда система меняет свои состояния, является дискретным).

Примером может служить процесс обстрела цели, в ходе которого цель может менять свои состояния (не повреждена, частично выведена из строя, перестала функционировать, полностью разрушена) в моменты времени $t_1, t_2, t_3 \ldots$

Сечения случайного процесса с дискретным временем образуют последовательность случайных величин, поэтому случайные процессы с дискретным временем называют также случайной последовательностью или *временным рядом*.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени наблюдаемого периода. Для процесса с непрерывным временем множество T — множество моментов времени, когда система меняет свои состояния — несчетно, т.е. T — некоторый участок действительной оси.

Примером процесса с непрерывным временем является броуновское движение частицы в поле зрения микроскопа.

Случайный процесс, протекающий в системе S называется *процессом с дискретными состояниями*, если в любой момент времени t множество состояний — конечно или счетно, т.е. сечения такого процесса в любой момент времени есть дискретная случайная величина (она может быть одномерной или многомерной).

Например, техническое устройство состоит из n узлов, которые могут в ходе работы устройства отказывать (выходить из строя). Число отказавших к моменту времени t узлов — случайный процесс с дискретными состояниями.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывными состояниями*, если его сечения в любой момент времени представляют собой непрерывную случайную величину.

Пример случайного процесса с непрерывными состояниями — напряжение $U(t)$ питания ЭВМ в момент времени t. В зависимости от характера изменения аргумента и строения фазового пространства все случайные процессы можно разделить на 4 класса:

I. *Процессы с дискретным временем и дискретными состояниями.* Примером может служить процесс распространения мутаций генов в биологической популяции.

II. *Процессы с непрерывным временем и дискретными состояниями.* К таким относятся процессы образования очередей.

III. *Процессы с дискретным временем и непрерывными состояниями.* Примером является процесс перемешивания шихты во время плавки в доменной печи.

IV. *Процессы с непрерывным временем и непрерывными состояниями.* Примером будет давление газа в заданном резервуаре в зависимости от времени.

Кроме приведенной классификации возможны и другие. Более содержательной является классификация случайных процессов по характеру зависимости между значениями процесса $X(t)$ в различные моменты времени t, это:

1) случайные процессы с независимыми значениями;
2) случайные процессы с независимыми приращениями;
3) марковские случайные процессы;
4) стационарные случайные процессы;
5) мартингалы.

Наиболее интересные конкретные результаты получены в двух специальных направлениях — марковских и стационарных процессах; наряду с ними повысился интерес к мартингалам.

Исторически первыми изучались марковские случайные процессы. Работы А.А. Маркова начала XX века (1907 г.) по изучению последовательностей зависимых испытаний (цепей Маркова) послужили фундаментом всей современной теории марковских процессов. Начало общей теории случайных процессов было положено работами А.Н. Колмогорова и А.Я. Хинчина, относящимся 30-м гг. XX в. Колмогоров заложил основы теории марковских случайных процессов с непрерывным временем, а затем, примыкая к исследованиям Хинчина, теорию стационарных случайных процессов и процессов со стационарными приращениями.

Теперь обратимся к определениям.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми значениями*, если для любых двух моментов времени сечения процесса в эти моменты — независимы.

Если время дискретно, то процесс с независимыми значениями — это то же самое, что и последовательность независимых случайных величин.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых двух непересекающихся промежутков времени приращения процесса на этих промежутках — независимы.

Случайные процессы с независимыми приращениями используют в физике, в частности так называемый *винеровский процесс* — процесс, независимые приращения которого имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной величине приращения интервала времени. Винеровский процесс служит математической моделью броуновского движения.

Случайный процесс $X(t)$ называется *марковским*, если для любых двух моментов времени τ и ζ (причем $\tau < \zeta$) условное распределение вероятностей сечения $X(\zeta)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t < \tau$, зависит только от $X(\tau)$. То есть при известном настоящем процесса, его будущее не зависит от прошлого.

В силу такого определения марковские процессы называют процессами без последействия.

Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов. В детерминированных процессах состояние системы в момент времени τ однозначно определяет ход процесса в будущем. В марковских процессах состояние системы в момент τ однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t < \tau$, причем никакие сведения о ходе процесса до момента τ не изменяют это распределение, т.е. будущее поведение системы, описываемой марковским случайным процессом, целиком определяется её состоянием в последний из известных моментов времени.

Другим крупным направлением случайных процессов является теория стационарных случайных процессов. Стационарность процесса подразумевает неизменность во времени его вероятностных закономерностей и налагает сильное ограничение на процесс.

Для большей части теории достаточно предположения о стационарности в широком смысле.

Случайный процесс называют *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция зависит только от разности своих аргументов (таким образом являясь функцией только одной переменной):

$$B(t,s) = f(t-s).$$

Из такого предположения следует возможность наилучшей в среднем квадратичном линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации случайного процесса.

Случайный процесс называют *стационарным в узком смысле*, если его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига по времени $h > 0$. В частности, при любых t и h случайные величины $X(t)$ и $X(t+h)$ имеют одинаковое распределение.

Можно показать, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Интересно, что для гауссовских процессов из стационарности в широком смысле следует стационарность в узком смысле.

Схема стационарных случайных процессов с хорошим приближением описывает многие реальные явления, сопровождающиеся неупорядоченными флуктуациями. Так, например, пульсация скорости в точке турбулентного течения представляет собой стационарный случайный процесс, если течение является установившимся.

В экономике важную роль играет изучение экономических временных рядов. В общем случае случайная составляющая экономического временного ряда является стационарной случайной последовательностью.

Способы описания и анализа случайных процессов разнообразны и приспособлены к тем или иным классам. Так, в теории марковских случайных процессов используют методы решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений; в теории стационарных случайных процессов применяют методы функционального анализа. В этих двух направлениях получены наиболее интересные конкретные результаты.

Лекция 3

Цепи Маркова с дискретным временем и их применение

На практике часто встречаются случайные процессы, которые с той или иной степенью приближения можно считать марковскими. Любой марковский процесс описывают с помощью вероятностей состояний и переходных вероятностей.

Вероятности состояний марковского случайного процесса — это вероятности того, что система, в которой протекает процесс, в момент времени t находится в состоянии S_k :

$$p_k(t) = P\{X(t) = S_k\}.$$

Переходные вероятности марковского процесса — это вероятности перехода системы из одного состояния в любое другое за время единицу времени (за один шаг):

$$p_{ij} = P\{X(t+1) = S_j \mid X(t) = S_i\}.$$

Марковский процесс называют *однородным*, если вероятности перехода за единицу времени не зависят от того, где на оси времени происходит переход.

В дальнейшем в лекции будем рассматривать однородные марковские процессы.

Наиболее простым марковским процессом является *цепь Маркова* — марковский случайный процесс с дискретным временем и дискретным конечным множеством состояний.

Переходные вероятности за один шаг для цепи Маркова — p_{ij} записывают в виде матрицы $P = \left\{ p_{ij} \right\}$, которую называют матрицей вероятностей перехода или более коротко — *переходной матрицей*.

При анализе цепи Маркова составляют граф состояний, на котором отмечают все состояния цепи (или системы, в которой проходит процесс) и ненулевые вероятности перехода за один шаг.

Марковскую цепь можно представить себе так, как будто точка, изображающая систему, случайным образом перемещается по графу состояний, перескакивая за один шаг из состояния в состояние, в соответствие с величиной переходных вероятностей, или задерживаясь на несколько шагов в одном и том же состоянии. Приведем пример.

Рассмотрим деятельность двух конкурирующих фирм *A* и *B* на протяжении одного квартала. В начале каждого месяца рассматриваемого квартала фирма *B* предпринимает действия (например поставляет на рынок более качественный товар по более низким ценам), в результате которых фирма *A* может оказаться в одном из следующих состояний:

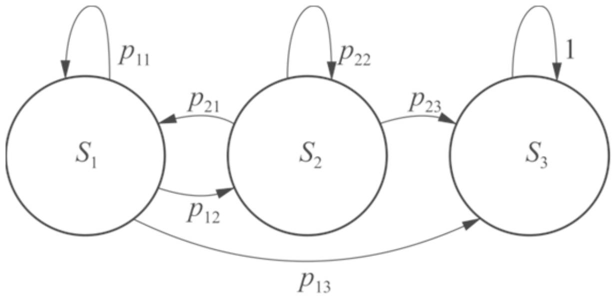
S_1 — состояние дел фирмы *A* хорошее;

S_2 — фирме *A* нанесен ущерб;

S_3 — фирма *A* обанкротилась.

Будем предполагать, что фирма *A* может переходить из состояния в состояние только в начале каждого месяца, и что процесс, протекающий в данной системе является марковским.

Составим граф состояний, считая при этом, что если фирма обанкротилась, то она не может быть восстановлена, То есть, если система попала в состояние S_3, то она остается в нем, так как не может перейти в какое-либо другое состояние. Состояние S_3 называют *поглощающим*.



Составим матрицу переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов, стоящих на любой строке данной матрице, представляет собой вероятность того, что в произвольный момент времени фирма из одного состояния перейдет в некоторое другое состояние или останется в том же состоянии. Такое событие является достоверным, а его вероятность равна единице. Все элементы данной матрицы являются вероятностями, и, следовательно, неотрицательны. Таким образом, данная переходная матрица, как и любая другая переходная матрица, обладает двумя свойствами:

1) все её элементы неотрицательны;
2) сумма элементов любой строки матрицы равна 1.

Матрицы, обладающие двумя перечисленными свойствами, называют *стохастическими*.

Используя переходную матрицу, теоремы сложения и умножения, можно вычислить вероятность любой реализации цепи Маркова.

Например, вычислим вероятность того, что состояние дел фирмы A будет хорошим на протяжении всего квартала: $P = \left(p_{11}\right)^3$. Вероятность того, что состояние дел у фирмы A будет хорошим в конце квартала, при условии, что в начале квартала состояние дел также было хорошим:

$$P = p_{11}\left\{\left(p_{11}\right)^2 + p_{12} \cdot p_{21}\right\} + p_{12}\left\{p_{22} \cdot p_{21} + p_{21}p_{11}\right\}.$$

Вернемся к общему случаю.

При изучении цепей Маркова, как правило, требуется найти:

1) вероятности перехода за m шагов;
2) распределение по состояниям при $m \to \infty$;

3) среднее время пребывания в некотором состоянии;

4) среднее время возвращения в некоторое состояние.

Обратимся к вычислению этих характеристик. Рассмотрим однородную цепь Маркова с n состояниями. Для того чтобы найти вероятность перехода из состояния S_i в состояние S_j за m шагов воспользуемся формулой полной вероятности. Из состояния S_i в состояние S_j можно попасть через промежуточное состояние S_k (где $k = 1, 2,\dots n$): сначала за h шагов перейти из S_i в S_k, затем за оставшиеся m — h шагов, из S_k в S_j:

$$p_{ij}(m) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(h) p_{kj}(m-h).$$

Последнее соотношение верно для всех i и j от 1 до n, его можно представить в матричной форме:

$$P(m) = P(h) \cdot P(m-h).$$

Таким образом,

$$P(2) = P(1) \cdot P(1) = P^2.$$

$$P(3) = P(2) \cdot P(1) = P^3.$$

$$P(m) = P(1) \cdot P(m-1) = P^m.$$

Итак, зная матрицу перехода P за один шаг можно вычислить матрицу перехода за m шагов

$$P(m) = P^m.$$

Для того чтобы найти вероятность пребывания в состоянии S_j на m-м шаге, требуется знать матрицу перехода и начальное положение системы $p_i(0)$ — вероятности находиться в начальный момент времени в i-м состоянии. По формуле полной вероятности

$$p_j(m) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0) p_{ij}(m),$$

где $p_{ij}(m)$ — элемент матрицы перехода за m шагов, т.е. вероятность перейти из состояния S_i в состояние S_j за m шагов.

Часто требуется определить, что будет происходить с системой, если число шагов неограниченно возрастает. Будут ли вероятности $p_j(m)$ стремиться при $m \to \infty$ к каким-либо пределам или нет?

$$p_j = \lim_{m\to\infty} p_j(m).$$

Эти пределы, если они существуют, называют *предельными вероятностями состояний*. Верна следующая теорема.

Теорема. *Если в цепи Маркова из каждого состояния можно перейти* (*за то или иное число шагов*) *в любое другое, то предельные вероятности существуют и не зависят от начального состояния системы.*

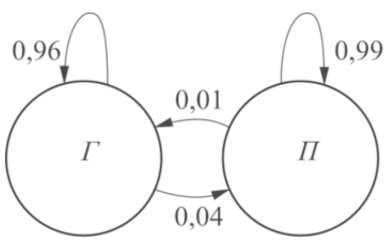
Для того чтобы найти предельные вероятности состояний системы необходимо решить матричное уравнение

$$p = p \cdot P,$$

где p — вектор-строка, составленный из предельных вероятностей состояний; P — матрица переходных вероятностей.

Таким образом, если предельные вероятности существуют, то в системе устанавливается некоторый предельный стационарный режим, который состоит в том, что система меняет свои состояния случайным образом, но вероятность каждого состояния уже не зависит от времени: каждое из них осуществляется с некоторой постоянной вероятностью.

Среднее время пребывания в состоянии S_i за время T есть произведение предельной вероятности пребывания в данном состоянии на величину промежутка времени:



$$M\left(\tau_i\right) = p_i T.$$

Среднее время возвращения в состояние S_i обратно пропорционально предельной вероятности пребывания в этом состоянии:

$$M\left(\psi_i\right) = 1 / p_i .$$

Пример. Пусть в городе N каждый год 4 % жителей переселяются в пригороды, а 1 % жителей переселяются в город. Предполагая, что число жителей города и пригородов остается постоянным, найдем окончательное распределение жителей между городом и пригородами.

В данных условиях мы имеем цепь Маркова с двумя состояниями: Г (город) и П (пригород).

Тогда переходная матрица имеет вид:

$P = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$. Для такой цепи существуют предельные вероятности состояний, которые можно найти, решив матричное уравнение

$$\left(p_{\text{г}} \cdot p_{\text{п}}\right) = \left(p_{\text{г}} \cdot p_{\text{п}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

То есть в координатном виде:

$$\begin{cases} 0,96 \cdot p_{\text{г}} + 0,01 \cdot p_{\text{п}} = p_{\text{г}} \\ 0,04 \cdot p_{\text{г}} + 0,99 \cdot p_{\text{п}} = p_{\text{п}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0,01 \cdot p_{\text{п}} = 0,04 \cdot p_{\text{г}} \\ 0,04 \cdot p_{\text{г}} = 0,01 \cdot p_{\text{п}} \end{cases}$$

Два уравнения данной системы одинаковы, поэтому для получения единственного решения требуется дополнительное условие:

$$p_{\text{г}} + p_{\text{п}} = 1,$$

так как по условию задачи внешней миграции нет.

Решая полученную систему, получим: $p_{\text{г}} = 0,2$; $p_{\text{п}} = 0,8$.

Следовательно, через достаточное число лет в самом городе будет приблизительно 20 % населения и в пригороде — 80 % не зависимо от первоначального распределения населения. Интересно, что по истечению длительного промежутка времени из города в пригороды будет ежегодно переселяться часть населения 0,02·0,04 = 0,008, а из пригорода в город — часть, равная 0,8·0,01 = 0,008. Иными словами, при «равновесии», которое будет достигнуто через большой промежуток времени, из города в пригороды будет переселяться ровно столько народу, сколько из пригородов в город.

Итак, мы познакомились с цепью Маркова, т.е. со случайным процессом, протекающим в системе, которая случайным образом может переходить из состояния в состояние только в некоторые, заранее определенные моменты времени.

Лекция 4

Цепи Маркова с непрерывным временем. Уравнения Колмогорова

На практике значительно чаще встречаются ситуации, когда переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные, а в произвольные моменты времени. Например, выход из строя любого элемента аппаратуры может произойти в любой момент времени; окончание ремонта этого элемента также может произойти в произвольный момент и т.д.

Для описания таких процессов в ряде случаев может быть с успехом применена схема марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Вероятности состояний марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем определяются так же, как и для цепи Маркова:

$$p_k\left(t\right) = P\left\{X\left(t\right) = S_k\right\}.$$

Для этих вероятностей всегда выполнено:

$$\sum_{i=1}^{n} p_k(t) = 1,$$

т.е. в произвольный момент времени система находится в одном из своих состояний.

Для процесса с непрерывным временем вероятность перехода системы из состояния в состояние точно в момент t будет равна нулю так же, как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины. Поэтому вместо вероятностей перехода для процессов с непрерывным временем рассматривают плотности вероятностей перехода.

Пусть $p_{ij}\left(\Delta t\right) = P\left\{X\left(t + \Delta t\right) = S_j \mid X\left(t\right) = S_i\right\}$ — вероятность того, что система за время Δt перешла из состояния S_i в состояние S_j, при этом $i \neq j$.

Заметим, что, так как мы рассматриваем однородные случайные процессы, то эти вероятности не зависят от того, в какой момент времени система находилась в состоянии S_i.

Плотность вероятности перехода λ_{ij} это предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к длине промежутка времени Δt, когда $\Delta t \to 0$, т.е.

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Плотности вероятностей перехода для однородного марковского процесса не зависят от времени.

Плотности вероятностей перехода марковского процесса, так же, как и переходные вероятности, можно записывать в виде матрицы, которую называют *матрицей плотностей вероятностей перехода* марковского процесса.

При составлении графа состояний марковского процесса с непрерывным временем, над стрелками указывают плотности вероятностей перехода. По размеченному графу состояний составляют дифференциальные уравнения, называемые дифференциальными уравнениями Колмогорова. Решая уравнения Колмогорова, можно найти вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \ldots p_n(t)$.

Структура Уравнений Колмогорова является вполне определенной, так как подчиняется правилу: *в левой части каждого уравнения стоят производные вероятностей состояний, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «–», если в состояние — знак «+». Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.*

Рассмотрим вывод уравнений Колмогорова на конкретном примере.

Пример. В автохозяйстве имеется некоторое количество автомашин. Каждая машина может выходить из строя (отказывать). Отказавшая машина становиться на стоянку и ожидает начало ремонта. Требуется определить вероятности состояний машины, если в начальный момент времени она была исправна. Состояния автомашины следующие:

S_1 — автомашина исправна,

S_2 — автомашина ожидает ремонта,

S_3 — автомашина ремонтируется.

Изобразим граф состояний. Считаем, что другие переходы невозможны. Сначала найдем $p_1(t)$ — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_1.

Придадим аргументу t малое приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1. Это событие может произойти двумя способами:

1) в момент времени t система находилась в состоянии S_3 и за время Δt перешла из него в состояние S_1. Вероятность такого события равна вероятности того, что в момент t система находилась в S_3, умноженной на условную вероятность перехода за время Δt в состояние S_1:

$$p_3(t) \cdot \lambda_{31} \cdot \Delta t$$