ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход на двухуровневую систему образования сопровождается перестройкой курса высшей математики с целью более экономного и эффективного его преподавания. Для этого нужно более четко представлять структуру курса, уметь выделять в каждом разделе основное, чтобы сосредоточить на нем внимание, как преподавателей, так и студентов.

Основу любого курса составляют понятия, среди которых есть базисные (основные, фундаментальные). Эти понятия выделены, показаны в развитии, показана их связь с приложениями, чтобы студент усваивал курс не фрагментарно, не формально. Поставленные цели преподавания сопровождаются конкретным перечнем знаний и умений, наличие которых у студентов можно проверить и оценить с помощью соответствующего контроля.

Учебная дисциплина отличается от науки, прежде всего, тем, что в ней имеется технология преподавания. Поэтому базис дисциплины состоит из технологической части (технология изучения дисциплины по разделам, контроль усвоения курса, методическое обеспечение) и теоретической части (методология дисциплины, цели курса, базисные понятия разделов, основные задачи, решаемые в разделах, базисные методы решения основных задач, перечень теоретических знаний, умений и навыков в решении задач).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В математике дифференциальные уравнения занимают особое место. Математическое исследование самых разнообразных явлений, происходящих в природе, часто приводит к решению таких уравнений, поскольку сами законы, которым подчиняется то или иное явление, записываются в виде дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которые неизвестная функция входит под знак производной.

Основная задача теории дифференциальных уравнений – изучение функций, являющихся решениями таких уравнений.

Дифференциальные уравнения можно разделить на обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых неизвестные функции являются функциями одной переменной, и на дифференциальные уравнения в частных производных, в которых неизвестные функции являются функциями двух и большего числа переменных.

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению. Представим себе водоем, в который втекает вода (или из которого вытекает). Объем воды, находящейся в водоеме, обозначим через V. Этот объем со временем меняется, т.е. V есть функция времени t. Каков смысл величины $\frac{dV}{dt}$?

Ясно, что $dV = V(t+\Delta t) - V(t)$ есть объем воды, поступающей в водоем (при отрицательном значении dV − ушедший из водоема) за время dt. Поэтому $\frac{dV}{dt} = q(t)$ есть ***скорость изменения количества воды*** в водоеме. Величина $q(t)$ носит специальное название ***потока*** воды. Если $q > 0$, то вода в водоем поступает, если же $q < 0$, то вода из водоема вытекает, т.е. масса воды в водоеме уменьшается.

Если зависимость потока воды от времени известна, т.е. известна функция $q(t)$, то задача нахождения V математически не отличается от задачи определения пути по заданной скорости, которая как мы знаем, решается с помощью вычисления определенного интеграла.

Полученное уравнение является дифференциальным, так как в него входит производная $\frac{dV}{dt}$ искомой функции V. Для того чтобы наша задача имела определенное решение, нужно задать объем V_0 воды, который находился в водоеме в определенный начальный момент времени t_0. Условие $V = V_0$ при $t = t_0$ называют начальным условием, выделяющим одно определенное решение исходного уравнения.

Объем (количество) воды, которая втекла в водоем (или вытекла из него) за время от t_0 до t_1, есть $\int_{t_0}^{t_1} q(t)dt$. Поэтому количество воды в водоеме в момент t_1 равно

$$V(t_1) = V_0 + \int_{t_0}^{t_1} q(t)dt.$$

Это выражение справедливо для любого момента времени t_1 и, следовательно, полностью определяет искомую зависимость V от t_1. При значении $t_1 = t_0$ интеграл в последней формуле равен нулю и $V(t_0) = V_0$. Таким образом, полученное решение действительно удовлетворяет нашему начальному условию. Однако поток воды как функция времени известен отнюдь не всегда! Чаще известен физический закон, указывающий зависимость потока от напора воды, т.е. от высоты z уровня воды в водоеме. Так, например, можно считать, что $q = -kz$, где коэффициент k − это некоторое положительное постоянное число, а знак минус означает, что вода вытекает.

Имеет место совсем другой закон, установленный впервые учеником Галилея Э. Торричелли[1] $q = -a\sqrt{z}$.

Возможна также комбинация постоянного поступления воды q_0 и вытекания ее по закону $q = -kz$ или $q = -a\sqrt{z}$. В каждом из этих случаев, пока интересующая нас задача не решена, зависимость $z = z(t)$ уровня воды в водоеме от времени неизвестна, а значит, нам неизвестен и поток.

---

[11] **Э. Торричелли** − итальянский математик и физик, ученик Галилея.
Известен как автор концепции атмосферного давления и продолжатель дела Галилея в области разработки новой механики.

Мы сформулировали здесь задачу в общем случае для произвольной зависимости $q = q(z)$ потока q от уровня z. В уравнение $\frac{dV}{dt} = q(z)$ входят две неизвестные величины: количество (объем) V воды и уровень воды z. Очевидно, эти величины не независимы: каждому уровню z соответствует вполне определенный объем V воды, так что V есть функция $V(z)$ переменной z. Ясно, что вид функции $V(z)$ полностью определяется формой водоема.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Основные понятия

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}) = 0$, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$, а также её производные $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ (наличие хотя бы одной производной обязательно). Здесь F − заданная функция своих аргументов.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например,

$y' = xy^3$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка;

$y'' + \cos y = 0$ – дифференциальное уравнение 2-го порядка;

$y^{IV} - 16y'' = 0$ – дифференциальным уравнением 4-го порядка.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале $(a; b)$ называется всякая функция $y = \varphi(x)$, имеющая на этом интервале производные до n-го порядка включительно и такая, что подстановка функции $y = \varphi(x)$, а также её производных в дифференциальное уравнение обращает последнее в тождество по x на интервале $(a; b)$.

Например, функция $y = xe^{2x}$ является решением дифференциального уравнения 2-го порядка $y'' - 4y' + 4y = 0$ на интервале $(-\infty; \infty)$.

В самом деле,

$$y' = e^{2x}(1 + 2x),\ y'' = 4e^{2x}(1 + x).$$

Подставив в данное уравнение найденные значения y, y' и y'', получим –

$$4e^{2x}(1+x)-4e^{2x}(1+2x)+4xe^{2x} = 4e^{2x}(1+x-1-2x+x)\equiv 0$$
$$\forall x\in(-\infty;\infty).$$

График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.
Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

2.2. Эквивалентные дифференциальные уравнения Задача Коши

Изучение дифференциальных уравнений начнем с наиболее простого уравнения – уравнения первого порядка.

Определение. Уравнение вида

$$F(x, y, y')=0, \tag{2.1}$$

где x − независимая переменная; y − искомая функция; − её производная, называется дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Если в уравнении (2.1) удается выразить производную y' через x и y, то получаем уравнение в ***нормальной*** форме

$$y'=f(x, y) \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется ***уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***. Будем рассматривать именно такие уравнения.

В некоторых случаях уравнение (2.2) удобно записывать в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

или в эквивалентном (2.2) виде

$$f(x, y)dx-dy=0.$$

Последнее уравнение является частным случаем ***общего уравнения в дифференциальной форме***

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{2.3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - известные функции.
Уравнение в ***симметричной форме*** (2.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой переменной

Два дифференциальных уравнения

$$F_1(x; y; y') = 0, F_2(x; y; y') = 0$$

называются ***эквивалентными в некоторой области*** G изменения величин x, y, y', если всякое решение $y(x) \in G$ одного из этих уравнений является решением другого уравнения и наоборот.

При преобразовании дифференциальных уравнений надо следить за тем, чтобы преобразованное уравнение было ***эквивалентно*** исходному уравнению.

Если дифференциальное уравнение имеет решение, то, как правило, множество его решений оказывается бесконечным. Впрочем, дифференциальное уравнение может иметь только одно решение или вообще не иметь вещественных решений.

Чтобы выделить определенное решение уравнения (2.2), надо задать ***начальное условие***, которое заключается в том, что при некотором значении x_0 независимой переменной x заранее дано значение y_0 искомой функции $y(x)$:

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y\Big|_{x=x_0} = y_0 . \qquad (2.4)$$

Геометрически это означает, что задается точка $M_0(x_0; y_0)$, через которую должна проходить искомая интегральная кривая.

Задачу отыскания решения $y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющего начальному условию (2.4), называют ***задачей Коши*** (***начальной задачей***) для уравнения (2.2).

2.3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x; y)$

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение (2.2) имеет решение, дает теорема Коши, которая является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема 3.1 (**существования и единственности решения**). *Если функция* $f(x; y)$ *определена в некоторой области G плоскости Oxy,*

1. *непрерывна в точке $M_0(x_0; y_0)$ и в её окрестности Ω, то существует решение $y = y(x)$ уравнения (2.2), такое, что $y(x_0) = y_0$.*

2. *Если ограничена частная производная $\partial f/\partial y$ данной функции, то найдется интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ оси Ox, на котором это решение единственно.*

Теорема Коши дает возможность по виду дифференциального уравнения (2.2) решать вопрос о существовании и единственности его решения.

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку $M_0(x_0; y_0)$ проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, в области G уравнение (2.2) имеет бесконечное число различных решений.

Теорема 3.1 имеет ***локальный характер***: она гарантирует существование единственного решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.2) лишь в достаточно малой окрестности точки x_0.

Из теоремы 3.1 вытекает, что уравнение (2.2) имеет бесконечное множество различных решений (например, одно решение, график которого проходит через точку $(x_0; y_0)$; другое решение, когда график проходит через точку $(x_0; y_1)$ и т.д.).

Пример 3.1. В уравнении $y' = x + y$ функция $f(x; y) = x + y$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy и имеет всюду $\partial f/\partial y = 1$. В силу теоремы 3.1 через каждую точку $(x_0; y_0)$ плоскости Oxy проходит единственная интегральная кривая этого уравнения.

Теорема 3.1 дает ***достаточные*** условия существования единственного решения уравнения (2.2). Это означает, что может существовать единственное решение $y = y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условию (2.4), хотя в точке $(x_0; y_0)$ не выполняются условия 1) или 2) или оба вместе.

Пример 3.2. Для уравнения $y' = 1/y^2$ имеем $f(x; y) = 1/y^2$. В точках оси Ox функции f и $\partial f/\partial y$ разрывны, причем $\partial f/\partial y = -2/y^3 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} \infty$. Но через каждую точку оси Ox проходит единственная интегральная кривая $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$.

Замечание. Если отказаться от ограниченности $\partial f / \partial y$, то получается следующая теорема существования решения.

Теорема 3.2. *Если функция $f(x; y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$, то уравнение (2.2) имеет в этой окрестности, по крайней мере, одно решение $y = \varphi(x)$, принимающее при $x = x_0$ значение y_0.*

Общее и частное решения уравнения

Дадим два основных определения.

Определение. ***Общим решением*** дифференциального уравнения (2.2) в некоторой области Ω существования и единственности решения задачи Коши называется функция $y = \varphi(x; C)$, обладающая следующими свойствами:

1) при любых значениях произвольной постоянной C она обращает уравнение (2.2) в тождество,
2) значения постоянной величины C можно подобрать так, чтобы она удовлетворяла условиям (2.4).

Общее решение, полученное в неявном виде:

$$\Phi(x; y; C) = 0$$

называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Определение. ***Частным решением*** уравнения (2.2) называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, которая получается из ***общего решения*** $y = \varphi(x; C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

Таким образом, ***общее решение*** дифференциального уравнения (2.2) можно определить, как ***множество всех частных решений уравнения***.

Уравнение

$$\Phi(x; y; C_0) = 0,$$

где C_0 – некоторое конкретное значение постоянной C, называется ***частным интегралом***.

Геометрически ***общее решение*** $y=\varphi(x;C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от одной произвольной постоянной C.

Частное решение $y=\varphi(x;C_0)$ представляет одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку $(x_0;y_0)$.

Иногда начальные условия (2.4) называют ***условиями Коши***, а частным решение называют ***решение какой-нибудь задачи Коши***.

Определение. Решение $y=\psi(x)$ дифференциального уравнения (2.2) называется ***особым***, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т.е. если через каждую его точку $(x_0;y_0)$ кроме этого решения проходит и другое решение уравнения (2.2), не совпадающее с $y=\psi(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки $(x_0;y_0)$.

График особого решения называют ***особой интегральной кривой*** уравнения.

Геометрически это – *огибающая* семейства интегральных кривых дифференциального уравнения, определяемых его общим интегралом.

Огибающей семейства кривых $\Phi(x;y;C)=0$ называется такая кривая, которая в каждой соей точке касается некоторой кривой семейства и каждого отрезка которой касается бесконечное множество кривых из этого семейства.

Если для дифференциального уравнения (2.2) в некоторой области G на плоскости Oxy выполнены условия теоремы 3.1, то через каждую точку $(x_0;y_0)\in G$ проходит единственная интегральная кривая $y=\varphi(x)$ уравнения. Эта кривая входит в однопараметрическое семейство кривых $\Phi(x;y;C)=0$, образующих общий интеграл уравнения (2.2), и получается из этого семейства при конкретном значении параметра C, т.е. является частным интегралом уравнения (2.2). Никаких других решений, проходящих через точку $(x_0;y_0)$, здесь не может быть. Следовательно, для существования особого решения уравнения (2.2) необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы 3.1. В частности, если правая часть уравнения (2.2) непрерывна в рассматриваемой области *G*, то особые решения могут проходить только через те точки, где производная $\partial f / \partial y$ становится бесконечной.

Например, для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ функция $f = 3\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна всюду, но производная $\partial f / \partial y$ обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси *Ox* плоскости *Oxy*. Исходное уравнение имеет общее решение $y = (x + C)^3$ – семейство кубических парабол – и очевидное решение $y \equiv 0$, проходящее через те точки, где производная $\partial f / \partial y$ не ограничена. Решение $y \equiv 0$ ***особое***, так как через каждую его точку проходит и кубическая парабола, и сама прямая $y = 0$. Таким образом, в каждой точке решения $y \equiv 0$ нарушается свойство единственности.

Особое решение $y \equiv 0$ не получается из решения $y = (x + C)^3$ ни при каком числовом значении параметра *C* (включая $\pm\infty$).

Из теоремы 3.1 можно вывести только необходимые условия для особого решения. Множество тех точек, где производная не ограничена, если оно является кривой, может и не быть особым решением уже потому, что эта кривая, вообще говоря, не является интегральной кривой уравнения (2.2).

Итак, чтобы найти *особые решения* уравнения (2.2), надо

1) найти множество точек, где производная $\partial f / \partial y$ обращается в бесконечность;
2) если это множество точек образует одну или несколько кривых, проверить, являются ли они интегральными кривыми уравнения (2.2);
3) если это интегральные кривые, проверить, нарушается ли в каждой их точке свойство единственности.

При выполнении всех этих условий найденная кривая представляет собой особое решение уравнения (2.2).

Геометрический смысл уравнения

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения (2.2) состоит в том, что оно в каждой точке $M(x;\, y)$, принадлежащей области *G*, в которой выполняются все условия теоремы Коши 2.1, задает направление $y' = \operatorname{tg}\alpha = k$ касательной к единственной линии уравнения (2.2), проходящей через точку $M(x;\, y)$, т.е. ***поле направлений*** в области *G*.

В области *G* для уравнения (2.2) можно выделить однопараметрическое семейство линий $f(x;\, y) = k = \text{const}$, каждая из которых называется

изоклиной. Как следует из определения, вдоль каждой изоклины поле направлений постоянно, т.е.

$$y' = k = const\,.$$

Нахождение изоклин и направлений вдоль них позволяет упорядочить поле направлений и приближенно построить интегральные линии данного дифференциального уравнения, т.е. графически проинтегрировать это уравнение.

2.4. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим методы нахождения решений дифференциальных уравнений 1-го порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решения.

Уравнение вида

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y), \tag{4.1}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные функции, называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Для отыскания решения уравнения (2.5) нужно, как говорят, разделить в нем переменные. Для этого

- заменим в (2.5) y' на $\dfrac{dy}{dx}$,
- умножим на дифференциал dx,
- разделим обе части уравнения на $f_2(y)$ $\left(f_2(y) \neq 0\right)$.

Тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx\,. \tag{4.2}$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть уравнения, а переменная y − только в левую часть. Следовательно, ***переменные разделены***.

Покажем, как найти решение этого уравнения. Пусть $F_1(x)$ и $F_1(y)$ − первообразные функции $f_1(x)$ и $\dfrac{1}{f_2(y)}$ соответственно.

Равенство (4.2) равносильно тому, что дифференциалы этих функций должны совпадать $dF_2(y) = dF_1(x)$.

Отсюда следует, что $F_2(y) = F_1(x) + C$, где C − произвольная постоянная величина.

Разрешая последнее уравнение относительно y, получим функцию (может быть, и не одну) $y = \varphi(x)$, которая обращает уравнение (4.2) в тождество и значит, является его решением.

Пример 4.1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+e^{2x})y^2 y' = e^x.$$

▲ Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, умножим уравнение на dx и разделим переменные

$$(1+e^{2x})y^2\frac{dy}{dx} = e^x \Big| \cdot dx,$$

$$\underline{(1+e^{2x})}y^2dy = e^x dx \Big| : (1+e^{2x}), \quad y^2dy = \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

Проинтегрируем последнее уравнение с разделенными переменными:

$$\int y^2dy = \int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, \quad \frac{y^3}{3} = \int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2},$$

$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + \frac{C}{3}, \quad y = \sqrt[3]{C + 3\operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения. ▼

Пример 4.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

▲ Полагая $y \neq 0$, разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}\Big| \cdot dx, \quad dy = 3\underline{y^{\frac{2}{3}}}dx \Big| : y^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3dx, \quad \int y^{-\frac{2}{3}}dy = \int 3dx, \quad y^{\frac{1}{3}} = x + C, \; y = (x+C)^3.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Подставляя начальные данные $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ в формулу для общего решения $y = (x + C)^3$, находим значение C:

$$1 = (1 + C)^3,\ C = 0.$$

$y = x^3$ − искомое частное решение.

Очевидно, $y = 0$ − также решение уравнения, это решение является ***особым***: в каждой точке оси Ox нарушаются условия теоремы 2.1 (производная функции $f(x;\, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ по y обращается в бесконечность). Через каждую точку $M_0(x_0;\, 0)$ оси Ox проходят два решения $y = (x - x_0)^3$ и $y = 0$; последнее решение нельзя получить из общего решения $y = (x + C)^3$, ни при каком численном значении C, включая $C = \pm\infty$ (а только при $C = C(x) = -x$). ▼

Пусть дифференциальное уравнение задано в дифференциальной форме (2.3). Рассмотрим частный случай, а именно, когда функции $P(x;\, y)$ и $Q(x;\, y)$ представляют собой произведения функции только от x на функции только от y, т.е.

$$P(x;\, y) = p_1(x) \cdot p_2(y),\ Q(x;\, y) = q_1(x) \cdot q_2(y).$$

В этом случае уравнение (2.3) принимает вид

$$p_1(x) \cdot \underline{p_2(y)}dx + \underline{q_1(x)} \cdot q_2(y)dy = 0.$$

Разделив почленно это уравнение на $q_1(x)p_2(y)$, полагая что $q_1(x)p_2(y) \neq 0$, получим уравнение

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy = 0.$$

Это уравнение называется уравнением ***с разделенными переменными***: при dx находится функция, зависящая только от x, при dy только от y.

Взяв неопределенный интеграл от обеих частей уравнения, получим

$$\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx + \int \frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy = C.$$

Это равенство выражает общий интеграл уравнения (2.3). В этом случае говорят, что решение найдено «***в квадратурах***».

Заметим, что деление на $q_1(x)p_2(y)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $q_1(x)p_2(y)$.

Пример 4.3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy+y)dx+(xy+x)dy=0.$$

▲ Раскладывая функции при dx и dy на множители, полагая, что $x\neq 0,\ y\neq 0$ и разделив обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\underline{y}(x+1)dx+\underline{x}(y+1)dy=0\Big|:xy,\ \frac{x+1}{x}dx+\frac{y+1}{y}dy=0.$$

Интегрируя его, последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln|C|$):

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=0,\quad x+\ln|x|+y+\ln|y|=\ln|C|,$$

$$\ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln|C|,\quad xye^{x+y}=C.$$

Последнее равенство является общим интегралом данного уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x\neq 0,\ y\neq 0$. Однако функции $x=0$ и $y=0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется; с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C=0$.

Следовательно, $x=0,\ y=0$ − частные решения данного уравнения. ▼

2.5. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение. Функция $F(x;y)$ называется ***однородной функцией измерения*** k относительно аргументов x и y, если равенство

$$F(\lambda x;\lambda y)=\lambda^k F(x;y) \tag{5.1}$$

справедливо для любого $\lambda\in\mathrm{R}$, при котором функция $F(\lambda x;\lambda y)$ определена, $k=const$.

Например, функция $F_1(x;y)=x+2y$ является однородной первого измерения, так как

$$F_1(\lambda x;\lambda y)=\lambda x+2\lambda y=\lambda(x+2y)=\lambda^1F_1(x;y).$$

Функция $F_2(x;\, y) = x^2 \sin\dfrac{x}{y}$ является однородной второго измерения $(k = 2)$, поскольку

$$F_2(\lambda x;\, \lambda y) = (\lambda x)^2 \sin\frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda^2 x^2 \sin\frac{x}{y} = \lambda^2 F_2(x;\, y).$$

Функция $F_3(x;\, y) = \dfrac{x+y}{x}$ является однородной нулевого измерения $(k = 0)$, поскольку

$$F_3(\lambda x;\, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda(x+y)}{\lambda x} = \frac{x+y}{x} = \lambda^0 F_3(x;\, y).$$

Функция $F_4(x;\, y) = 3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого измерения $(k = 4)$, так как

$$F_4(\lambda x;\, \lambda y) = 3\cdot(\lambda x)^4 - (\lambda x)^2(\lambda y)^2 + 5\cdot(\lambda y)^4 =$$
$$= \lambda^4(3x^4 - x^2y^2 + 5y^4) = \lambda^4 F_4(x;\, y).$$

Функция $F_5(x;\, y) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}$ является однородной измерения $k = 2/3$, поскольку

$$F_5(\lambda x;\, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^2} - 2\sqrt[3]{(\lambda x)(\lambda y)} + 4\sqrt[3]{(\lambda y)^2} =$$
$$= \sqrt[3]{\lambda^2}\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt[3]{y^2}\right) = \lambda^{\frac{2}{3}} F_5(x;\, y).$$

Определение. Дифференциальное уравнение в нормальной форме (2.2) называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если $f(x;\, y)-$ однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

$$f(\lambda x;\, \lambda y) = \lambda^0 f(x;\, y) = f(x;\, y) \qquad (5.2)$$

Так как однородное дифференциальное уравнение в нормальной форме (2.2) всегда можно записать в виде

$$y' = f(x;\, y) = f(\lambda x;\, \lambda y),$$

то, положив $\lambda = \dfrac{1}{x}$, получим $y' = f\left(1;\, \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Следовательно, уравнение (2.2) с помощью замены

$$y = tx\ \left(t = \frac{y}{x}\right),\ y' = t'x + t$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $t(x)$:

$$t'x + t = f(1;t),\quad x\frac{dt}{dx} = f(1;t) - t\Big| \cdot dx,$$

$$\underline{x}dt = \underline{\left(f(1;t) - t\right)}dx\Big| : x\left(f(1;t) - t\right),\quad \frac{dt}{\left(f(1;t) - t\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме (2.3) будет однородным в том и только в том случае, когда $P(x;y)$, $Q(x;y)$ – однородные функции одного и того же измерения k, т.е.

$$P(\lambda x;\lambda y) = \lambda^k P(x;y),\ Q(\lambda x;\lambda y) = \lambda^k Q(x;y).$$

Действительно, переписав его в нормальной форме:

$$y' = -\frac{P(x;y)}{Q(x;y)} \equiv f(x;y),$$

легко заключаем, что $f(x;y)$ – однородная функция нулевого измерения, поскольку

$$f(\lambda x;\lambda y) = -\frac{P(\lambda x;\lambda y)}{Q(\lambda x;\lambda y)} = -\frac{\lambda^k P(x;y)}{\lambda^k Q(x;y)} = f(x;y).$$

Пример 5.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2 y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

▲ Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ – однородные второго измерения, то данное уравнение – однородное.

Сделаем замену $y = tx,\ y' = t'x + t$. Тогда

$$2x^2(t'x + t) = x^2 + (tx)^2,\ 2x^2(t'x + t) = x^2(1 + t^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем

$$2x\frac{dt}{dx}+2t=1+t^2\,\Big|\cdot dx,\; 2\underline{x}dt=\underline{(1+t^2-2t)}dx\,\Big|:2x(1-2t+t^2)\,.$$

Разделив переменные, последовательно находим:

$$\frac{dt}{(t-1)^2}=\frac{dx}{2x},\quad \int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{t-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|C|,\quad 1=(1-t)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

В последнее равенство вместо t подставим значение $\frac{y}{x}$. Получим общий интеграл

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right),\; x=(x-y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения $y=x-\dfrac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}$.

Используя начальное условие $y(1)=0$, определим значение C:

$$0=1-\frac{1}{\ln C},\ \ln C=1,\ C=e\,.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}\,.$$ ▼

2.6. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка Уравнения Бернулли[2]

Определение. ***Линейным*** дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)\,, \tag{6.1}$$

[2] **Иоганн Бернулли** − швейцарский математик, самый знаменитый представитель семейства Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила Бернулли. Один из первых разработчиков математического анализа, после смерти Ньютона — лидер европейских математиков.

где $y = y(x) -$ искомая функция; $a(x)$, $b(x)$, $c(x) -$ заданные функции. Будем считать, что они непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $a(x) \neq 0$.

Поскольку $a(x) \neq 0 \; \forall x \in [\alpha; \beta]$, то данное уравнение можно переписать так:

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{6.2}$$

где $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$, $f(x) = \dfrac{c(x)}{a(x)}$.

Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция y, а также её производная y' входят в уравнение линейно, т.е. в первой степени.

Если $f(x) \equiv 0$ на $(\alpha; \beta)$, то уравнение (6.2) называется ***однородным линейным*** уравнением. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (6.2) называется ***неоднородным линейным*** уравнением.

Функции $p(x) \neq 0$ и $f(x) \neq 0$ должны быть непрерывными в некоторой области, например, на отрезке $[\alpha; \beta]$, для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши (3.1) существования и единственности решения.

Теорема 6.1. *Если функции* $p(x)$ и $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a; b] \subset (\alpha; \beta)$, *то уравнение* (6.2) *всегда имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$, *где точка* $(x_0; y_0)$ *принадлежит полосе* $a < x > b$, $-\infty < y < \infty$.

▲ Разрешая уравнение (6.2) относительно y' приведем его к виду $y' = -p(x)y + f(x)$, где правая часть $f_1(x; y) \equiv -p(x)y + f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.1: она непрерывна по совокупности переменных x и y и имеет ограниченную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ в указанной полосе. Отсюда следует справедливость утверждения. ▼

Решение будем искать в виде произведения двух функций $u = u(x)$, $v = v(x)$

$$y = uv. \tag{6.3}$$

Так как $y' = u'v + uv'$, то подстановка выражений для y и y' в уравнение (6.2) приводит его к виду

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x),$$

или

$$u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = f(x). \qquad (6.4)$$

В качестве v выберем одну из функций, обращающих в нуль сумму в скобках, т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$v' + p(x)v = 0. \qquad (6.5)$$

С учетом (6.5) уравнение (6.4) принимает вид

$$u'v = f(x). \qquad (6.6)$$

Уравнение (6.5) является уравнением с разделяющимися переменными x и v, из него определяется функция $v = v(x)$.

Функцию $u = u(x)$ находят из уравнения (6.6), которое при $v = v(x)$ также является уравнением с разделяющимися переменными.

Определив $u = u(x)$ и $v = v(x)$, по формуле (6.3) найдем y.

Действительно, из уравнения (6.5) получаем

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Big| \cdot dx, \quad dv + p(x)\underline{v}dx = 0 \Big| : v,$$

$$\frac{dv}{v} + p(x)dx = 0, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx.$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|,$$

$$v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \qquad (6.7)$$

а из уравнения (6.6) –

$$\frac{du}{dx} C_1 e^{-\int p(x)dx} = f(x) \Big| \cdot dx,$$

$$\underline{C_1 e^{-\int p(x)dx}} du = f(x)dx \Big| : C_1 e^{-\int p(x)dx}, \quad du = \frac{1}{C_1} f(x) e^{\int p(x)dx}.$$

$$u(x) = \frac{1}{C_1} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_2. \qquad (6.8)$$

По формуле (6.3) находим общее решение линейного уравнения (6.2):

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right) \quad (C = C_1C_2). \qquad (6.9)$$

Пример 6.1. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 - x)y' + y = x^2(2x-1).$$

Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2) = 2$.

▲ Это уравнение является линейным (содержит только первые степени y и y', не содержит их произведения).

Приведем данное уравнение к виду (4.2), разделив обе его части на $x^2 - x \neq 0$. Получим

$$y' + \frac{1}{x^2 - x}y = \frac{x^2(2x-1)}{x^2 - x}.$$

Здесь

$$p(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}, \quad f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$, уравнение примет вид

$$u'v + uv' + \frac{1}{x(x-1)}uv = \frac{x(2x-1)}{x-1},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x(x-1)}v\right) = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

В качестве v выберем одну из функций, удовлетворяющих уравнению (функция v выбирается произвольно, поскольку только произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению)

$$v' + \frac{1}{x(x-1)}v = 0, \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x(x-1)}v = 0 \Big| \cdot dx,$$

$$dv + \underline{v}\frac{dx}{x(x-1)} = 0, \Big| : v$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{dx}{x(x-1)} = 0, \ \int\frac{dv}{v} + \int\frac{dx}{x(x-1)} = 0.$$

Найдем входящий в это решение интеграл. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \left\{ \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1},\ 1 = A(x-1) + Bx,\ A = -1,\ B = 1 \right\} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

Очевидно, в качестве такой функции можно взять

$$\ln|v| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0,\ v = \frac{x}{x-1}.$$

Подставив эту функцию в уравнение $u'v = \frac{x(2x-1}{x-1}$, получим

$$\frac{du}{dx}\frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1} \Big| \cdot dx, \quad du = (2x-1)dx,$$

$$\int du = \int (2x-1)dx, \quad u = x^2 - x + C.$$

Следовательно, общим решением данного дифференциального уравнения является функция

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1}, \text{или } y = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

Из него выделяем частное решение, соответствующее начальному условию $y(-2) = 2$:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1},\ C = -3,\ y = x^2 - \frac{3x}{x-1}. ▼$$

Пример 6.2. Найти общий интеграл уравнения $(2x - y^2)y' = 2y$.

▲ Данное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$.

Действительно,

$$(2x - y^2)\frac{dy}{dx} = 2y, \quad 2x - y^2 = 2y\frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}, \quad p(y) = -\frac{1}{y}, \quad f(y) = -\frac{y}{2}.$$

т.е. получили уравнение вида (4.2).