

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при выполнении расчётно-графических работ по сопротивлению материалов, основам строительной механики (для специальностей ВиВ, ТГВ и СТ) и теории упругости и пластичности.

Пособие состоит из 3-х частей и 14 глав по темам расчётно-графических работ. Каждая глава содержит краткое изложение теории, где приведены основные формулы и уравнения, и примеры решения задач, аналогичных задачам в расчётно-графических работах.

В конце каждой части пособия приведен сортамент стальных прокатных стержней – уголков, двутавров и швеллеров.

В третьей части пособия приведены главы, соответствующие учебному материалу 3-го семестра изучения сопротивления материалов – напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела, плоская задача теории упругости, изгиб прямоугольных и кольцевых пластин, решение задач по теории упругости, термоупругости и изгибу пластин.

Пособие написано профессорами кафедры сопротивления материалов МГСУ.

В пособии использована система единиц СИ, а также традиционные для курса сопротивления материалов обозначения: сила – P , площадь поперечного сечения стержня – F . Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице:

| Наименование величины | Е д и н и ц а | | Соотношение единиц |
|------------------------------|----------------|-------------|--|
| | Наименование | Обозначение | |
| Сила, нагрузка, вес | Ньютон | Н | $1\text{Н} \approx 0,1\text{ кгс}$ $1\text{кН} \approx 0,1\text{ тс}$ |
| Линейная нагрузка | Ньютон на метр | Н/м | $1\text{Н/м} \approx 0,1\text{ кгс/м}$ $1\text{кН/м} \approx 0,1\text{ тс/м}$ |
| Момент силы, момент пары сил | Ньютон-метр | Нм | $1\text{Нм} \approx 0,1\text{ кгс}\cdot\text{м}$ $1\text{кНм} \approx 0,1\text{ тс}\cdot\text{м}$ |
| Напряжение, давление | Паскаль | Па | $1\text{Па} \approx 0,1\text{ кгс/м}^2$ $1\text{МПа} \approx 10\text{ кгс/см}^2$ |

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения используется также кН/см^2 ($1\text{ кН/см}^2 = 10\text{ МПа}$).

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА

11.1. Основные понятия и формулы

Под действием нагрузок, приложенных к телу, в нем возникают внутренние силы, которые определяются величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке тела. Совокупность напряжений, действующих на различных площадках, проведенных через точку тела, характеризует напряженное состояние в окрестности данной точки.

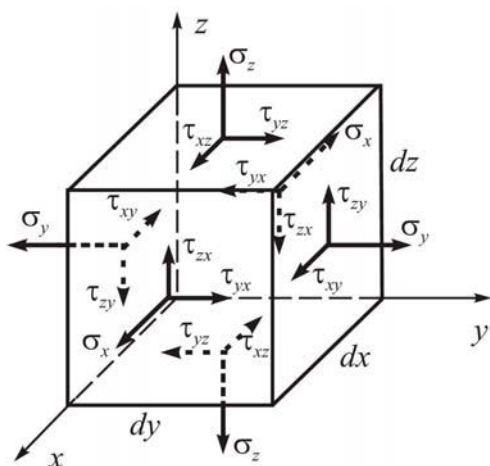


Рис.11.1

На рис.11.1 показаны нормальные $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ напряжения, действующие на гранях бесконечно малого (элементарного) параллелепипеда, выделенного в окрестности произвольной точки тела.

Совокупность этих величин представляет собой тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

В силу закона парности касательных напряжений ($\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$) имеем шесть различных компонент тензора, которые полностью определяют напряженное состояние в окрестности точки тела. Это означает, что, зная эти шесть величин, можно определить напряжения на любой наклонной по отношению к осям Ox, Oy, Oz площадке, проходящей через данную точку.

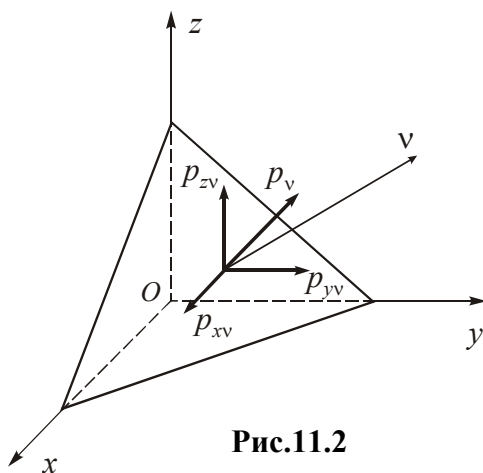


Рис.11.2

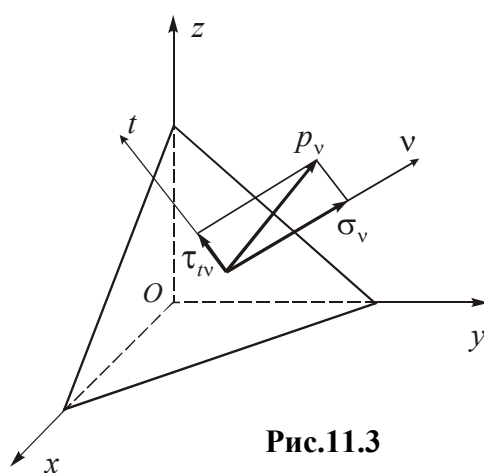


Рис.11.3

Полное напряжение p_v , действующее на наклонной площадке с нормалью v , положение которой определяется направляющими косинусами $l = \cos(x,v), m = \cos(y,v), n = \cos(z,v)$, можно разложить по осям координат (рис.11.2). Эти составляющие можно выразить через компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

где $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Если точка, в окрестности которой рассматривается напряженное состояние, находится на поверхности тела, то величины p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} представляют собой компоненты распределенной поверхностной нагрузки. В этом случае формулы (11.2) можно использовать в качестве статических граничных условий.

Нормальное напряжение на наклонной площадке σ_v и касательное напряжение τ_{tv} , действующее в плоскости площадки по направлению t с направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 (рис.11.3), определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl; \\ \tau_{tv} &= \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m_1 n) + \tau_{zx}(nl_1 + n_1 l). \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Напряжения p_v, σ_v и τ_{tv} действуют в одной плоскости. Величина τ_{tv} является полным касательным напряжением в плоскости наклонной площадки, и она может быть определена по формуле

$$\tau_{tv} = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2 - \sigma_v^2}. \quad (11.4)$$

При изменении положения наклонной площадки, то есть при изменении углов между нормалью v и осями координат, напряжения σ_v и τ_{tv} также изменяются. В любой точке нагруженного тела всегда существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Такие площадки называются главными площадками, а действующие на них нормальные напряжения – главными напряжениями. Они обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом принимается, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Главные напряжения являются экстремальными величинами по отношению к углам наклона площадок.

На рис.11.4,*a* показан элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками, а нормали к ним – главными осями напряженного состояния 1, 2, 3.

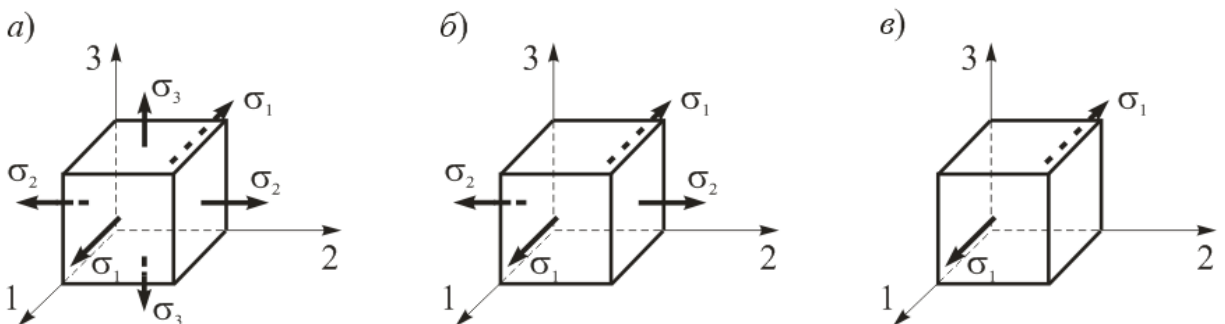


Рис.11.4

Существуют три основных вида напряженного состояния: трехосное, при котором все три главных напряжения отличны от нуля (рис.11.4,*а*), двухосное, при котором одно из главных напряжений равно нулю (рис.11.4,*б*), и одноосное, при котором только одно из главных напряжений отлично от нуля (рис.11.4,*в*).

Величины главных напряжений определяются из кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (11.5)$$

Коэффициенты этого уравнения называются инвариантами тензора напряжений и выражаются через компоненты последнего по формулам

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

Эти величины являются постоянными для данной точки и не зависят от углов наклона площадок. В силу этого инварианты тензора напряжений можно выразить через главные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

После определения из уравнения (11.5) главных напряжений σ_i ($i=1,2,3$) можно найти положение каждой из трех главных площадок, т. е. определить направляющие косинусы l_i, m_i, n_i нормалей к главным площадкам по формулам

$$l_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_i}, \quad m_i = \frac{\Delta_{2i}}{D_i}, \quad n_i = \frac{\Delta_i}{D_i}, \quad (11.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1i} &= -(\sigma_y - \sigma_i)\tau_{zx} + \tau_{xy}\tau_{yz}; \\ \Delta_{2i} &= -(\sigma_x - \sigma_i)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{zx}; \\ \Delta_i &= (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2; \\ D_i &= \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

Наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение действует на площадках, наклоненных под углами 45° к главным осям 1 и 3 и равно

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (11.10)$$

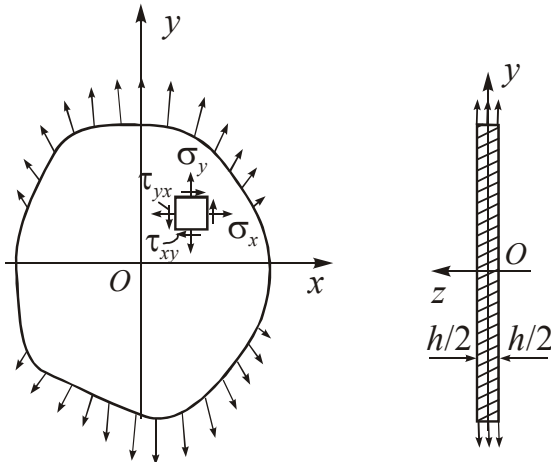


Рис.11.5

Рассмотрим двухосное или плоское напряженное состояние, которое возникает, например, в тонкой пластине, нагруженной по внешнему контуру силами, параллельными плоскости Oxy и равномерно распределенными по толщине h (рис.11.5). На внешних ненагруженных плоскостях пластины при $z = \pm h/2$ нормальные и касательные напряжения равны нулю ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$). Так как

толщина пластины мала, можно считать, что и во внутренних точках пластины на площадках, параллельных плоскости Oxy , эти напряжения отсутствуют, и указанные площадки являются главными.

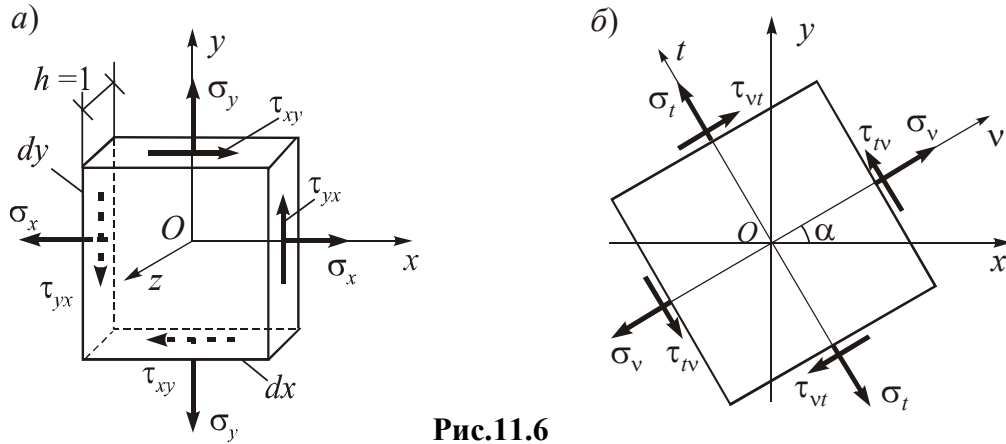


Рис.11.6

На рис.11.6,*а* показаны нормальные и касательные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, действующие на гранях элементарного параллелепипеда со сторонами dx, dy и толщиной, равной единице, выделенного в окрестности произвольной точки пластины. На рис.11.6,*б* показаны напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных наклонных площадках, выделенных в окрестности той же точки. Эти напряжения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{tv} &= \tau_{vt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Величины главных напряжений при двухосном напряженном состоянии в плоскости Oxy определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (11.12)$$

а углы наклона нормалей 1 и 2 к главным площадкам (рис.11.7) – по формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}. \quad (11.13)$$

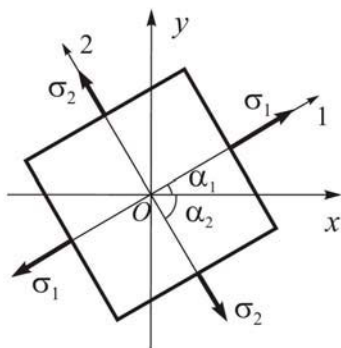


Рис.11.7

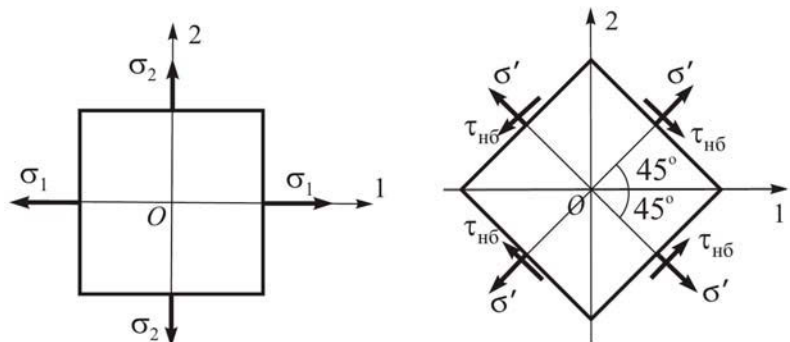


Рис.11.8

Третье главное напряжение равно нулю: $\sigma_3 = \sigma_z = 0$.

Наибольшие касательные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам (рис.11.8). При этом величина наибольшего касательного напряжения в плоскости Oxy равна

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (11.14)$$

Нормальные напряжения на этих площадках равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (11.15)$$

Под действием внешних сил происходит деформирование тела и перемещение его точек в пространстве. При этом рассматриваются только те перемещения, которые связаны с деформированием тела. В большинстве задач перемещения точек тела считаются малыми величинами по сравнению с его размерами.

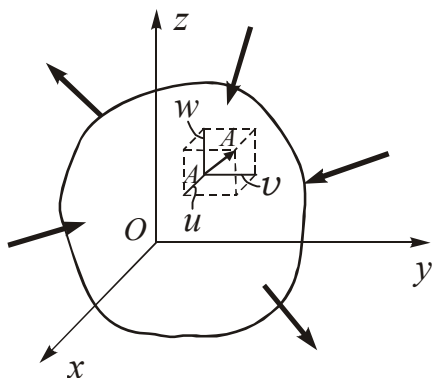


Рис.11.9

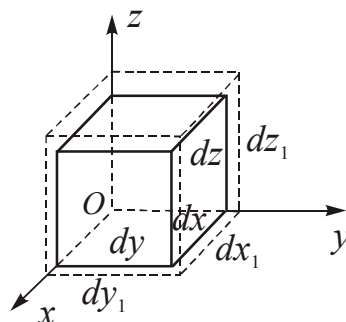


Рис.11.10

Обозначим составляющие вектора полного перемещения AA' произвольной точки A (рис.11.9) по осям Ox , Oy , Oz соответственно через u , v , w . В соответствии с положением о сплошности тела перемещения его точек являются непрерывными функциями координат x , y , z .

Для исследования деформаций в окрестности точки тела рассматривается элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy , dz (рис.11.10). В результате различия перемещений точек параллелепипеда его ребра удлиняются или укорачиваются, а первоначально прямые углы между ребрами искажаются. В соответствии с этим различают два основных вида деформаций – линейные и угловые.

Линейные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z представляют собой относительные удлинения или укорочения ребер элементарного параллелепипеда (рис.11.10).

$$\epsilon_x = \frac{dx_1 - dx}{dx}, \quad \epsilon_y = \frac{dy_1 - dy}{dy}, \quad \epsilon_z = \frac{dz_1 - dz}{dz}. \quad (11.16)$$

Деформации удлинения считаются положительными, а укорочения – отрицательными.

Угловые деформации или деформации сдвига γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} характеризуют искажения прямых углов между ребрами элементарного параллелепипеда

(рис.11.11). При этом индексы показывают, в какой плоскости происходит угловая деформация.

Совокупность линейных и угловых деформаций в окрестности точки тела называется тензором деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

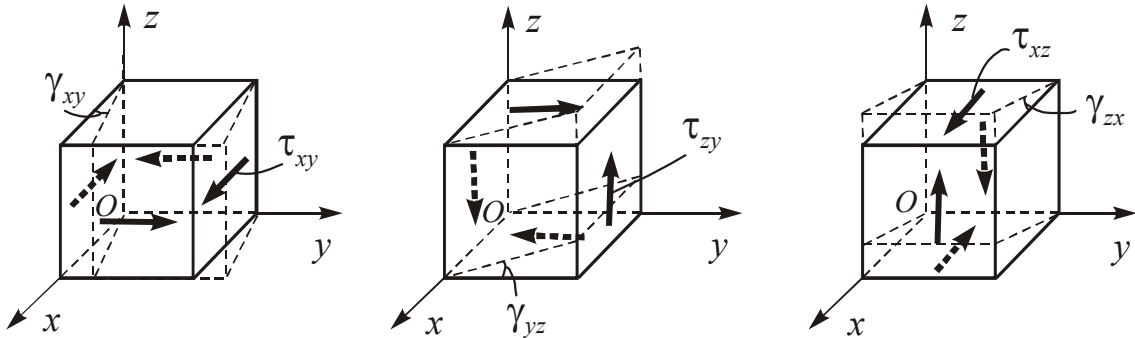


Рис.11.11

Деформации сдвига, так же как и касательные напряжения, обладают свойством взаимности $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Вследствие этого имеем шесть деформаций, которые полностью определяют деформированное состояние в окрестности рассматриваемой точки тела. Зная эти шесть величин, можно определить линейную деформацию ε_v в произвольном направлении v и угловую деформацию γ_{tv} , определяющую изменение прямого угла между направлениями v и t , по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl; \\ \gamma_{tv} &= 2(\varepsilon_x ll_1 + \varepsilon_y mm_1 + \varepsilon_z nn_1) + \gamma_{xy}(lm_1 + l_1m) + \\ &\quad + \gamma_{yz}(mn_1 + m_1n) + \gamma_{zx}(nl_1 + n_1l). \end{aligned} \right\} \quad (11.18)$$

Тензоры напряжений и деформаций и выражения (11.3) и (11.18) имеют аналогичную структуру и могут быть получены одни из других с помощью следующих формальных замен:

$$\sigma_i \leftrightarrow \varepsilon_i, \quad \tau_{ij} \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{ij} \quad (i, j = x, y, z, t, v). \quad (11.19)$$

Среди множества осей, проведенных через точку тела, существуют три взаимно перпендикулярные оси, в системе которых отсутствуют угловые деформации. Эти оси называются главными осями деформированного состояния, а соответствующие им линейные деформации – главными деформациями. Главные деформации обозначаются через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, при этом принимается, что $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

В изотропном теле главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают.

Относительная объемная деформация в окрестности точки (относительное изменение объема элементарного параллелепипеда) с точностью до величин второго и третьего порядков малости равна сумме трех линейных деформаций

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (11.20)$$

Для линейно упругих и изотропных тел связь между напряжениями и деформациями в окрестности точки тела называется обобщенным законом Гука. Обобщенный закон Гука может быть записан в прямой форме

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

и в обратной форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + \lambda e, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + \lambda e, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + \lambda e, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

Последние три формулы в (11.21) и (11.22) выражают закон Гука при сдвиге, а величины μ и λ называются постоянными Ляме. Они связаны с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν формулами

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (11.23)$$

где G – модуль сдвига.

В случае двухосного напряженного состояния в формулах (11.21) и (11.22) необходимо положить $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. В результате прямые и обратные формулы закона Гука преобразуются соответственно к виду

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (11.24)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \quad (11.25)$$

При деформировании тела в нем происходит накопление потенциальной энергии деформации. Энергия, накапливаемая в единице объема тела, называется удельной энергией.

Удельную потенциальную энергию можно выразить через напряжения по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1+\nu}{E}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (11.26)$$

Полную энергию U_0 можно представить в виде суммы двух слагаемых: энергии изменения объема $U_0^{об}$ и энергии изменения формы U_0^Φ :

$$U_0 = U_0^{об} + U_0^\Phi.$$

Такое разделение энергии необходимо, поскольку прочность материала определяется в основном энергией формоизменения. Энергия изменения объема на прочность существенно не влияет.

Составляющие полной энергии выражаются через напряжения по формулам

$$U_0^{об} = 3 \cdot \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_0^2; \quad (11.27)$$

$$U_0^\Phi = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (11.28)$$

где величины

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{e}{3} \quad (11.29)$$

представляют собой среднее напряжение и среднюю деформацию в окрестности точки тела.

Выражения (11.26) и (11.28) более просто записываются через главные напряжения

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]; \quad (11.30)$$

$$U_0^\Phi = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (11.31)$$

Для двухосного напряженного состояния формулы (11.26) и (11.28) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2]; \\ U_0^\Phi &= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Расчет на прочность элементов конструкций, испытывающих трехосное и двухосное напряженные состояния, производится с использованием той или иной теории прочности в зависимости от свойств материала. Для элементов конструкций из пластичного материала чаще всего применяются две теории прочности: теория наибольших касательных напряжений и энергетическая теория удельной потенциальной энергии формоизменения.

По теории наибольших касательных напряжений условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \gamma_c R, \quad (11.33)$$

где σ_1 и σ_3 – наибольшее и наименьшее главные напряжения.

По энергетической теории

$$\sigma_i = \sigma_{эКВ}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq \gamma_c R,$$

или через главные напряжения

$$\sigma_i = \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.34)$$

Для двухосного напряженного состояния $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, и условие прочности (11.34) принимает вид

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \gamma_c R. \quad (11.35)$$

11.2. Примеры решения задач

Задача 11.1.

В окрестности точки тела известны компоненты тензора напряжений $\sigma_x = -30$ МПа, $\sigma_y = -50$ МПа, $\sigma_z = 20$ МПа, $\tau_{xy} = 40$ МПа, $\tau_{yz} = -20$ МПа, $\tau_{zx} = -20$ МПа (рис.11.12). Материал – сталь. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, (модуль сдвига $G \approx 0,8 \cdot 10^5$ МПа), расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

Исследуем напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела.

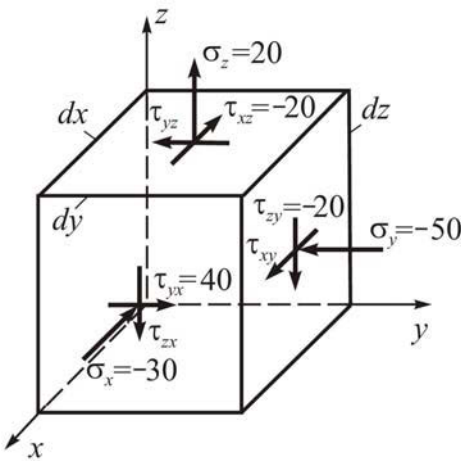


Рис.11.12

По формулам (11.6) определим инварианты тензора напряжений.

$$I_1 = -30 - 50 + 20 = -60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = 30 \cdot 50 - 50 \cdot 20 - 20 \cdot 30 - 40^2 - 20^2 - 20^2 = -2500 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = 30 \cdot 50 \cdot 20 + 30 \cdot 20^2 + 50 \cdot 20^2 - 20 \cdot 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 20 = 62000 \text{ (МПа)}^3.$$

Величины главных напряжений определяются из кубического уравнения (11.5)

$$\sigma^3 + 60\sigma^2 - 2500\sigma - 62000 = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$\sigma' = -18,92, \quad \sigma'' = 40,28, \quad \sigma''' = -81,36.$$

Учитывая, что в соответствии с обозначениями главных напряжений принимается $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получим

$$\sigma_1 = 40,28 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -18,92 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = -81,36 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности вычислений определим значения инвариантов тензора напряжений по формулам (11.7)

$$I_1 = 40,28 - 18,92 - 81,36 = -60 \text{ МПа};$$

$$I_2 = -40,28 \cdot 18,92 + 18,92 \cdot 81,36 - 81,36 \cdot 40,28 = -2500 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = 40,28 \cdot 18,92 \cdot 81,36 = 62004 \text{ (МПа)}^3.$$

Эти величины практически совпадают с полученными значениями по формулам (11.6).

Определим направляющие косинусы l_i, m_i, n_i ($i = 1,2,3$) нормалей к главным площадкам с помощью формул (11.8) и (11.9). Для первой главной площадки ($i = 1$) получим

$$\Delta_{11} = -(\sigma_y - \sigma_1)\tau_{zx} + \tau_{xy}\tau_{yz} = -(-50 - 40,28)(-20) + 40(-20) = -2605,6 \text{ (МПа)}^2;$$

$$\Delta_{21} = -(\sigma_x - \sigma_1)\tau_{yz} + \tau_{xy}\tau_{zx} = -(-30 - 40,28)(-20) + 40(-20) = -2205,6 \text{ (МПа)}^2;$$

$$\Delta_1 = (\sigma_x - \sigma_1)(\sigma_y - \sigma_1) - \tau_{xy}^2 = (-30 - 40,28)(-50 - 40,28) - 40^2 = 4744,9 \text{ (МПа)}^2;$$

$$D_1 = \sqrt{\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_1^2} = \sqrt{(-2605,6)^2 + (-2205,6)^2 + 4722,9^2} = 5845,3 \text{ (МПа)}^2;$$

$$l_1 = \frac{\Delta_{11}}{D_1} = \frac{-2605,6}{5845,3} = -0,446;$$

$$m_1 = \frac{\Delta_{21}}{D_1} = \frac{-2205,6}{5845,3} = -0,377;$$

$$n_1 = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{4744,9}{5845,3} = 0,812.$$

Аналогично для второй ($i = 2$) и третьей ($i = 3$) главных площадок получим

$$l_2 = 0,660, \quad m_2 = 0,474, \quad n_2 = 0,583,$$

$$l_3 = -0,605, \quad m_3 = 0,795, \quad n_3 = 0,038.$$

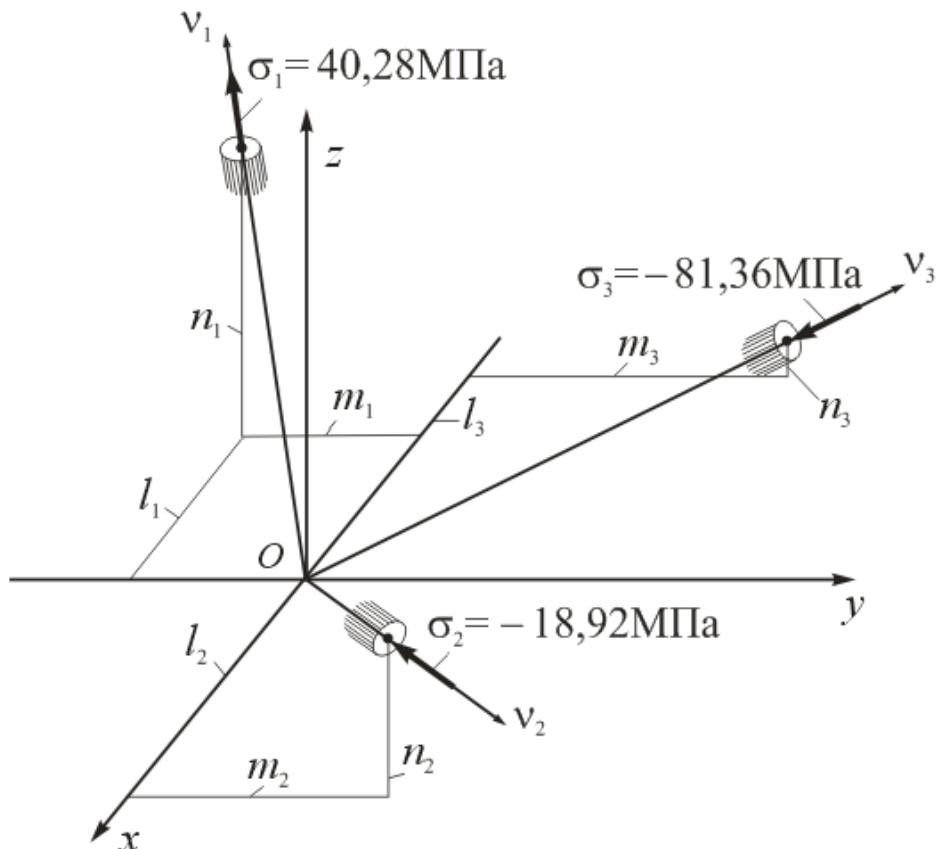


Рис.11.13

Вычисленные значения направляющих косинусов должны удовлетворять условиям ортогональности главных площадок

$$l_i l_k + m_i m_k + n_i n_k = 0, \quad (i \neq k), \quad (11.36)$$

$$-0,446 \cdot 0,660 - 0,376 \cdot 0,474 + 0,812 \cdot 0,583 = 8,12 \cdot 10^{-4};$$

$$-0,660 \cdot 0,605 + 0,474 \cdot 0,795 + 0,583 \cdot 0,038 = -5,49 \cdot 10^{-4};$$

$$0,605 \cdot 0,446 - 0,795 \cdot 0,377 + 0,038 \cdot 0,812 = 6,46 \cdot 10^{-4}.$$

Условия ортогональности главных площадок выполняются с малой погрешностью.

На рис.11.13 по найденным значениям l_i, m_i, n_i построены единичные векторы нормалей к главным площадкам и показаны направления v_i главных напряжений.

По формуле (11.10) определим наибольшее по абсолютной величине касательное напряжение, действующее на площадке, наклоненной под углом 45° к главным осям 1 и 3 напряженного состояния

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{40,28 - (-81,36)}{2} = 60,82 \text{ МПа}.$$

Исследуем деформированное состояние тела в окрестности рассматриваемой точки. По формулам обобщенного закона Гука (11.21) определим линейные и угловые деформации в исходных осях Ox, Oy, Oz .

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [-30 - 0,3(-50 + 20)] = -1 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xy} = \frac{40}{0,8 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [-50 - 0,3(20 - 30)] = -2,238 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{-20}{0,8 \cdot 10^5} = -2,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} [20 - 0,3(-30 - 50)] = 2,095 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{zx} = \frac{-20}{0,8 \cdot 10^5} = -2,5 \cdot 10^{-4}.$$

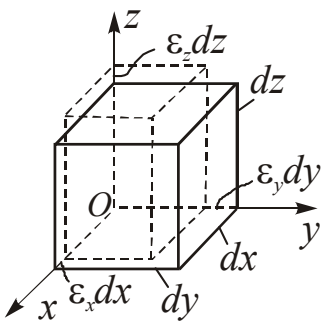


Рис.11.14

Относительная объемная деформация определяется по формуле (11.20)

$$e = (-1 - 2,238 + 2,095) \cdot 10^{-4} = -1,143 \cdot 10^{-4}.$$

На рис.11.14 показаны линейные деформации ребер элементарного параллелепипеда, а на рис.11.15 – угловые деформации в плоскостях Oxy, Oyz, Ozx .

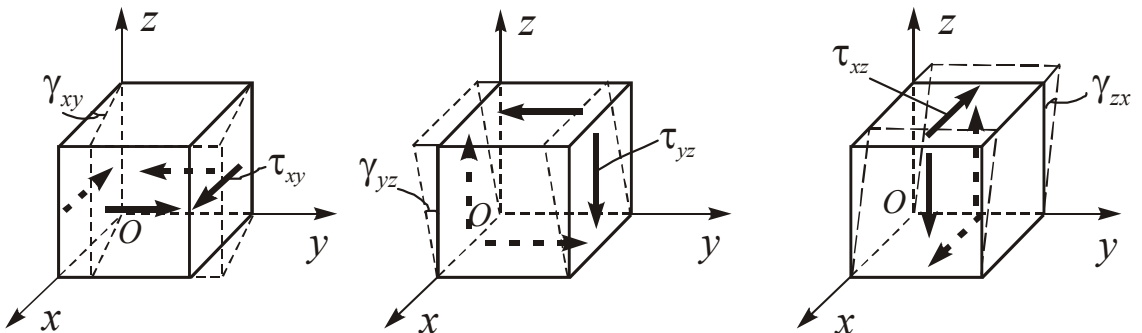


Рис.11.15

Определим по формулам (11.30) и (11.31) полную удельную потенциальную энергию деформации и удельную потенциальную энергию формоизменения

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [40,28^2 + 18,92^2 + 81,36^2 - 2 \cdot 0,3(-40,28 \cdot 18,92 + 18,92 \cdot 81,36 - 81,36 \cdot 40,28)] = 0,02405 \text{ МПа};$$

$$U_0^\Phi = \frac{1 + 0,3}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [(40,28 + 18,92)^2 + (-18,92 + 81,36)^2 + (-81,36 - 40,28)^2] = 0,02290 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность в окрестности рассматриваемой точки тела. По энергетической теории прочности согласно условию прочности (11.34) получим

$$\sigma_i = \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-30 + 50)^2 + (-50 - 20)^2 + (20 + 30)^2 + 6(40^2 + 20^2 + 20^2)} =$$

$$= 105,4 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Задача 11.2.

В окрестности точки тела известны компоненты тензора напряжений $\sigma_x = -50$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 60$ МПа, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ (рис.11.16,а). Материал – сталь. Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$.

Исследуем напряженное и деформированное состояния в окрестности точки тела. Поскольку касательные напряжения $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, площадки, нормальные к оси Oz , являются главными. Так как при этом главное напряжение $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, то напряженное состояние является двухосным.

Величины двух других главных напряжений и углы наклона нормалей к главным площадкам определим по формулам (11.12) и (11.13).

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-50 + 100}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50 - 100}{2}\right)^2 + 60^2};$$

$$\sigma_1 = 121,05 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -71,05 \text{ МПа};$$

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{60}{121,05 - 100} = 2,850, \quad \alpha_1 = 70,7^\circ;$$

$$\text{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{60}{-71,05 - 100} = -0,350, \quad \alpha_2 = -19,3^\circ.$$

Положение главных площадок показано на рис.11.16,б.

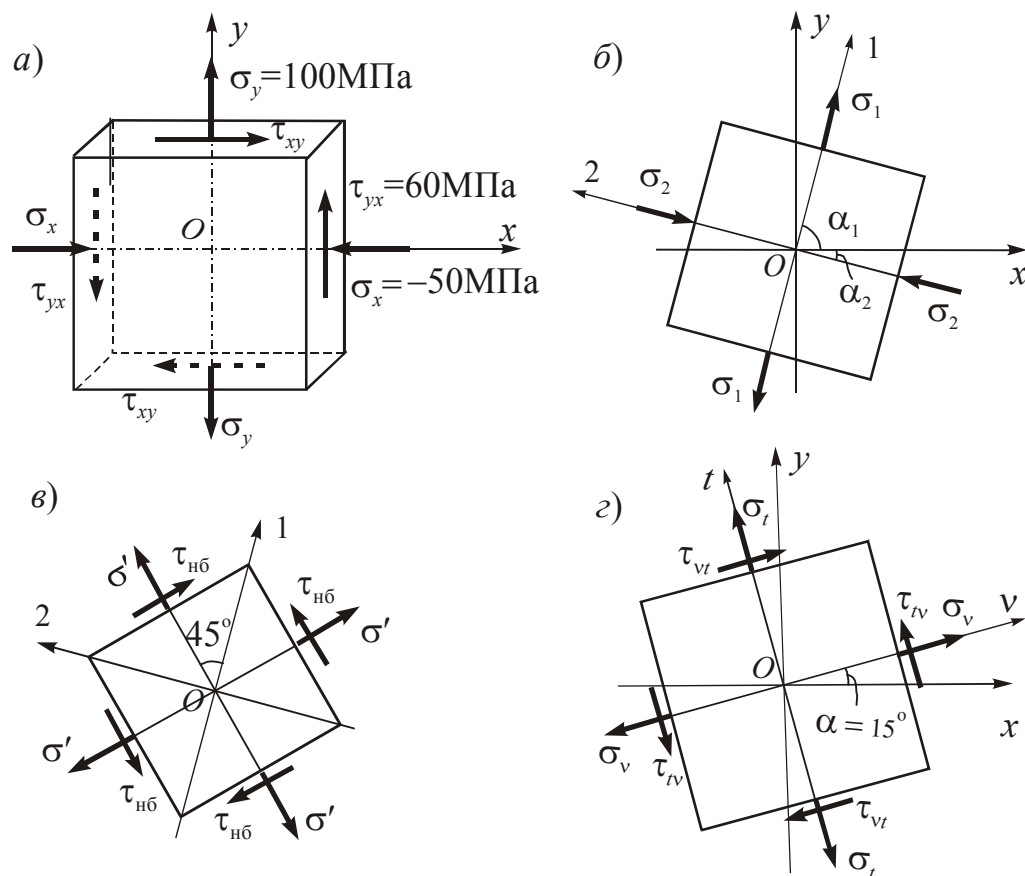


Рис.11.16

Для контроля правильности вычислений сделаем проверку

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 121,05 - 71,05 = \sigma_x + \sigma_y = -50 + 100 = 50 \text{ МПа};$$

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| = 70,7^\circ + 19,3^\circ = 90^\circ.$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках является постоянной величиной, и главные оси напряженного состояния взаимно перпендикулярны.

Определим по формуле (11.14) величину наибольших касательных напряжений, которые действуют на площадках, наклоненных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам (рис.11.16,в)

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{121,05 - (-71,05)}{2} = 96,05 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения на этих площадках согласно формуле (11.15) равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{121,05 - 71,05}{2} = 25,0 \text{ МПа}.$$

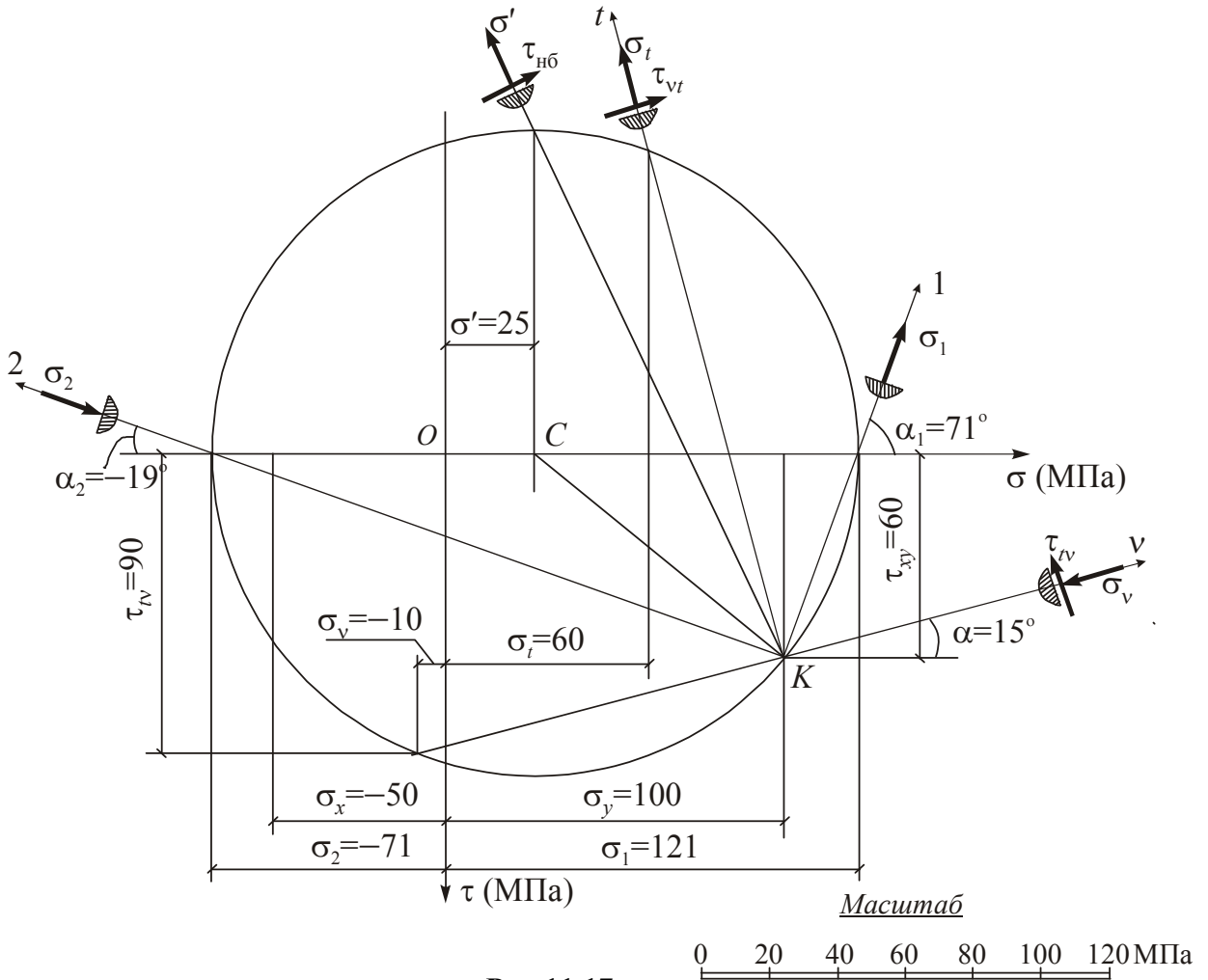
Определим по формулам (11.11) напряжения на взаимно перпендикулярных площадках с нормальями v и t . Угол наклона нормали v к оси Ox $\alpha = 15^\circ$ (рис.11.16,г)

$$\sigma_v = -50 \cos^2 15^\circ + 100 \sin^2 15^\circ + 60 \sin 30^\circ = -9,95 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = -50 \sin^2 15^\circ + 100 \cos^2 15^\circ - 60 \sin 30^\circ = 59,95 \text{ МПа};$$

$$\tau_{iv} = \tau_{vi} = -\frac{-50 - 100}{2} \sin 30^\circ + 60 \cos 30^\circ = 89,46 \text{ МПа.}$$

Найденные значения напряжений и углы наклона нормалей к площадкам, на которых они действуют, могут быть также определены графически с помощью круга Мора. Круг Мора для напряжений (рис.11.17) строится аналогично кругу инерции для моментов инерции с той разницей, что положительные касательные напряжения при выбранном на рис.11.16,*a* направлении координатных осей Ox и Oy откладываются вниз. Величины напряжений измеряются с помощью принятого масштаба, а углы наклона – по транспортиру. Результаты аналитического и графического расчетов совпадают.



Исследуем деформированное состояние тела в окрестности рассматриваемой точки. Определим с помощью закона Гука (11.24) линейные, угловые и объемную деформации.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-50 - 0,3 \cdot 100) = -3,81 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (100 + 0,3 \cdot 50) = 5,476 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0,3}{2,1 \cdot 10^5}(-50 + 100) = -0,714 \cdot 10^{-4};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{1}{0,8 \cdot 10^5} \cdot 60 = 7,50 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-3,81 + 5,476 - 0,714) \cdot 10^{-4} = 0,952 \cdot 10^{-4}.$$

Характер деформаций элементарного параллелепипеда показан на рис.11.18. Рёбра параллелепипеда, параллельные осям Ox , Oz , испытывают деформацию укорочения, ребро, параллельное оси Oy – деформацию удлинения. Объем элементарного параллелепипеда увеличивается. В плоскостях, параллельных плоскости Oxy , происходит искажение прямого угла на величину γ_{xy} .

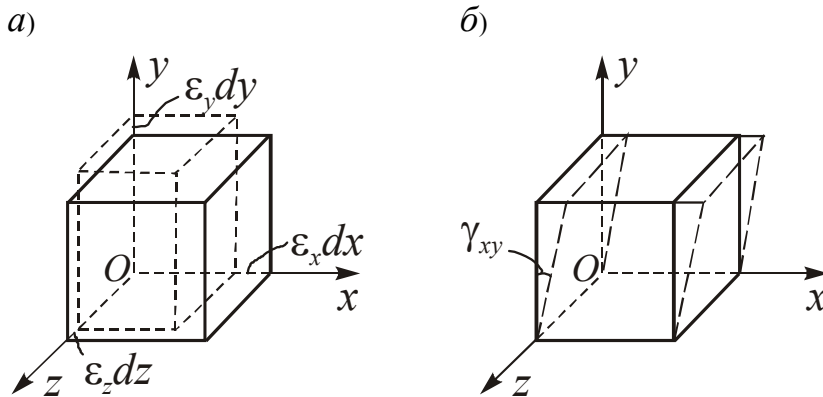


Рис.11.18

Определим по формулам (11.32) полную удельную потенциальную энергию деформации и энергию изменения формы в окрестности рассматриваемой точки тела.

$$U_0 = \frac{1}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [50^2 + 100^2 - 2 \cdot 0,3(-50) \cdot 100 + 2(1 + 0,3) \cdot 60^2] = 0,0592 \text{ МПа};$$

$$U_0^\phi = \frac{1 + 0,3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5} [50^2 + 100^2 - (-50) \cdot 100 + 3 \cdot 60^2] = 0,0584 \text{ МПа}.$$

Проверим прочность в окрестности рассматриваемой точки тела. По энергетической теории прочности согласно условию прочности (35) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} &= \sqrt{50^2 + 100^2 - (-50)(100) + 3 \cdot 60^2} = \\ &= 168,2 \text{ МПа} < \gamma_c R = 0,9 \cdot 210 = 189 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

12.1. Плоская задача теории упругости в декартовых координатах

Различают два вида плоской задачи – плоскую деформацию и плоское напряжённое состояние.

Плоская деформация имеет место в призматическом или цилиндрическом теле, нагруженном на боковой поверхности самоуравновешенной равномерно распределённой по длине нагрузкой, нормальной к продольной оси Oz . При этом предполагается, что торцы тела закреплены так, что их точки могут свободно перемещаться в своей плоскости и не могут перемещаться в направлении оси Oz .

При указанных ограничениях все поперечные сечения тела при деформации остаются плоскими и не перемещаются в направлении оси Oz .

Таким образом, плоская деформация характеризуется следующими равенствами:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \sigma_z \neq 0. \quad (12.1)$$

В качестве примера плоской деформации можно привести плотину, нагруженную гидростатическим давлением воды и силами собственного веса (рис.12.1).

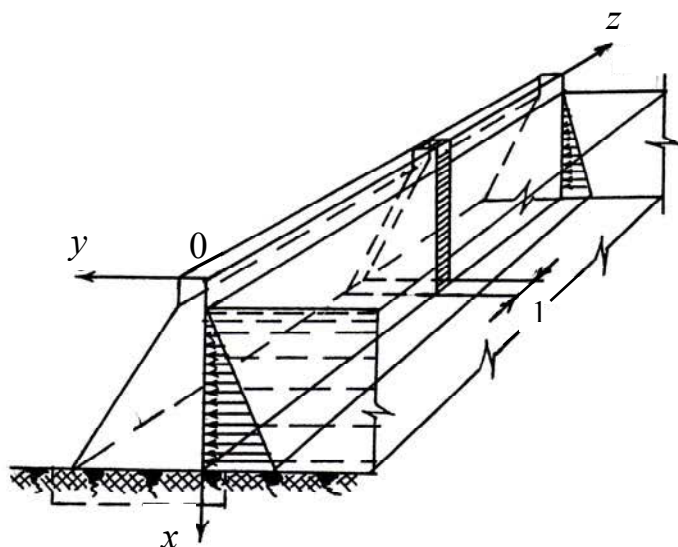


Рис.12.1

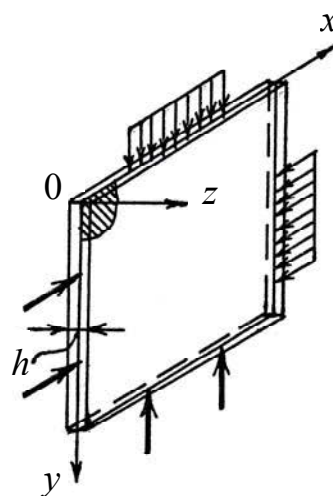


Рис.12.2

Плоским напряженным состоянием называется такое состояние тела, при котором во всех его точках одно из главных напряжений равно нулю, например $\sigma_z = \sigma_3 = 0$. При этом площадки, перпендикулярные к оси Oz являются главными.

Таким образом, плоское напряженное состояние характеризуется следующими равенствами:

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (12.2)$$

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru