

# Содержание

<b>Введение</b> .....	4
<b>1. Повторение материала по математике 5–6 классов</b> .....	5
1.1. Действия с обыкновенными и десятичными дробями .....	5
1.2. Задача на проценты и части .....	8
1.3. Числовые и буквенные выражения .....	10
<b>2. Линейные уравнения с одной переменной</b> .....	12
2.1. Решение уравнений методом сведения их к уравнениям с целыми коэффициентами .....	12
2.2. Линейные уравнения с параметром .....	14
2.3. Решение задач с помощью уравнений .....	16
<b>3. Делимость и степень с натуральным показателем</b> .....	17
3.1. Делимость и остатки .....	17
3.2. Свойства степеней и вычисления с ними .....	19
<b>4. Формулы сокращённого умножения</b> .....	21
4.1. Задача на вычисление и доказательство .....	21
4.2. Выделение полного квадрата .....	23
4.3. Разложение многочленов на множители .....	26
4.4. Разложение на множители при решении уравнений .....	28
4.5. Обобщения формул сокращённого умножения .....	29
<b>5. Линейная функция и её график</b> .....	31
5.1. График линейного уравнения и его свойства .....	31
5.2. Кусочно-линейные функции и функции с модулем .....	33
5.3. Графики уравнений .....	35
<b>6. Системы линейных уравнений</b> .....	36
6.1. Основные методы решения систем линейных уравнений ...	36
6.2. Замена переменных в системах уравнений .....	37
6.3. Системы с параметрами .....	37
6.4. Решение задач с помощью систем уравнений .....	38
<b>Варианты для итогового повторения</b> .....	40
Вариант 1 .....	40
Вариант 2 .....	42
Вариант 3 .....	43
Вариант 4 .....	44
<b>Ответы</b> .....	45
<b>Список литературы</b> .....	55

## Введение

Предлагаемые дидактические материалы предназначены дляработки активных навыков решения задач повышенного уровня по курсу алгебры 7-го класса.

Заданиягруппированы по темам и методам решения, но порядок, в котором они представлены, не является сколько-либо обязательным. Он может изменяться в зависимости от текущих учебных целей или подстраиваться под учебник алгебры, по которому учатся в вашем классе. Материалы пособия не ориентированы на какой-то конкретный учебник, но могут эффективно дополнять любой из них, не являясь заменой ему. Цель пособия —дать возможность решения достаточно большого числа как типовых, так и нестандартных заданий повышенного уровня сложности по всем основным темам курса алгебры 7 класса.

Заданияпособия могут быть полезны при подготовке к итоговой контрольной работе или экзамену за 7 класс, в том числе в классах, работающих по программе «Математическая вертикаль». Также пособие можно использовать при подготовке к поступлению в профильные 8-е классы математических школ.

Помимо набора задач в некоторых случаях даются примеры решения типовых задач и краткие указания. В конце сборника приводятся несколько вариантов экзамена в профильные 8 классы ГБОУ г. Москвы «Школа № 1514» и других школ за последние годы. Эти варианты можно использовать для самоконтроля и организации заключительного повторения.

*Желаем вам больших успехов в изучении математики!*

# 1. Повторение материала по математике 5–6 классов

## 1.1. Действия с обыкновенными и десятичными дробями

1. Найдите значение числового выражения:

а)  $5,5 \cdot 1 \frac{1}{11} : \left(13 \frac{1}{7} - 9,5\right)$ ;

б)  $3,5 - 4,8 + (-3,1) \cdot 7 - (10,5 - 3)$ .

2. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{1,26 : 2,4}{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}(0,8 - 0,8 \cdot 1,5)}$ ;

б)  $\frac{2,5 \cdot 1,24}{10 + \left(\frac{7}{10} \cdot 0,4 - 0,4\right)} : 0,016$ ;

в)  $\frac{0,2^3 - \frac{1}{5} \cdot 0,04}{1,6 : \left(0,4 - 0,6 \cdot \frac{2}{5}\right) + 10}$ .

3. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{\left(2 \frac{1}{10} : 2 - 1,8\right) \cdot 0,4 + 0,3}{3,15 : 22,5}$ ;

б)  $\frac{3,5 \cdot 1,24 - 12,4 \cdot 0,7 \cdot 0,5}{1 \frac{4}{5} - 9 \cdot \left(\frac{13}{40} - (-0,5)^3\right)}$ .

4. Найдите значение числового выражения:

$$\frac{1 \frac{1}{3} \cdot 1,9 + 19,5 : 4 \frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0,16} : \frac{3,5 + 4 \frac{2}{3} + 2 \frac{2}{15}}{0,5 \cdot \left(1 \frac{1}{20} + 4,1\right)}$$

5. Найдите значение числового выражения:

$$\frac{\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15}\right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - \frac{1}{15}\right) \cdot 2,52}{\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5}\right) : \left(0,25 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{7}{13}}$$

6. Найдите 47% от значения выражения:

$$\frac{\left(\frac{3}{5} + 0,425 - 0,05\right) : 0,1}{30,5 + \frac{1}{6} + 3\frac{1}{3}} + \frac{6\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}}{26 : 3\frac{5}{7}} - 0,05.$$

7. Найдите число, если 20% этого числа равны значению выражения:

$$\frac{2\frac{3}{4} : 1,1 + 3\frac{1}{3} : \frac{5}{7}}{2,5 - 0,4 \cdot 3\frac{1}{3}} - \frac{\left(2\frac{1}{6} + 4,5\right) \cdot 0,375}{2,75 - 1\frac{1}{2}}.$$

8. Найдите число, если 25% этого числа равны:

$$\left(1\frac{18}{25} - 9,12 - 7,4 \cdot \left(-6\frac{1}{3}\right)\right) : 5\frac{1}{3}.$$

9. Вычислите удобным способом:

$$\left(1\frac{7}{15} - 0,25 - 3\frac{1}{3} + 30\frac{1}{4}\right) : \frac{1}{5}.$$

10. Вычислите:  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97 + 99 + 101$ .

11. Найдите произведение всех целых чисел от  $-15$  до  $14$ .

12. Вычислите удобным способом:

а)  $5\frac{7}{18} - 4\frac{5}{24} + 3\frac{11}{18} - 6\frac{19}{24}$ ;

б)  $8\frac{7}{10} \cdot 9,6 + 3,5 \cdot 8,7 - 8,7 \cdot 3,1$ ;

в)  $12\frac{3}{7} : \left(1\frac{8}{15} + 0,25 - 3\frac{1}{30} - 1\frac{3}{4}\right)$ .

13. Найдите значение выражения:

$$\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12},$$

не приводя дроби к общему знаменателю.

14. Вычислите удобным способом:

а)  $\frac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253};$

б)  $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7}.$

15. Вычислите:  $2022 \cdot 20212021 - 2021 \cdot 20222022.$

## 1.2. Задачи на проценты и части

1. Найдите:

а) 25% от числа 15;

б) число, 45% которого равны 50,25;

в) какой процент составляет 25 от 400.

2. В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре ещё на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

3. Магазин продаёт картофель по цене  $a$  рублей за килограмм. В первый день было продано  $\frac{1}{3}$  всего картофеля, а во второй день — 25% оставшегося. Какую сумму выручил магазин от продажи картофеля за 2 дня, если всего у него было 12 тонн картофеля?

4. Один рабочий выпускал на 50 деталей меньше другого. Когда выработка первого повысилась на 1%, а второго на 2% в день, то вместе они стали выпускать 254 детали в день. Сколько деталей выпускал каждый рабочий первоначально?

5. Цена входного билета на стадион составляла 40 рублей. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на 12,5%. Какова новая цена билета?

6. Из двух пунктов, расстояние между которыми 94 км, отправились одновременно навстречу друг другу пешеход и велосипедист. Скорость пешехода на 16 км/ч меньше скорости велосипедиста. Найдите скорость каждого, если известно, что встретились они через 4 ч и пешеход сделал в пути получасовую остановку.

7. В библиотеке Кати альбомы составляли 25% всех книг. После того, как она купила ещё 3 альбома, они стали составлять 28% общего числа книг. Сколько всего книг стало теперь у Кати?

8. Сплавляли два слитка. Первый весил 115 г и содержал 20% меди. Второй весил 85 г и содержал 56% меди. Какой процент меди содержится в получившемся сплаве?

9. Сколько воды нужно добавить к 750 г 15% раствора сахара, чтобы процентное содержание сахара стало 5%?

10. Семья состоит из трёх человек: отца, матери и сына. Если бы зарплата матери увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 43%. Если бы стипендия сына увеличилась втрое, общий доход семьи вырос на 20%. Сколько процентов дохода семьи составляет зарплата отца?

11. Из данных четырёх чисел первые три относятся между собой как

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20},$$

а четвёртое составляет 15% второго. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

12. Число участников олимпиады по физике составляет 250% от числа участников олимпиады по химии, а число участников олимпиады по химии составляет 32% от числа участников олимпиады по математике. Сколько процентов составляет число участников олимпиады по математике от числа участников олимпиады по физике?

### 1.3. Числовые и буквенные выражения

1. Периметр прямоугольника равен 12 см, а одна из его сторон  $-a$  см. Какова площадь прямоугольника?
2. Из двух пунктов, расстояние между которыми  $p$  км, одновременно отправились пешеход и велосипедист. Они встретились через  $t$  ч. Скорость велосипедиста  $v$  км/ч. Напишите формулу, описывающую скорость пешехода. Ответьте на вопрос задачи, если  $p = 9$ ,  $t = \frac{1}{2}$ ,  $v = 12$ .
3. Жакшиштейв виде равенства: утроенная разность  $x$  и  $y$  составляет 20% их суммы.
4. Жакшиштейв виде равенства: 30% разности  $n$  и  $m$  в два раза больше их суммы.
5. Докажите, что значение выражения  $-(4y - 9(2y - 1)) - 14y$  не зависит от  $y$ .
6. Докажите, что значение выражения  $-(12x - 3(x - 4)) + 9x$  постоянно при любом значении переменной.
7. Упростите выражение  $(2a - c) \cdot 0,3 - 0,5 \cdot (4a - 3c)$  и найдите его значение при  $a = -1,5$  и  $c = -\frac{2}{3}$ .
8. Докажите, что при любом натуральном  $n$  значение выражения  $-5(n - 12) - (33 - 26n)$  кратно 3.
9. Докажите, что при любом натуральном  $m$  значение выражения  $12(2m - 1) + 2(2m - 1)$  кратно 14.
10. Найдите значение выражения  $3a + 3b - 2$ , если  $a + b = 2$ .
11. Найдите значение выражения  $2a - 2b + 4$ , если  $a - b = 3$ .
12. Сравните значения выражений  $2xy - x$  и  $3xy - y$  при  $x = -2$  и  $y = 8$ .
13. Упростите выражение  $3\frac{1}{3} \cdot (0,3a - 0,6b) - (0,8b - 1,6a) \cdot 1\frac{1}{4} - 2$  и найдите его значение, если  $\frac{1}{2}a - 0,5b = -2$ .



14. Упростите выражение  $0,6 \cdot \left(1\frac{2}{3}a - 5b\right) - (1,4a - 0,7b) \cdot 1\frac{3}{7} + 5$  и найдите его значение, если  $\frac{1}{2}a + b = -1$ .

15. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $2 \cdot (0,3x - 1) - (3x - 5) \cdot \frac{2}{5}$  при  $x = -\frac{1}{3}$ ;

б)  $2021 - 7x + 7y$  при  $x - y = 1\frac{5}{7}$ .

## 2. Линейные уравнения с одной переменной

### 2.1. Решение уравнений методом сведения их к уравнениям с целыми коэффициентами

Умножение обеих частей уравнения на ненулевое число позволяет быстро упростить уравнение, избавившись от дробей. Обычно удобнее всего умножать на наименьшее общее кратное знаменателей всех дробей, присутствующих в уравнении.

**Пример.** Решите уравнение:

$$\frac{1-4x}{5} - 2\left(1-3x - \frac{4-2x}{3}\right) = 2x + 3\frac{4}{5}.$$

Для начала раскроем скобки:

$$\frac{1-4x}{5} - 2 + 6x + \frac{8-4x}{3} = 2x + 3\frac{4}{5}.$$

Теперь умножим обе части уравнения на НОК(3; 5) = 15:

$$\begin{aligned} 3(1-4x) - 30 + 90x + 5(8-4x) &= 30x + 57 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{3} - \underline{12x} - \underline{30} + \underline{90x} + \underline{40} - \underline{20x} - \underline{30x} - \underline{57} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 28x - 44 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{44}{28} \Leftrightarrow x = 1\frac{4}{7}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $1\frac{4}{7}$ .

Решите уравнения:

1.  $\frac{3y+12}{4} = 3 - \frac{5y-7}{3}$ .

2.  $\frac{5t+1}{3} - t - \frac{t-3}{8} = \frac{t}{16}$ .

3.  $\frac{0,2(5-x)}{6} + x + \frac{0,3(6+x)}{3} - \frac{0,5(x-10)-1}{4} = 3$ .

$$4. \frac{(x-3)(x-4)}{15} - \frac{(1-3x)^2}{10} - \frac{5(1-x)(1+x)}{6} = 0.$$

$$5. \frac{x-2}{5} + \frac{2x-5}{4} = 4-x - \frac{4x-1}{20}.$$

$$6. \left( \frac{2x-3}{2} + \frac{3x+3}{4} \right)^2 = \left( 3 - \frac{x+5}{3} \right)^2.$$

$$7. \frac{x-1}{3} - 3 \left( 2x - \frac{7-2x}{4} \right) = 2\frac{1}{4} - 5x.$$

$$8. \frac{x+1}{4} - 2x = \frac{5-3x}{2} - \left( x + \frac{x-3}{8} \right).$$

$$9. 2x - 1 - \frac{3x-4}{2} = \frac{x+1}{3} - \left( 1 - \frac{x+3}{2} \right).$$

## 2.2. Линейные уравнения с параметром

Чтобы решить линейное уравнение, обычно удобно представить его в стандартном виде  $ax = b$ , где  $a$  и  $b$  —числовые коэффициенты.

Возможны три случая:

- 1) если  $a \neq 0$ , то уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{b}{a}$   
(вне зависимости от  $b$ );
- 2) если  $a = 0$  и  $b \neq 0$ , то уравнение не имеет корней;
- 3) если  $a = 0$  и  $b = 0$ , то любое число является корнем данного уравнения (уравнение имеет бесконечно много корней).

1. Решите уравнение относительно  $x$ :

а)  $x \cdot (a - 3) = -1$ ;

б)  $(a + 1) \cdot x = a + 1$ ;

в)  $(x + 4) \cdot a = 12 + 3x$ ;

г)  $3x - 1 = m(-x + 1) + 2$ .

2. Решите уравнение относительно  $x$ :

а)  $(a - 1) \cdot a \cdot (a + 2) = a \cdot (a + 1) \cdot x$ ;

б)  $cx + c^2x - c = 0$ ;

в)  $(b - 2)^2 \cdot x \cdot (b + 1) = b^2 + b$ ;

г)  $(4 - x) \cdot d = d^2 - 4x$ .

3. При каких значениях параметра  $m$  уравнения  $x - 3 = 7 - x$  и  $m - 3x = 1$  имеют общие корни?

4. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнения  $5x - 1 = 2p - 2$  и  $3x + 3 = p + 5$  имеют общие корни.

5. При каких значениях  $m$  уравнение  $m \cdot x - 2 = m^2 - 5m + 4$  :
- а) имеет единственный корень;
  - б) не имеет корней;
  - в) имеет бесконечно много корней?
6. При каких значениях  $k$  уравнение  $k \cdot x = (k - 4)k$  :
- а) имеет единственный корень;
  - б) не имеет корней;
  - в) имеет бесконечно много корней?
7. Решите уравнение  $2x - 3 = m \cdot \left(\frac{x}{3} + 4\right) + 1$  для всех значений параметра  $m$ .
8. Решите уравнение относительно  $x$  :
- а)  $(n - 2) \cdot x = 5$ ;
  - б)  $ax = a^2$ ;
  - в)  $bx \cdot (b - 1) = 5b - 5$ ;
  - г)  $(k - 2) \cdot x = 10 - 5x$ .
9. При каких значениях параметра  $b$  уравнения  $bx = 12$  и  $3x = b$  имеют общие корни?
10. Решите уравнение  $y + \frac{y}{a} = 2$  относительно  $y$ .
11. Решите уравнение  $ax + 2x + 3 = 1 - x$  относительно  $x$ .
12. Решите уравнение  $a \cdot (x - 1) = 2ax - 4a^2$  для всех значений параметра  $a$ .

### 2.3. Решение задач с помощью уравнений

1. Артём хочет успеть в океанариум ровно к открытию. Если он пойдёт из дома пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч, а если поедет на велосипеде со скоростью 10 км/ч, то приедет за 30 мин до открытия. Чему равно расстояние от дома до океанариума?
2. Пешеход прошёл путь от станции до дачи за 4 ч 30 мин. Обрато он шёл на 2 км/ч быстрее обычного, и поэтому пришёл на 1,5 ч раньше. Как далеко от станции находится его дача?
3. В двух сараях сложено сено, причём в первом сарае сена в три раза больше, чем во втором. После того как из первого сарая увезли 20 т сена, а во второй привезли 10 т, в обоих сараях сена стало поровну. Сколько всего тонн сена было в двух сараях первоначально?
4. Из двух городов, расстояние между которыми равно 910 км, в разное время выехали навстречу друг другу два поезда. Скорость одного поезда 80 км/ч, а другого — 90 км/ч. Пройдя 640 км, первый поезд встретился со вторым. На сколько часов один из них вышел позже другого?
5. Из двух пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно 340 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Скорость поезда, выехавшего из  $A$ , на 5 км/ч меньше скорости поезда, выехавшего из  $B$ . Найдите скорости поездов, если через два часа расстояние между ними стало 30 км.
6. От станции к посёлку, удалённому на 104 км, отправились одновременно мотоциклист и автомобилист. Скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости мотоцикла. Прибыв в посёлок, автомобиль сразу повернул обратно и встретил мотоциклиста через 1 ч 36 мин после его выезда со станции. На каком расстоянии от станции произошла встреча?
7. Из дома в школу Саша вышел на 5 мин позже своей сестры. Через сколько минут он догнал сестру, если:
  - а) его скорость на 20% больше, чем скорость сестры;
  - б) скорость сестры на 20% меньше, чем скорость Саши?

### 3. Делимость и степень с натуральным показателем

#### 3.1. Делимость и остатки

1. Докажите, что произведение двух последовательных чётных чисел делится на 8.
2. Замените звёздочки в записи  $72*3*$  цифрами так, чтобы получившееся число делилось на 45. Запишите все возможные варианты.
3. Замените в числе  $2556*369586*$  звёздочки цифрами так, чтобы оно делилось на 36. Запишите все возможные варианты.
4. В числе  $4758967*$  поставьте последнюю цифру так, чтобы число делилось на:
  - а) 2;
  - б) 5;
  - в) 3;
  - г) 9;
  - д) 4;
  - е) 25.
5. Докажите, что число  $\underbrace{555\dots5}_{2010}3$  является составным.
6. Найдите остаток от деления  $2011 \cdot 2012 \cdot 2013 + 2014^3$  на 7.
7. Найдите последнюю цифру числа  $2019^{2019}$ .
8. Докажите, что  $n^3 + 2n$  делится на 3 для любого натурального  $n$ .
9. Докажите, что  $x \cdot (7x + 2) \cdot (5x + 2) : 3$  при любом целом  $x$ .
10. Докажите, что  $(a^3 - a) : 3$  при любом целом  $a$ .
11. Одно из двух натуральных чисел при делении на 5 даёт остаток 2, а другое — остаток 3. Какой остаток получится при делении произведения этих чисел на 5?
12. На какую цифру оканчивается число  $777^{777}$ ?
13. Найдите остаток от деления  $2^{100}$  на 3.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

[e-Univers.ru](http://e-Univers.ru)