Предисловие

В 10 классе школьники начинают изучать новый раздел математики – начала математического анализа. Этот раздел характеризуется своеобразными логикой, подходами, методикой. Поэтому очень важно сразу заложить грамотное понимание основ высшей математики. Помимо подготовки к экзамену такое понимание будет способствовать освоению высшей математики в вузе. Также в этом классе продолжается изучение алгебры: детально рассматриваются тригонометрические функции, уравнения и неравенства. Такой материал крайне необходим при изучении точных наук в вузе.

10 класс необходимо рассматривать как целенаправленную подготовку к сдаче ЕГЭ, так как варианты этого экзамена содержат значительное количество задач, содержащих изучаемый материал.

Поэтому данное пособие преследует три цели: изучить материал по алгебре и началам анализа для 10 класса, подготовиться по этим разделам к успешной сдаче ЕГЭ и быть готовым использовать полученные знания при обучении в вузе. Пособие составлено для учебника А.Н. Колмогорова, А.М. Абрамова и др. (М.: Просвещение). Нумерация задач в поурочном планировании дана для этого учебника.

В пособии подробно рассмотрено содержание каждого урока. Несколько расширен изучаемый материал: более детально повторены основные тригонометрические формулы и их применение; даны дополнительные типы тригонометрических уравнений и неравенств, построение более сложных графиков; расширены представления о пределе функции, использовании производной в алгебраических, геометрических и физических задачах. Такое расширение материала вполне доступно для десятиклассников, развивает их интерес к изучению предмета и дает более цельное представление об изучаемых темах. Кроме того, приведенные дополнения подготавливают школьников к успешной сдаче ЕГЭ и дальнейшему эффективному обучению в вузе.

Предусмотрены два вида фронтального контроля успеваемости: контрольные работы и зачетные работы. Контрольные работы имеют три степени сложности. Выбор степени сложности определяется или учителем, или учеником. При этом за решение более сложной контрольной работы ученик поощряется дополнительным баллом к оценке. В контрольной работе приводится на одну задачу больше, чем необходимо для получения высшей оценки. Наличие лишней задачи подразумевает некоторую свободу выбора у учащихся. В пособии приведены 7 контрольных работ.

Зачетные работы приведены для коррекции результатов контрольных работ. Задачи работы разбиты на три блока по степени сложности и оцениваются разным количеством баллов. Необходимое для получения оценки количество задач может быть набрано из разных блоков. Даже для получения высшей оценки нужно решить не более половины задач варианта. Поэтому у учащихся имеется значительная свобода выбора в решении задач. Между контрольной и зачетной работой предусмотрено несколько уроков для коррекции знаний учащихся. Приведены 2 зачетные работы по темам.

В конце обучения предусмотрена итоговая контрольная работа, в которой проверяются навыки и умения учащихся по основным (базовым) темам.

Все контрольные и зачетные работы даны с полным разбором всех задач всех вариантов. Решения лучше размещать на стенде, так как разобрать все задачи на уроке невозможно, да и нецелесообразно.

Математические диктанты в пособии не предусмотрены, так как, на наш взгляд, они малоэффективны при обучении, но отнимают значительное время от уроков.

В целом пособие составлено таким образом, чтобы оптимизировать подготовку учителя к уроку и сэкономить его время.

Рекомендации к проведению уроков

Разумеется, все изложенное носит **исключительно рекомендательный характер**. Определяющими факторами являются **подготовленность** класса, его **работоспособность, интерес к изучению алгебры**. Поэтому ни одно планирование не может являться **догмой**. Весь ход урока должен **способствовать обучению школьников**. На наш взгляд, пусть каждый отдельный школьник лучше **усвоит** тот **материал**, который в **состоянии понять**, **чем не поймет ничего**. В последнем случае ситуация принимает лавинообразный характер: у учащихся возникает **комплекс неполноценности**, к выполнению домашнего задания **привлекаются все домочадцы**, **возникают списывание**, **подсказки**, **шпаргалки** и т. д. В итоге **результаты ужасающие** – ЕГЭ по математике сдается школьниками хуже всех других предметов (примерно 20% выпускников пишут его на «двойку»).

Другая причина, по которой нельзя создать универсальное пособие, − наличие **нескольких** различных **вариантов обучения** (с соответствующим тематическим планированием и различным количеством часов на обучение). При этом некоторые варианты обучения предусматривают **использование дополнительных** учебных **пособий**.

В связи с этим данное пособие позволяет проводить занятия с использованием только **одного базового** учебника (102 часа в год). **Содержание** уроков является **избыточным** (в расчете на очень сильный, подготовленный класс). При необходимости часть материала опускается либо излагается достаточно поверхностно. При подробном, детальном изложении материала его вполне хватает на максимальный вариант (136 часов в год). Учитывая сложность материала, проведение контрольных работ и тематических зачетов, желательно иметь в расписании **сдвоенные уроки** математики.

Поурочное планирование включает в себя **четыре вида занятий**:

1. Урок на изучение нового материала.
2. Урок на отработку и закрепление пройденного материала.
3. Контрольная работа.
4. Тематический зачет.

Рассмотрим эти виды занятий.

Урок на изучение нового материала включает в себя семь этапов.

I. **Сообщение темы и цели занятий** делает учитель (~1–2 минуты). Требуется донести до учащихся **необходимость** изучения данной темы (**области применения** этих знаний) и **цель** урока (**навыки и приемы**, которые должны быть усвоены в ходе проведения урока).

II. **Изучение нового материала (основные понятия)** (~15 минут) возможно двумя путями.

1. С помощью подсказок, примеров и наводящих вопросов учителя **школьники самостоятельно** (при фронтальной работе) приходят **к формулировке основных понятий и правил** рассматриваемого раздела алгебры. Затем **учитель уточняет и корректирует** эти результаты. Однако, учитывая, что изучение анализа начинается именно в 10 классе и все понятия для учащихся незнакомы, такой путь можно рекомендовать **лишь для** самых **простых тем** либо отдельных **фрагментов урока**.

2. **Учитель формулирует** основные понятия и правила, иллюстрируя их примерами. Такой подход требует меньше времени, но менее эффективен (всегда полезнее самостоятельно решить задачу, чем услышать объяснение ее решения).

III. **Контрольные вопросы** по изучаемому материалу **задает учитель** для проверки усвоения и понимания возникающих понятий, терминов и т. д. (~5 минут). Вопросы могут задаваться как **индивидуально**, так и **фронтально**. Следует обратить внимание именно **на понимание** понятий, а не на их механическое запоминание. Для этого рекомендуется **кроме определения** попросить учащегося привести **соответствующие примеры**. В случае затруднения такие примеры могут привести **другие школьники или учитель**.

IV. **Задание на уроке** дает учитель из **числа** наиболее **характерных, типовых задач** (~15 минут). Задание может выполняться:

1. **Самостоятельно учащимися всего класса** в тетрадях с последующим разбором кем-то из школьников (например, первым выполнившим задание) у доски. При этом желательна активная **работа всех учащихся**: **поиск ошибок** в решении на доске, **вопросы** по решению, **другие способы** решения и т. д.

2. **В виде диалога учащихся** на одной парте: решение задания, обмен тетрадями и взаимная проверка решения.

3. **В виде работы у доски** одного или нескольких школьников. После выполнения задания возможен как взаимоконтроль учащихся у доски, так и подключение к проверке решения всего класса. Разумеется, при этом будет происходить и **диалог учителя с отвечающим у доски**.

V. **Задание на дом** дается учителем из числа типовых задач, **аналогичных рассмотренным в классе**. Задание должно быть рассчитано на 60–80 минут. Если возможно, то желательно, чтобы учащимися были рассмотрены **разные способы решения задачи**. Это приводит **к активизации мышления** школьников, **творческому пониманию** материала и т. д.

При выполнении домашнего задания необходимо приучить школьников **фиксировать непонятый материал**: теоретические сведения, нерешенные задачи и т. д. Полезно научить школьников **формулировать**, **что** именно им **не понятно**. Четко сформулированный вопрос – это половина ответа на этот вопрос. Особенно такие навыки понадобятся учащимся при обучении в вузе. Разумеется, все возникающие вопросы и нерешенные задачи необходимо **разобрать на ближайшем занятии** по математике.

VI. Во многих уроках предусмотрены **творческие задания**. Эти задания отличаются от приводимых в учебнике или **большей сложностью** или **новым способом решения**. Поэтому рассмотрение подобных заданий очень полезно. В зависимости от подготовленности класса эти задания могут быть рассмотрены:

1) **на внеклассных занятиях** (дополнительные занятия, кружки, факультативы и т. д.);

2) **со всеми учащимися** как в качестве задания в классе, так и в качестве домашнего задания;

3) дифференцированно **с наиболее подготовленными** школьниками или на уроке, или в виде домашнего задания;

4) **во время** проведения математических боев, **олимпиад**, недель математики и т. д.

VII. **Подведение итогов урока** (~1−2 минуты) проводится учителем с учетом самостоятельной работы школьников, ответов у доски, отдельных дополнений, вопросов, комментариев учащихся. За все эти виды деятельности **выставляются оценки с их** кратким **обоснованием**.

Урок на отработку и закрепление пройденного материала отличается этапом II. Теперь на этом этапе предусмотрено **повторение и закрепление пройденного материала** (~20 минут). Прежде всего, оно включает **ответы на вопросы по домашнему заданию**. Желательно, чтобы такие ответы давались самими **учащимися** класса. Вопросы могут включать в себя непонятые понятия, определения, термины и другой теоретический материал. По-видимому, возникнет и необходимость **разбора нерешенных задач**.

В этой части урока желательна **максимальная активность** всего класса. Школьник, **объясняя и комментируя** свое решение задачи, **лучше усваивает** изучаемый материал. Кроме того, его **объяснения могут оказаться более удобными** для понимания ровесниками, чем объяснения учителя. Ориентировочное время на такую стадию этапа II ~ 5−10 минут.

На второй стадии этого этапа предусмотрен **контроль усвоения материала** (письменный опрос или самостоятельная работа), на который отводится ~ 10−15 минут.

Письменный опрос содержит теоретический вопрос и 1−2 задачи, аналогичные заданию в классе и домашнему заданию. При проверке ответа на теоретический вопрос следует в первую очередь обращать внимание **на его понимание**, а не на строгость и четкость формулировок (тем более, что строгие формулировки некоторых понятий будут даны только в вузе).

Самостоятельная работа включает 2−3 типовых, характерных задачи.

В материалах уроков **тесты используются в небольшом количестве** для наиболее простых тем. Это связано с тем, что тестирование **не дает возможности** выявить **причину ошибки**: непонимание темы, невнимательность, пробелы в предыдущем материале, арифметические ошибки и т. д.

По каждой изучаемой теме приводятся несколько **контрольных работ**. Они составлены **в шести вариантах различной сложности** (варианты 1, 2 − самые простые, варианты 3, 4 − сложнее, 5, 6 − самые сложные). Вариант содержит **6 задач**, из которых **две последние** чуть **сложнее предыдущих**. Как правило, **задачи** вариантов **подобны** задачам, **решаемым в классе и дома**. Выбор вариантов может быть сделан или **самими учащимися** (с учетом их самооценки), или **учителем** (с учетом успехов школьника).

Оцениваться контрольная работа может следующим образом: в вариантах 1, 2 за любые пять решенных задач ставится оценка «5», за четыре задачи – оценка «4», за три задачи – оценка «3». **Шестая задача** дает учащимся некоторую **свободу выбора и определенный резерв**. При таких же критериях за решение заданий вариантов 3, 4 добавляется 0,5 балла; заданий вариантов 5, 6 – добавляется 1 балл (учитывая большую сложность их заданий).

Контрольная работа рассчитана **на два урока** (на наш взгляд, это **оптимальное время** на написание работы). Изучаемый в 10 классе материал достаточно сложен. Для решения предлагаемых задач требуется время на размышление. Поэтому **одного урока** на проведение контрольной работы **не достаточно**. При необходимости за счет уменьшения количества задач или за счет некоторого либерализма при проверке контрольная работа может быть проведена и за один урок.

После каждой контрольной работы проводится ее **анализ и разбор** наиболее сложных **задач**. Ко всем заданиям вариантов 1−4 приведены ответы, задания вариантов 5, 6 разобраны. Полезно после контрольной работы **вывешивать** на стенде в классе **разбор заданий всех вариантов**. Заметим, что за счет дифференциации самих вариантов и заданий в них возможна **некоторая необъективность оценок** за контрольную работу.

Чтобы **устранить** подобную **необъективность**, дать возможность **повышения оценок** у учащихся, еще раз **повторить и закрепить** пройденную тему, на последнем занятии проводится письменный **тематический зачет**. Ему предшествует **урок на повторение** данной темы.

Тематический зачет составлен в двух равноценных вариантах. Задания каждого варианта разделяются по сложности на три группы (группа А − самые простые задачи, группа В − более сложные задачи и группа С − самые сложные задачи). Каждая задача из А оценивается в 1 балл, из В – в 2 балла, из С – в 3 балла. Поэтому за правильное решение всех задач блока А можно получить 7 баллов, блока В – 8 баллов и блока С − 9 баллов (всего 24 балла). Оценка «3» ставится за 6 баллов, оценка «4» − за 10 баллов, оценка «5» − за 14 баллов.

Заметим, что по тематическому планированию (см. далее) материал I и IV разделов в значительной степени перекликается и достаточно искусственно распределен между этими разделами. Поэтому первые 17 уроков пособия изложены исходя из логики данной темы.

Тематическое планирование учебного материала

I вариант: 2 часа в 1-м полугодии, 3 часа во 2-м полугодии, всего 86 часов.

II вариант: 3 часа, всего 102 часов.

III вариант: 4 часа, всего 136 часов.

I. Тригонометрические функции любого угла (I вариант – 6 ч, II вариант – 6 ч, III вариант – 7 ч)

Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса (2 ч; 2 ч; 2 ч)

Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Радианная мера угла (2 ч; 2 ч; 2 ч)

II. Основные тригонометрические формулы (8 ч; 9 ч; 10 ч)

Соотношения между тригонометрическими функция одного и того же угла (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Формулы приведения (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 1 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

III. Формулы сложения и их следствия (6 ч; 7 ч; 8 ч)

Формулы сложения. Формулы двойного угла (6 ч; 7 ч; 8 ч)

Формулы суммы и разности тригонометрических функций (2 ч; 3 ч; 3 ч)

IV. Тригонометрические функции числового аргумента (5 ч; 6 ч; 8 ч)

Синус, косинус, тангенс и котангенс (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Тригонометрические функции и их графики (2 ч; 3 ч; 4 ч)

Контрольная работа № 2 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

V. Основные свойства функций (12 ч; 13 ч; 16 ч)

Функции и их графики (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций (2ч; 2 ч; 3 ч)

Возрастание и убывание функций. Экстремумы (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Исследование функций (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 3 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

VI. Решение тригонометрических уравнений и неравенств (11 ч; 13 ч; 13 ч)

Арксинус, арккосинус и арктангенс (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Решение простейших тригонометрических уравнений (2 ч; 3 ч; 2 ч)

Решение простейших тригонометрических неравенств (2 ч; 2 ч; 2 ч)

Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений (2 ч; 5 ч; 5 ч)

Контрольная работа № 4 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

VII. Обратные функции (0 ч; 0 ч; 6 ч)

Понятие обратной функции (0 ч; 0 ч; 1 ч)

Взаимно обратные функции (0 ч; 0 ч; 1 ч)

Обратные тригонометрические функции (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Примеры использования обратных тригонометрических функций (0 ч; 0 ч; 2 ч)

VIII. Числовые последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

IX. Предел последовательности (0 ч; 0 ч; 13 ч)

Определение бесконечно малой последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Свойства бесконечно малых последовательностей (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Бесконечно большие последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Определение предела последовательности (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Признак существования предела. Вычисление пределов рекуррентно заданных последовательностей (0 ч; 0 ч; 2 ч)

Последовательности сумм, сумма бесконечно убывающей геометрического прогрессии (0 ч; 0 ч; 2 ч)

X. Производная (12 ч; 14 ч; 17 ч)

Приращение функции (2 ч; 2 ч; 3 ч)

Понятие о производной (1 ч; 1 ч; 2 ч)

Понятие о непрерывности и предельном переходе (1 ч; 2 ч; 2 ч)

Правило вычисления производных (3 ч; 4 ч; 4 ч)

Производная сложной функции (1 ч; 1 ч; 3 ч)

Производные тригонометрических функций (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Контрольная работа № 5 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

XI. Применение непрерывности и производной (7 ч; 9 ч; 12 ч)

Применение непрерывности (2 ч; 3 ч; 3 ч)

Касательная к графику функции (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Приближенные вычисления (0 ч; 1 ч; 2 ч)

Производная в физике и технике (2 ч; 2 ч; 4 ч)

XII. Применение производной к исследованию функций (12 ч; 16 ч; 14 ч)

Признак возрастания (убывания) функции (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Критические точки функции, максимумы и минимумы (3 ч; 3 ч; 3 ч)

Примеры применения производной к исследованию функции (3 ч; 4 ч; 3 ч)

Наибольшее и наименьшее значения функции (2 ч; 4 ч; 4 ч)

Контрольная работа № 6 (1 ч; 1 ч; 1 ч)

Итоговое повторение (7 ч; 9 ч; 10 ч)

Поурочные разработки

I полугодие

Глава I
Тригонометрические функции

§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента

Уроки 1–2. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс (повторение)

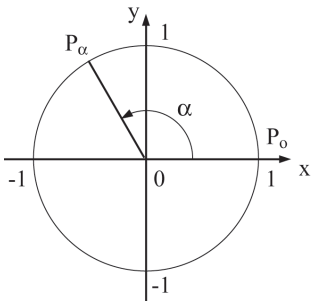
Цель: напомнить о радианной мере углов и основных тригонометрических функциях.

Ход урока

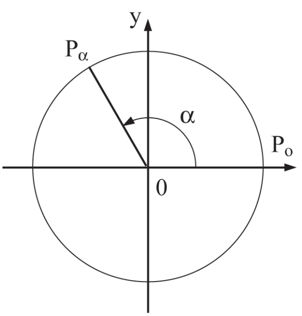
I. Сообщение темы и цели урока

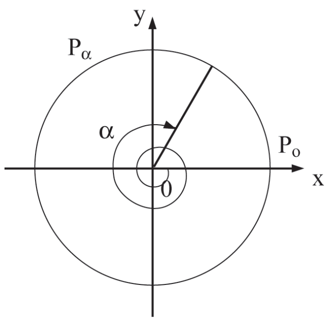
II. Повторение материала 9 класса

Обычно углы в геометрии рассматриваются при пересечении прямых, в многоугольниках (в частности, в треугольниках). При этом рассматриваемые **углы** составляют **менее 360º**. В физике (для колебательных, волновых и других процессов) приходится учитывать углы и больше 360º. Поэтому возникает **понятие обобщенного угла**.



Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат, которую называют **единичной окружностью**. Возьмем точку P_o (1; 0). Сместим эту точку по окружности, получим точку P_α. При этом смещение может происходить и по часовой стрелке, и против часовой стрелки на любую величину (как меньше одного оборота, так и больше одного оборота). Будем считать $\angle P_oOP_\alpha$ **обобщенным углом** (**или** просто **углом**) α. Углы, полученные поворотом точки P_o против часовой стрелки, считаются **положительными**, по часовой стрелке – **отрицательными**. Принято указывать направление поворота стрелкой и в случае более одного оборота – число оборотов. Например, на рисунке показаны положительный (а) и отрицательный (б) углы.





а) $\angle\alpha = 135° = \frac{3\pi}{4}$; б) $\angle\alpha = -675° = -\frac{15\pi}{4}$.

В тригонометрии величины углов, как правило, измеряются **в радианах** и значительно реже в градусах. При этом за угол в 1 радиан (1 рад; слово «рад» обычно не пишут) принимают **центральный угол**, опирающийся **на дугу** окружности длиной, **равной радиусу** окружности; за угол в 1 градус (1°) – **центральный угол**, опирающийся **на дугу** окружности длиной, **равной** $\frac{1}{360}$ **длины окружности**. Поэтому между радианной и градусной мерой существует простое соотношение: 2π = 360° или π = 180°. Тогда $1\ (\text{рад}) = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ =$

$$= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx \left(\frac{180}{3{,}14}\right)^\circ \approx 57° \text{ и } 1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx \frac{3{,}14}{180°} \approx 0{,}017\ \ (\text{рад}).$$

Пример 1

Записать в других единицах измерения углы:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, б) $\alpha = -\frac{7\pi}{3}$, в) $\alpha = 210^\circ$, г) $\alpha = -405^\circ$.

Учтем, что 1 (рад) = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. Тогда получаем:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 150^\circ$;

б) $\alpha = -\frac{7\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = -420^\circ$.

Учтем, что $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (рад). Тогда имеем:

в) $\alpha = 210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ (рад);

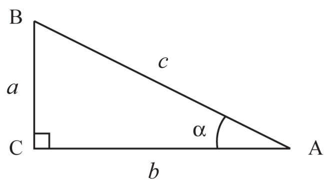
г) $\alpha = -405^\circ = -405 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{9\pi}{4}$ (рад).

В частности на последнем рисунке приведены углы:

а) $\alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, б) $\alpha = -675^\circ = -\frac{15\pi}{4}$.

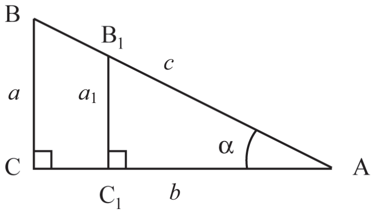
Заметим, что использование **радианной меры** углов обусловлено, в частности, более простой записью ряда формул. Для окружности радиуса R длина l ее дуги в α радиан вычисляется по формуле $l = \alpha R$. Если дуга содержит n°, то аналогичная формула имеет вид $l = \frac{\pi R n}{180}$. Также площадь S сектора круга радиуса R, дуга которого содержит α радиан, вычисляется по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2}$. Если дуга содержит n°, то аналогичная формула имеет вид $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

Теперь напомним определения основных тригонометрических функций, введенные в курсе геометрии.



Рассмотрим **прямоугольный треугольник** ABC с катетами a и b и гипотенузой c, с острым углом α. Тогда: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе); $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе); $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему катету); $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему катету).

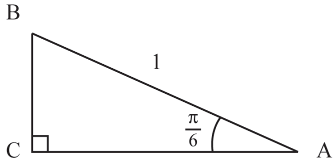
Для данного угла α отношения $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ **не зависят** от величин a, b и c.



Действительно, рассмотрим два подобных прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1 с общим острым углом α, катетами $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$ и гипотенузами $AB = c$, $AB_1 = c_1$. По определению синуса из этих треугольников имеем: $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ и $\sin\alpha = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{a_1}{c_1}$. Но с другой стороны из подобия треугольников получаем $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$ или $\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$. Поэтому отношения $\frac{a}{c}$ и $\frac{a_1}{c_1}$ не зависят от величин a, c, a_1, c_1 и **зависят** только **от величины угла** α. Следовательно, $\sin\alpha$ (как и остальные значения $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) являются **функциями угла** α.

Пример 2

Найдем значения тригонометрических функций угла $\frac{\pi}{6}$.



Так как тригонометрические функции угла не зависят от сторон треугольника, то рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 1$ и острым углом $\angle A = \frac{\pi}{6} = 30°$. В таком треугольнике $BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$. Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь легко найти все тригонометрические функции: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$.

Для любого угла приближенные **значения** основных тригонометрических **функций** находятся **с помощью калькулятора или таблиц**. **Для некоторых углов** можно найти и **точные значения** тригонометрических **функций**, аналогично примеру 2. Эти значения приведены в таблице. Символ «–» в таблице означает, что данная функция при этом значении аргумента не определена (не существует).

Аргумент α	Функция			
	sin α	cos α	tg α	ctg α
$0^{o} = 0$	0	1	0	–
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

Заметим, что достаточно помнить только **первые три строки** этой таблицы. Используя **свойства тригонометрических функций** и **формулы приведения** (см. следующие уроки), можно **находить значения тригонометрических функций и для других углов**, связанных с углами 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$.

Пример 3

Вычислить, используя приведенную таблицу:

а) $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30^\circ =$

$$= 1^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

б) $\dfrac{3\sin\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}}{5\operatorname{tg}0 - 6\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 + \frac{1}{2}}{5\cdot 0 - 6\cdot 1} = \dfrac{0}{-6} = 0.$

в) $1 + \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^3\frac{\pi}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

(учтено, что слагаемые образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

Пример 4

Известно, что $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$.

Найти $A = \dfrac{3\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$.

Найдем связь между $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, используя условие задачи: $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$ или $\sin\alpha + \cos\alpha = 2\sin\alpha - 4\cos\alpha$ или $5\cos\alpha = \sin\alpha$.

Подставим $\sin\alpha$ в выражение A:

$$A = \frac{3(5\cos\alpha)^2 - (5\cos\alpha)\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(5\cos\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha} = \frac{75\cos^2\alpha - 5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{25\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{71\cos^2\alpha}{27\cos^2\alpha} = \frac{71}{27}.$$

Заметим, что полученный ответ справедлив при $\cos\alpha \neq 0$. Однако $\cos\alpha$ не может равняться нулю, так как это противоречит условию задачи. Действительно, если $\cos\alpha = 0$, то выражение $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha} = 2$ имеет вид $\dfrac{\sin\alpha + 0}{\sin\alpha - 2\cdot 0} = 2$ или 1 = 2. Так как это неравенство неверное, то $\cos\alpha \neq 0$.

III. Задание на уроке

№ 1 (а, б); 2 (в, г); 3 (а, б); 18 (а, б); 19 (а); 20 (б).

IV. Контрольные вопросы

1. Как строится угол на единичной окружности?
2. Дайте определение 1 радиана и 1°.
3. Какая связь между радианной и градусной мерами угла?
4. Дайте определение основных тригонометрических функций.

V. Задание на дом

№ 1 (в, г); 2 (а, б); 3 (в, г); 18 (в, г); 19 (б); 20 (а).

VI. Творческие задания

1. Вычислите:

а) $1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \ldots$; б) $1 + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6} + \ldots$;

в) $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^4\dfrac{\pi}{6} + \sin^6\dfrac{\pi}{6} + \ldots$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}^5\dfrac{\pi}{3} + \ldots$.

Ответы: а) 2; б) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{1}{3}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha} = \dfrac{7}{8}$.

Найти $\dfrac{3\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}$.

3. Известно, что $\dfrac{\sin\alpha + 5\cos\alpha}{2\sin\alpha + 3\cos\alpha} = \dfrac{11}{8}$.

Найти $\dfrac{2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha}$.

Ответы: 2) $\dfrac{22}{27}$; 3) $\dfrac{20}{17}$.

VII. Подведение итогов урока