Содержание

Глава 3 Теоремы математики, которые вы изучали в школе

Глава 4 Теоремы математики, которые полезно знать

Глава 5 Решаем задачи с помощью математической теоремы

Глава 6 Повседневная жизнь и математика

Предисловие

В наши дни математика находится в центре внимания! И не только в Японии, но и в Америке, Европе и остальных странах мира отмечают важность изучения данной науки.

Центр исследования и реформирования, принадлежащий ОЭСР, проводит исследования не только математики, но и других разнообразных предметов. ОЭСР (OECD) – это аббревиатура международной Организации экономического сотрудничества и развития, получившей известность в Японии благодаря программе PISA (Programme for International Student Assessment – Международной программе по оценке образовательных достижений учащихся), которую ОЭСР начала проводить в 2000 г. Программа оценивает уровень знаний 15-летних учащихся из стран – членов ОЭСР. Способности оцениваются главным образом в трёх областях: математическая грамотность, грамотность чтения и естественно-научная грамотность. В тестах много межпредметных задач. Имеются и такие, для решения которых недостаточно простого заучивания наизусть учебного материала. Математические задачи тестов PISA оказались в центре внимания потому, что при их составлении учитываются запросы современного общества; во многих задачах важное значение придаётся процессу решения, идеям и подходам, используемым при поиске ответа. Не будет преувеличением сказать, что именно это послужило поводом к изменению содержания учебников по математике для младшей и средней школ. А раз поменялись учебники, то и изменения в задачах, задаваемых ученикам в средней школе или абитуриентам на вступительных экзаменах, – лишь вопрос времени. Содержание и принципы изучения математики как предмета сильно изменились за несколько десятилетий: люди, которым сейчас за 30 и за 40, учились по другой методике.

Кроме того, не забывайте о том, что с 2020 г. начнут последовательно вводиться новые учебники для младшей и средней школ, в которых будут использоваться совершенно иные подходы к изучению арифметики и математики. Теперь уже недостаточно будет только произвести вычисления и дать ответ, – потребуется также объяснение решения. И ученики должны обсуждать между собой или излагать в письменной форме пошаговый процесс нахождения ответа.

Подобные нововведения обусловлены тем, что обучение в таком формате развивает способности к логическому мышлению, решению разнообразных задач.

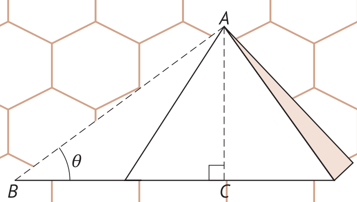
С учётом того что мы живём в эпоху информационных технологий, в начальной школе появятся уроки информатики, однако цель не в том, чтобы воспитать будущих программистов, а в том, чтобы развить у детей способности находить алгоритмы решения поставленных задач. Можно с уверенностью сказать, что умение решать задачи, встающие перед нами в жизни, является одной из важнейших способностей, имеющих общественную значимость.

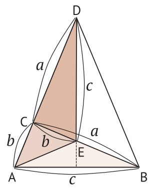
На уроках математики в средней школе изучаются теоремы. Знаете ли вы теорему Пифагора? А если да, то помните ли вы, как вам преподавали её доказательство? Должно быть, её доказывали, основываясь на очевидных фактах и убеждаясь в них. Книгу, которую вы держите в руках, по праву можно назвать беседой о теоремах математики. Как вы знаете, математику с давних времён называли «гимнастикой ума». Математика, как и программирование, – предмет, который развивает у учащихся способность мыслить логически. В наши дни благодаря программе PISA, осуществляемой ОЭСР, во всём мире возродился интерес к математике, в особенности к доказательству теорем. Наступила эпоха, когда теоремы математики способны принести ощутимую пользу с точки зрения жизни в современном хаотичном мире. Я убеждён в том, что теоремы математики послужат во благо многим, а не только небольшому количеству увлечённых. Уверен, что осознание практической пользы математики и применение её подходов в жизни позволят вам значительно расширить свои горизонты.

Апрель 2018 г.
Комияма Хирохито

Пролог

Основные сведения о теоремах и проблемах





Что же это такое – теоремы математики?

«Теоремой» называют утверждение, выведенное, например, из аксиом, определений, верность которых доказана. Особенностью теорем является то, что их используют в качестве обоснования при доказательстве числовых формул, а также в качестве фундаментальных идей, лежащих в основе математических рассуждений. Весьма важной является простота практического использования теоремы.

Но бывает и так, что конечным результатом, к которому стремятся, оказывается доказательство теоремы.

Другими словами, доказательство теоремы – высшая цель математических размышлений. По этой причине в отношении красоты к теоремам предъявляются повышенные требования.

При изучении теорем нам иногда встречается сочетание «проблема, или гипотеза, кого-либо». Дело в том, что в математике существует несколько так называемых «проблем кого-либо». Данное выражение означает, что этот «кто-либо» сделал предположение, которое ещё не доказано, и **теоремой оно будет называться только после того, как его докажут**.

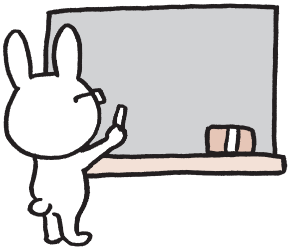
Среди знаменитых проблем есть, например, проблема Гольдбаха, проблема Ферма и другие. Гольдбах, Ферма высказали предположения, но доказать их ещё никому не удалось (теорема Ферма была доказана в 1995 г.).

Хотя сами по себе утверждения вовсе не сложны, но по причине трудности доказательства математики всего мира многие десятки лет мучатся в попытках доказать их. Хотя не так давно были проведены компьютерные вычисления, касающиеся проблемы Гольдбаха, которые показали высокую вероятность правильности этого утверждения, но доказать её пока не удалось никому.

Теоремы – это высшая цель математических размышлений.

Что такое теорема?

Выводится из аксиом, определений и т. п. → Утверждение, верность которого доказана



Особенности теорем

В качестве фундаментальных идей математики они просты в применении и практическом использовании. Могут также являться высшей целью математических рассуждений

Что такое проблема?

Проблема Гольдбаха

Любое чётное число начиная с 4 можно представить в виде суммы двух простых чисел.
Например:
4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 3 + 7

Простые числа

Натуральные числа, которые делятся только на 1 и на самих себя (при этом 1 простым числом не считается):

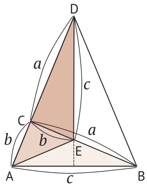
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43...

Существование бесконечного множества простых чисел доказано Евклидом (древнегреческим математиком)

Великая теорема Ферма

$X^n = Y^n + Z^n$ $(n \geqslant 3)$

«Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует».



Теорема Пифагора и великая теорема Ферма

Услышав слово «теорема», многие наверняка вспомнят общеизвестную теорему Пифагора, которую изучают в средней школе.

Если в прямоугольном треугольнике с прямым углом $\angle C$ обозначить два катета как a, b и гипотенузу как c, то их соотношение может быть выражено как $a^n = b^n + c^n$ ($n = 2$).

Теперь давайте рассмотрим теорему, которая является развитием теоремы Пифагора.

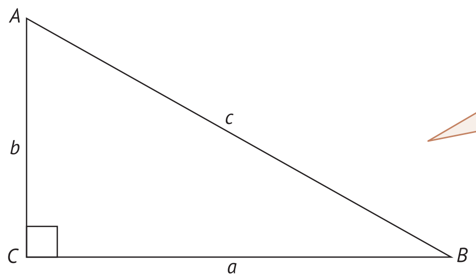
Речь идёт о [$X^n + Y^n = Z^n$ ($n \geqslant 3$) «Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует»]. Это уравнение называют «великой теоремой Ферма». Если смотреть только на уравнение, то может показаться, что оно ничем не отличается от теоремы Пифагора.

Хотя понимание смысла математических задач иногда требует знаний высокого уровня, особенность этой проблемы Ферма заключается в том, что её формулировку можно осознать, даже не обладая глубокими познаниями в математике, – она может даже показаться слишком простой.

Сам Ферма доказал теорему для $n = 4$, но доказательство для общего случая опубликовано не было. При этом Ферма оставил на полях книги по математике запись следующего содержания: «*Я обнаружил удивительное доказательство этой теоремы, но для его изложения поля этой книги слишком узки*». Хотя уравнение великой теоремы Ферма напоминает теорему Пифагора, в действительности их содержание сильно отличается друг от друга.

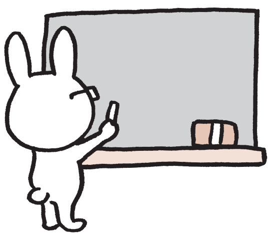
Великая теорема Ферма была доказана в 1995 г.

Теорема Пифагора



Если в прямоугольном треугольнике с прямым углом $\angle C$ обозначить два катета как a, b и гипотенузу как c, то их соотношение может быть выражено как $a^n = b^n + c^n$ $(n = 2)$

Великая теорема Ферма



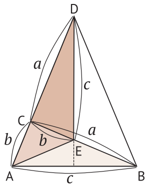
Развитие и обобщение теоремы Пифагора:

$X^n + Y^n = Z^n$ $(n \geqslant 3)$.

Для натуральных чисел n, больших 2, натуральных чисел X, Y, Z, удовлетворяющих указанному уравнению, не существует

Ферма оставил на полях книги по математике следующую запись: «*Я нашёл этому [утверждению] поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него*»

Считается, что англичанин Эндрю Уайлс, доказавший великую теорему Ферма примерно через 360 лет (в 1995 г.), впервые прочитал об этой проблеме в библиотеке, когда ему было 10 лет



Узнаём про «королеву теорем» – теорему Пифагора

Итак, давайте поговорим о теоремах более конкретно.

Теорема Пифагора, о которой я рассказывал в предыдущем разделе, является широко известной теоремой элементарной (евклидовой) геометрии – её, наверное, можно назвать «королевой теорем».

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом $\angle C$ выполняется следующее соотношение:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2.$$

Верно и обратное: если в треугольнике ABC выполняется вышеприведённое соотношение, то его угол $\angle C$ является прямым.

Начиная с эпохи Древнего Египта теорема Пифагора использовалась в качестве метода измерения площади земель.

Для измерения площади земель в землю вбивались колья, и, например, между ними натягивались верёвки.

Говорят, что Пифагор придумал доказательство своей теоремы, когда разглядывал узор плитки, которой был выложен пол в древнегреческом храме.

Принято считать, что в общем случае условием «хорошей теоремы» является наличие множества методов её доказательства.

Считается, что для теоремы Пифагора существует не менее 100 методов доказательства.

Из всех этих методов здесь я приведу только два самых знаменитых, а тем из вас, кто заинтересовался, рекомендую самостоятельно попробовать доказать её другими методами.

Теорема Пифагора была открыта примерно 2500 лет назад.

Доказательство теоремы Пифагора

Так как длина одной из сторон большого квадрата, изображённого ниже, равна $b + c$, то площадь этого квадрата будет равна $(b + c)^2$. Кроме того, большой квадрат состоит из четырёх прямоугольных треугольников с длиной основания b, высотой c и одного малого квадрата с длиной стороны a, поэтому площадь большого квадрата можно выразить как

$$4 \times (bc/2) + a^2.$$

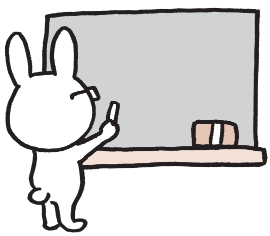
Следовательно,

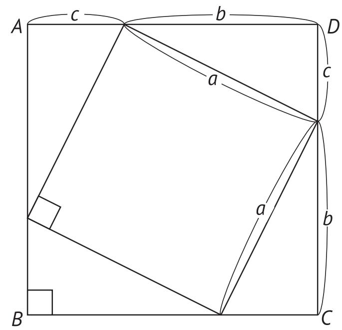
$$(b + c)^2 = 4 \times (bc/2) + a^2;$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2,$$

то есть

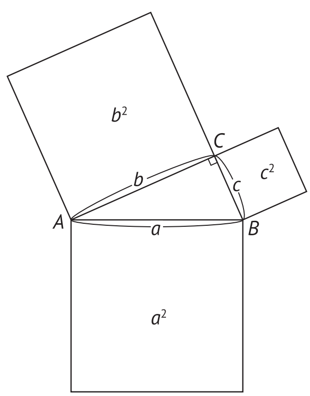
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

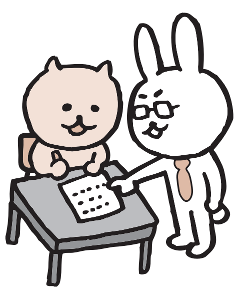
что и требовалось доказать.

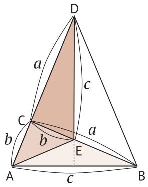




Теорема Пифагора $a^2 = b^2 + c^2$ может быть представлена следующим образом. Пусть $\triangle ABC$ – прямоугольный треугольник с прямым углом $\angle C$. Площадь квадрата, одна из сторон которого является гипотенузой a, будет равна сумме площадей квадрата со стороной a и квадрата со стороной c.







Теоремы математики, активно используемые в нашей жизни

Хотя сложность теорем математики у всех на слуху, гораздо меньше людей знает о том, каким образом эти теоремы в нашей жизни используются на практике. Можно сказать, что многими привычными благами мы в действительности обязаны им, хотя даже не замечаем столь очевидного факта.

Например, теорема Пифагора, которая из всех теорем наиболее нам знакома, широко используется для измерения расстояний. В качестве немного более сложной области её применения можно назвать измерение скоростей, с которыми спутники запускаются в космос. В этом случае нам достаточно вычислить, какой должна быть параллельная поверхности Земли составляющая скорости движения спутника, чтобы он вышел на околоземную орбиту, не падая на Землю и не покидая её. С помощью теоремы Пифагора можно вычислить эту скорость – сколько километров должен пролетать спутник за 1 с.

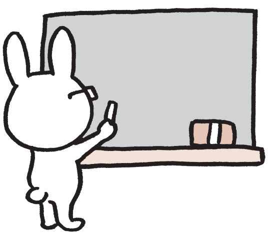
Для измерения площади земельных участков используется теорема синусов, а измерить расстояние между двумя точками при наличии между ними препятствий позволяет теорема косинусов. Дело в том, что непосредственно измерить расстояние между двумя точками A и B будет невозможно, если между ними находятся препятствия: здания, горы, реки и т. п. В этом случае мы можем построить треугольник, выбрав точку C, открытую как со стороны A, так и B, и найти искомое расстояние по теореме косинусов.

Стоит сказать также о такой незаменимой для нас вещи, как мобильный телефон. Чтобы **предотвратить взаимные помехи в системах мобильной радиотелефонной связи, зоны радиопокрытия обозначают разными цветами и выбирают их так, чтобы в смежных зонах не находились опорные станции, работающие на одинаковых частотах.** Для чего и используется теорема о четырёх красках.

Теоремы математики тесно связаны с нашей повседневной жизнью.

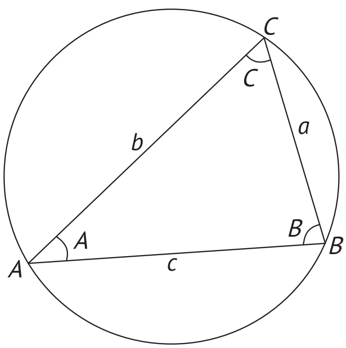
Теоремы математики, прочно вошедшие в нашу жизнь

Теорема Пифагора	=	позволяет находить расстояния, скорости движения и т. п.
Теорема синусов	=	используется для измерения земельных участков
Теорема косинусов	=	позволяет измерить расстояние между двумя точками при наличии препятствий



Теоремы математики играют в жизни незаменимую роль. Без них невозможна деятельность во многих важных областях, хотя мы этого не знаем и не замечаем

Теорема синусов



R – радиус окружности, описанной вокруг ΔABC:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(подробнее см. на с. 22).

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(подробнее см. на с. 24).

Теоремы математики используются также, например, и для выбора зон радиопокрытия опорных станций мобильной связи, построения графиков, составления карт местности (подробнее см. в главе 2)

Многократное умножение на 2 даёт умопомрачительный результат

Тоётоми Хидэёси однажды спросил у своего служащего Сорори Синдзаэмона (основателя жанра ракуго), что бы тот хотел получить в награду за свои заслуги.

«В награду за твои заслуги дам тебе то, что ты пожелаешь. Скажи мне, что ты хочешь?»

Синдзаэмон, как следует подумав, ответил:

– Половина этого зала состоит из сотни татами. На первое татами положите 1 рисовое зерно, на следующее – в 2 раза больше, то есть 2, на следующее – опять в 2 раза больше, то есть 4, и продолжайте поступать так, пока не закончатся все татами. Я хотел бы получить все рисовые зерна, выложенные таким способом.

– Всего-навсего? Если бы ты попросил класть мешками, тогда получилось бы действительно много, – уточнил Хидэёси с усмешкой.

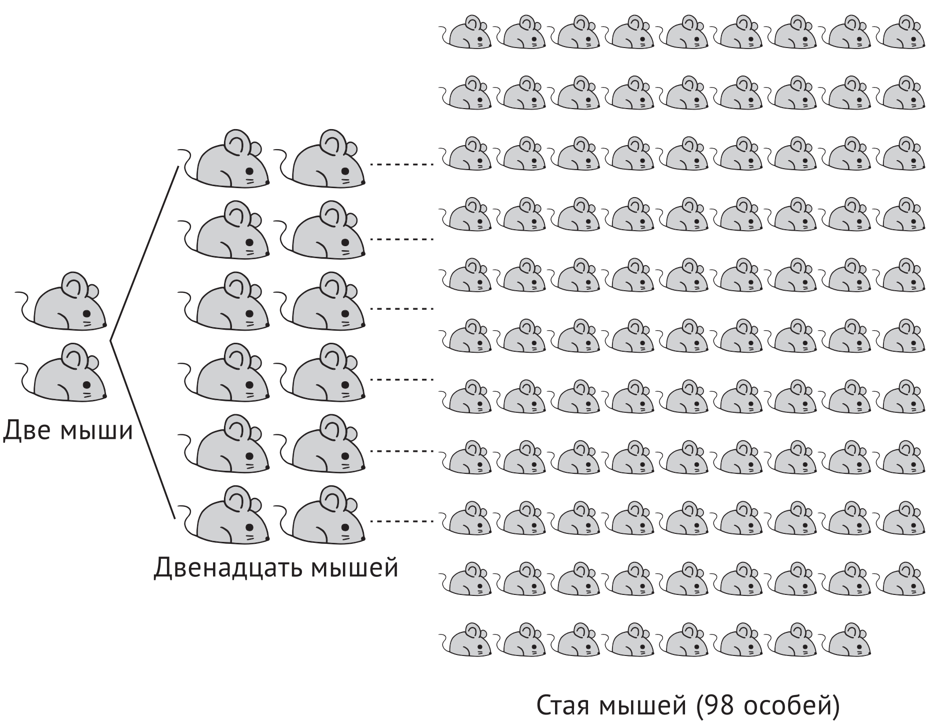
Хидэёси размышлял так: «Пусть в этом зале целых 100 татами, но если считать по зёрнам, то вряд ли наберётся больше 10–30 мешков».

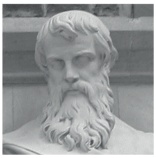
И он поручил своему служащему произвести расчёты. До пятого, шестого… восьмого татами риса получилось действительно мало – всего какая-то пригоршня (256 зёрен) риса, однако начиная примерно с 30-го татами количество стало резко возрастать, достигнув уже порядка 2000 мешков. Конечно, для Хидэёси дать и такое количество было не проблемой, но когда расчёты дошли до сотого татами, даже сам Хидэёси испугался: ведь результат составил 525 000 000 000 000 000 000 000 000 мешков, что намного превышало количество риса, выращенного за всю историю человечества, не говоря уже о том количестве, которое можно было собрать со всей Японии.

Даже единица даст умопомрачительное число, если её 100 раз умножить на 2!

Хидэёси извинился перед Синдзаэмоном за свою неспособность подарить последнему так много риса. Эта притча позволяет прочувствовать умопомрачительные масштабы многократного умножения на 2. Кроме того, в учебнике по математике «Дзинкоки» (Jinkouki), изданном в 1627 г. математиком по имени Ёсида Мицуёси, содержалась следующая задача: «На Новый год семейная пара мышей родила 12 мышат. В феврале эти 14 мышей спарились между собой и опять родили мышат, и стало всего 98 мышей, включая и детей, и родителей. Если они будут размножаться так каждый месяц, то сколько всего будет мышей в декабре?» В вышеуказанной книге приведён также и ответ – 27 682 574 402 мыши (2×7^{12}).

Мы думали, что мышей всего 2...





Древнегреческий математик Евклид

(330–275 гг. до н. э.)

* Даты не являются достоверными

Геометрия, которую мы изучаем в школе, называется «евклидовой геометрией». Евклид – это имя ученого, ставшее именем нарицательным всей древнегреческой математики.

Евклид систематизировал математические знания в своём сочинении «Начала», которое вот уже на протяжении более 2000 лет является бестселлером, следующим по популярности за Библией. Однако абсолютно ничего не известно о том, что за человеком был Евклид.

Платон основал в роще Академия философскую школу и, работая в ней, создал основы математики, а Евклид, основываясь на его идеях, написал свои «Начала», которые являются учебником и самой первой книгой по евклидовой геометрии. Когда Евклид, используя свои «Начала», содержащие 9 аксиом и 5 постулатов, читал лекции по геометрии царю Египта Птолемею I (367–283 гг. до н. э.), последний спросил у Евклида, нельзя ли освоить геометрию, не изучая «Начал», на что Евклид ответил так: «В геометрии нет царских путей». Другими словами, в учёбе даже для царей не бывает поблажек.

По другой легенде, когда один юноша спросил у Евклида о том, какая ему будет выгода от изучения столь сложной науки, Евклид позвал своего слугу и приказал ему: «Дай этому юноше денег. Он, похоже, считает учёбу чем-то, что должно приносить выгоду».

Глава 1

Знаменитые теоремы математики