
Содержание

От издательства	12
Предисловие к третьему изданию	13
Предисловие ко второму изданию	15
Предисловие к первому изданию	17
Об авторе	19
Глава 1. Обзор темы	20
1.0 Хаос, фракталы и динамика	20
1.1 Краткая история динамики.....	21
1.2 Почему так важна нелинейность	24
Неавтономные системы	27
Почему нелинейные задачи настолько сложны?.....	28
1.3 Мир с точки зрения динамики.....	28
Часть I. ОДНОМЕРНЫЕ ПОТОКИ	32
Глава 2. Поток на прямой	33
2.0 Введение	33
2.1 Геометрический подход к решению	34
2.2 Неподвижные точки и устойчивость	36
2.3 Рост популяции организмов	40
Критика логистической модели.....	42
2.4 Линейный анализ устойчивости.....	43
2.5 Существование и единственность	46
2.6 Невозможность колебаний.....	48
Механический аналог: сильно затухающие системы	49
2.7 Потенциалы.....	50
2.8 Решение уравнений на компьютере.....	52
Метод Эйлера	52
Улучшенный метод Эйлера	53
Практические вопросы.....	55
Упражнения к главе 2	56
Глава 3. Бифуркации	68
3.0 Введение	68
3.1 Седлоузловая бифуркация	69
Графические обозначения.....	69

	Терминология.....	71
	Нормальные формы.....	73
3.2	Закритическая бифуркация	74
3.3	Лазерный порог.....	77
	Физические основы	77
	Модель	78
3.4	Вилочная бифуркация	80
	Сверхкритическая вилочная бифуркация.....	80
	Докритическая вилочная бифуркация	83
	Терминология.....	85
3.5	Бусина с сильным затуханием на вращающемся обруче	86
	Анализ системы первого порядка	87
	Анализ методом размерностей и масштабирование.....	89
	Парадокс	91
	Анализ фазовой плоскости	92
	Сингулярный предел	94
3.6	Несовершенные бифуркации и катастрофы.....	94
	Бусина на наклонной струне.....	98
3.7	Вспышка популяции насекомых.....	99
	Модель	99
	Безразмерная форма	100
	Анализ неподвижных точек.....	101
	Расчет бифуркационных кривых.....	103
	Сравнение с наблюдениями.....	104
	Упражнения к главе 3	106
Глава 4. Потoki на окружности		123
4.0	Введение	123
4.1	Примеры и определения	124
4.2	Однородный осциллятор.....	125
4.3	Неоднородный осциллятор.....	126
	Векторные поля.....	127
	Период колебаний.....	128
	Призраки и узкие места	129
4.4	Сильно затухающий маятник	131
4.5	Светлячки	134
	Модель	134
	Анализ.....	135
4.6	Сверхпроводящие джозефсоновские переходы	137
	Физические основы	138
	Соотношения Джозефсона	139
	Эквивалентная схема и аналог маятника	139
	Типичные значения параметров	141
	Безразмерная формулировка.....	141
	Упражнения к главе 4	144
Часть II. ДВУХМЕРНЫЕ ПОТОКИ		151

Глава 5. Линейные системы	152
5.0 Введение	152
5.1 Определения и примеры	152
Терминология стабильности	157
5.2 Классификация линейных систем	158
Классификация неподвижных точек	166
5.3 Динамика любовных отношений	167
Упражнения к главе 5	170
Глава 6. Фазовая плоскость	175
6.0 Введение	175
6.1 Фазовые портреты	175
Численный расчет фазовых портретов	176
6.2 Существование, уникальность и топологические последствия	178
6.3 Неподвижные точки и линеаризация	180
Линеаризованная система	180
Эффект малых нелинейных членов	181
Гиперболические неподвижные точки, топологическая эквивалентность и структурная устойчивость	185
6.4 Кролики против овец	186
6.5 Консервативные системы	190
Нелинейные центры	194
6.6 Обратимые системы	195
6.7 Маятник	200
Цилиндрическое фазовое пространство	202
Затухание	204
6.8 Теория индекса	205
Индекс замкнутой кривой	206
Свойства индекса	209
Индекс точки	210
Упражнения к главе 6	213
Глава 7. Предельные циклы	233
7.0 Введение	233
7.1 Примеры	234
7.2 Исключение замкнутых орбит	237
Градиентные системы	237
Функции Ляпунова	238
Критерий Дюлака	239
7.3 Теорема Пуанкаре–Бендиксона	240
О невозможности хаоса в фазовой плоскости	246
7.4 Системы Льенара	248
7.5 Релаксационные колебания	249
7.6 Слабо нелинейные осцилляторы	252
Регулярная теория возмущений и ее неудача	253
Метод двойственного времени	256
Усредненные уравнения	260

Применимость метода двойственного времени	265
Упражнения к главе 7	265
Глава 8. Еще раз о бифуркациях	281
8.0 Введение	281
8.1 Седлоузловая, закритическая и вилочная бифуркации	281
Седлоузловая бифуркация	282
Закритические и вилочные бифуркации	286
8.2 Бифуркации Хопфа	289
Сверхкритическая бифуркация Хопфа.....	290
Эмпирические правила	291
Докритическая бифуркация Хопфа	292
Докритическая, сверхкритическая или вырожденная бифуркация?	293
8.3 Осциллирующие химические реакции	295
«Якобы сделанное открытие» Белоусова	295
Реакция диоксида хлора, йода и малоновой кислоты.....	296
8.4 Глобальные бифуркации циклов	301
Седлоузловая бифуркация циклов	301
Бифуркация с бесконечным периодом	302
Гомоклиническая бифуркация.....	303
Законы масштабирования.....	305
8.5 Гистерезис ведомого маятника и джозефсоновского перехода	306
Основные уравнения	307
Неподвижные точки	307
Существование замкнутой орбиты	308
Единственность предельного цикла.....	310
Гомоклиническая бифуркация.....	311
Гистерезисная вольт-амперная характеристика	314
8.6 Связанные осцилляторы и квазипериодичность	315
Несвязанная система	316
Связанная система.....	318
8.7 Отображения Пуанкаре	320
Линейная устойчивость периодических орбит	323
Упражнения к главе 8	326
Часть III. ХАОС	349
Глава 9. Уравнения Лоренца	350
9.0 Введение	350
9.1 Хаотическое водяное колесо	351
Обозначения	353
Сохранение массы.....	354
Баланс крутящего момента	356
Амплитудные уравнения.....	357
Неподвижные точки	359
9.2 Простые свойства уравнений Лоренца	360
Нелинейность.....	361
Симметрия	361

Сокращение объема	361
Неподвижные точки	363
Линейная устойчивость начала координат.....	364
Глобальная устойчивость начала координат	364
Устойчивость C^+ и C^-	365
9.3 Хаос на странном аттракторе	367
Экспоненциальное расхождение соседних траекторий.....	370
Определение хаоса	372
Определение аттрактора и странного аттрактора	373
9.4 Отображение Лоренца.....	375
Исключение стабильных предельных циклов	377
9.5 Исследование пространства параметров.....	379
9.6 Использование хаоса для отправки секретных сообщений	384
Демонстрация Куомо	384
Доказательство возможности синхронизации	387
Упражнения к главе 9	390
Глава 10. Одномерные отображения	398
10.0 Введение	398
10.1 неподвижные точки и метод паутины.....	399
Уточнение терминологии.....	399
Неподвижные точки и линейная устойчивость.....	400
Паутина.....	400
10.2 Логистическое отображение: числовой подход.....	403
Удвоение периода	403
Хаос и периодические окна	405
10.3 Логистическое отображение: аналитический подход.....	407
10.4 Периодические окна	411
Прерывистость	413
Удвоение периода в окне.....	415
10.5 Показатель Ляпунова.....	416
10.6 Универсальность и эксперименты	419
Качественная универсальность: U-последовательность.....	420
Количественная универсальность	422
Экспериментальные проверки	424
Как одномерные отображения связаны с наукой?	426
10.7 Перенормировка	429
Перенормировка простыми словами	433
Упражнения к главе 10	437
Глава 11. Фракталы.....	449
11.0 Введение	449
11.1 Счетные и несчетные множества.....	450
11.2 Множество Кантора	452
Фрактальные свойства множества Кантора.....	453
11.3 Размерность самоподобных фракталов	455
Парадокс	456

Измерение сходства.....	457
Более общие множества Кантора.....	458
11.4 Блочная размерность.....	459
Определение блочной размерности.....	460
Критика блочной размерности.....	461
11.5 Поточечные и корреляционные размерности.....	462
Мультифракталы.....	466
Упражнения к главе 11.....	467
Глава 12. Странные аттракторы.....	473
12.0 Введение.....	473
12.1 Простейшие примеры.....	473
Изготовление слоеного теста.....	474
Терминология.....	475
Важность диссипации.....	478
12.2 Отображение Эно.....	479
Элементарные свойства отображения Эно.....	480
Выбор параметров.....	482
Странный аттрактор под увеличительным стеклом.....	483
Неустойчивое многообразие седловой точки.....	484
12.3 Система Рёсслера.....	485
12.4 Химический хаос и реконструкция аттрактора.....	487
Комментарии к реконструкции аттрактора.....	491
12.5 Вынужденный двухъямный осциллятор.....	493
Магнитоупругая механическая система.....	493
Двухъямный аналог.....	494
Модель и симуляции.....	495
Переходный хаос.....	498
Границы фрактального бассейна.....	498
Упражнения к главе 12.....	499
Часть IV. Коллективное поведение.....	506
Глава 13. Модель Курамото.....	507
13.0 Введение.....	507
13.1 Определяющие уравнения.....	508
13.2 Визуализация и параметр порядка.....	511
Комплексный параметр порядка.....	512
Зависимость параметра порядка от времени.....	514
Смелая догадка.....	515
13.3 Связь среднего поля и вращающаяся система координат.....	516
Перепишите член связи, используя r и Ψ	516
Просмотр динамики во вращающейся системе координат.....	517
13.4 Устойчивое состояние.....	519
Запертые осцилляторы.....	520
Дрейфующие осцилляторы.....	521
Загадка дрейфующих осцилляторов.....	522
Стационарное распределение дрейфующих осцилляторов.....	522

13.5	Самосогласованность.....	524
	Вклад запертых осцилляторов	524
	Вклад дрейфующих осцилляторов	525
	Решения уравнения самосогласованности	527
	Порог запираия.....	530
13.6	Оставшиеся вопросы	530
	Прощальное слово	531
	Упражнения к главе 13	531
	Ответы на некоторые упражнения	550
	Библиография.....	560
	Предметный указатель.....	575

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkipress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkipress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkipress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkipress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkipress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkipress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие к третьему изданию

Приветствую читателей на страницах третьего издания книги «Нелинейная динамика и хаос», которое по-прежнему охватывает приложения в физике, биологии, химии и технике (и это лишь начало).

С момента выхода первого издания минуло 30 лет, и пришло время немного доработать эту книгу. Самым большим изменением является совершенно новая глава 13, посвященная модели Курамото.

Модель Курамото – символ нелинейной динамики. Эта элегантная модель, предложенная в 1975 г. японским физиком Ёсики Курамото, является одним из редких примеров многомерной нелинейной системы, которую можно решить элементарными средствами. Она описывает огромную систему осцилляторов, отражающую биологические явления, такие как мозговые волны, циркадные ритмы, синхронизированное мигание светлячков и скоординированная активация клеток кардиостимулятором. Изначально связанная с биологией, со временем модель Курамото стала универсальным инструментом многих других дисциплин, от математики и физики до медицины и теории управления. Например, для ее анализа применяются базовые понятия статистической механики, так что начинающие физики найдут здесь много интересного (и, как всегда в этой книге, я не ожидаю от читателя каких-либо предварительных знаний в области статмеханики или любого другого узкого предмета; все объяснения будут даны по ходу дела). С математической точки зрения модель Курамото представляет собой прекрасную головоломку, на удивление разрешимую, но все же полную загадок.

Глава 13 содержит вводное описание модели Курамото, предназначенное для студентов. Чтобы привлечь новичков (я имею в виду как студентов, так и преподавателей!), я дополнил главу множеством примеров, упражнений и образных объяснений, а также тщательно подобранными ссылками на обширные публикации по этой модели за последние 50 лет.

Модель Курамото представляется мне наиболее подходящей на роль краеугольного камня этой книги. За последние 30 лет исследования в области динамики перешли от систем низкой размерности к системам высокой размерности. Они охватывают всю деятельность, связанную с сетями, сложными системами и эмерджентным поведением практически во всех отраслях науки. Модель Курамото обеспечивает естественный вход в эти современные направления исследований. Несмотря на свою относительную новизну, модель Курамото также естественным образом связана с традиционными темами, поскольку ее динамику можно понять с помощью классических методов, которым посвящены главы с 1 по 12. Действительно, это одна из самых интригующих особенностей модели: хотя она многомерна, у нее много общего с одномерными моделями, которые представлены в начале книги. Изучение свойств этой чудесной системы доставляет отдельное удовольствие.

Заключительная часть книги почти не изменилась. Студенты и преподаватели весьма благосклонно приняли предыдущие издания, и я считаю, что ее общий подход и структура по-прежнему актуальны.

Тем не менее я добавил несколько новых штрихов. К ним относятся упражнения по концептуальным моделям изменения климата, обновленная трактовка модели эпидемий SIR и поправки к модели осцилляторного гликолиза Селькова (на основе недавних исследований). Уравнения и иллюстрации тщательно пересмотрены, и некоторые из них переработаны. Добавлено около 50 новых ссылок, в основном на новейшие научные публикации.

Как и раньше, моя цель состоит в том, чтобы обеспечить хорошую основу – и приятный опыт! – для всех, кто хотел бы изучить нелинейную динамику и хаос с прикладной точки зрения. Ожидается, что читатель знаком с многомерным исчислением и линейной алгеброй, а также знает физику на уровне студента первого курса. Есть несколько мест, где применяются идеи теории вероятностей, комплексного анализа и анализа Фурье, но они либо излагаются с нуля, либо их можно безнаказанно пропустить (или принять на веру), если вы с ними незнакомы.

Лично для меня написание этой книги было выдающимся эмоциональным опытом. Во время работы над первым изданием я только начинал свою карьеру. Теперь я вижу финишную черту и просто хочу выразить благодарность всем преподавателям, студентам и коллегам, которые использовали эту книгу и предлагали советы по ее улучшению. Спасибо вам всем. А что касается студентов, которые прислали мне электронные письма или сказали мне лично, что эта книга повлияла на направление их исследований или, в некоторых случаях, вдохновила их вообще сменить область деятельности, – я чрезвычайно тронут! Для меня большая честь поделиться с вами знаниями.

Пока я окончательно не впал в сентиментальность, позвольте мне выразить признательность многочисленным студентам, друзьям и коллегам, которые помогли в работе над третьим изданием. Лия Эдельштейн-Кешет, Маркус Мессер, Ренни Миролло, Мария Опря, Хуан Перес-Меркадер, Алан Рендалл, Габриэлла Торрес Нотафт, Каартик Варма, Марк Уэйт, Зонгхао Цзоу – сердечное спасибо всем вам! А также Митчелу Дихтеру за руководство по решению, Майку Филду за изображение на обложке, Бобу Россу, Бет Хокинс и Мишель Даймонт из CRC Press и Шаши Кумару из KWGlobal.

Кэрол, Лия, Джо и Мюррей – вы моя любимая хаотическая система.

*Стивен Строгац
Итака, Нью-Йорк
2024 г.*

Предисловие ко второму изданию

Добро пожаловать во второе издание книги «Нелинейная динамика и хаос», которое теперь доступно как в формате электронной книги, так и в традиционной печатной версии.

За двадцать лет, прошедших с момента появления этой книги, идеи и методы нелинейной динамики и хаоса нашли применение в таких интересных новых областях, как системная биология, эволюционная теория игр и социофизика. Чтобы дать вам представление о последних достижениях, я добавил около двадцати новых упражнений, которые, как я надеюсь, побудят вас глубже вникнуть в тему. Упражнения охватывают следующие научные темы (номера упражнений указаны в скобках):

- Поведение животных: призывные ритмы японских древесных лягушек (8.6.9);
- Классическая механика: вedomый маятник с квадратичным затуханием (8.5.5);
- Экология: модель хищник–жертва; сезонный сбор урожая (7.2.18, 8.5.4);
- Эволюционная биология: выживание сильнейшего (2.3.5, 6.4.8);
- Эволюционная теория игр: «Камень, ножницы, бумага» (6.5.20, 7.3.12);
- Лингвистика: смерть языка (2.3.6);
- Пребиотическая химия: гиперциклы (6.4.10);
- Психология и литература: динамика любви в «Унесенных ветром» (7.2.19);
- Макроэкономика: кейнсианская перекрестная модель национальной экономики (6.4.9);
- Математика: многократное возведение в степень (10.4.11);
- Нейрология: бинокулярное соперничество в зрительном восприятии (8.1.14, 8.2.17);
- Социофизика: динамика мнений (6.4.11, 8.1.15);
- Системная биология: динамика белков (3.7.7, 3.7.8).

Спасибо моим коллегам Дэнни Абрамсу, Бобу Берингеру, Дирку Брокманну, Майклу Эловитцу, Рою Гудману, Джеффу Хэсти, Чаду Хигдон-Топазу, Могенсу Дженсену, Нэнси Копелл, Тане Лейзе, Говинду Менон, Ричарду Мюррею, Мэри Силбер, Джиму Сочаки, Джину-Люку Тиффо, Джону Тайсону, Крису Виггинсу и Мэри Лу Зеeman за предложения по новым упражнениям. Я особенно благодарен Барду Эрментроуту за разработку упражнений о японских древесных лягушках (8.6.9) и бинокулярном соперничестве (8.1.14, 8.2.17), а также Хорди Гарсиа-Охалво за то, что он поделился своими упражнениями по системной биологии (3.7.7, 3.7.8).

Во всем остальном цели, организация и текст первого издания остались неизменными, за исключением нескольких исправлений и дополнений в разных местах. Спасибо всем преподавателям и ученикам, приславшим отзывы и предложения.

Было очень приятно работать со Сью Колфилд, Присциллой МакГихон и Кэтлин Тетро в Westview Press. Большое спасибо за руководство и внимание к деталям.

Наконец, хочу признаться в глубочайшей любви к жене Кэрол, дочерям Лии и Джо и псу Мюррею за то, что они терпели мой рассеянный вид и заставляли веселиться.

*Стивен Х. Строгац
Итака, Нью-Йорк
2014 г.*

Предисловие к первому изданию

Этот учебник предназначен для новичков в области нелинейной динамики и хаоса, особенно для студентов, проходящих первый курс по данному предмету. Он основан на односеместровом курсе, который я преподавал последние несколько лет в Массачусетском технологическом институте. Моя цель – доступно объяснить математическую теорию и показать, как с ее помощью можно понять некоторые чудеса нелинейного мира.

Теоретические основы излагаются максимально дружелюбно и неформально, но аккуратно и корректно. Особое внимание уделяется аналитическим методам, конкретным примерам и геометрическому представлению. Теория излагается последовательно, начиная с дифференциальных уравнений первого порядка и их бифуркаций, за которыми следует анализ фазовой плоскости, предельных циклов и их бифуркаций, и заканчивая уравнениями Лоренца, хаосом, итеративными отображениями, удвоением периода, перенормировкой, фракталами и странными аттракторами.

Уникальной особенностью книги является акцент на практическом применении. Сюда относятся механические вибрации, лазеры, биологические ритмы, сверхпроводящие цепи, вспышки популяций насекомых, химические осцилляторы, системы генетического контроля, хаотические водяные колеса и даже способ использования хаоса для отправки секретных сообщений. В каждом случае научные основы объясняются на базовом уровне и тесно интегрированы с математической теорией.

Предварительная подготовка

Ожидается, что читатель обладает определенными знаниями. Важное значение имеет исчисление с одной переменной, включая построение кривых, ряды Тейлора и разделимые дифференциальные уравнения. В некоторых местах применяются исчисление многих переменных (частные производные, матрица Якоби, теорема о дивергенции) и линейная алгебра (собственные значения и собственные векторы). Знакомство с анализом Фурье не предполагается; объяснения будут даны по мере необходимости. Знание начального курса физики потребует на протяжении всей книги. Остальные требования зависят от рассматриваемых приложений, но во всех случаях будет достаточно начального уровня подготовки.

Применение в преподавании

Книга подходит для преподавания различных курсов:

- общее введение в нелинейную динамику для студентов, ранее незнакомых с этим предметом. (Это тот курс, который я преподавал.) В этом случае необходимо пройти всю книгу, охватывая основной материал

в начале каждой главы, выбирая несколько приложений для более глубокого обсуждения и уделяя внимание более сложным теоретическим темам или вообще пропуская их. Разумный график – семь недель на главы 1–8 и пять или шесть недель на главы 9–12. Убедитесь, что в семестре осталось достаточно времени, чтобы заняться хаосом и фракталами;

- традиционный курс по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, но с большим, чем обычно, вниманием к практическим применениям, и меньшим – теории возмущений. Такой курс будет сосредоточен на главах 1–8;
- современный курс по бифуркациям, хаосу, фракталам и их приложениям для студентов, уже знакомых с анализом по методу фазовой плоскости. Пригодятся выборочные темы, в основном из глав 3, 4 и 8–12.

По любому из этих курсов студентам следует задавать домашние задания из упражнений в конце каждой главы. Они также могут заниматься компьютерным моделированием, строить хаотические схемы и механические системы, находить новые статьи, чтобы получить представление о текущих исследованиях. В любом случае процесс обучения можно сделать увлекательным как для студентов, так и для преподавателей. Я надеюсь, он вам понравится.

Соглашения и обозначения

Уравнения нумеруются последовательно внутри каждого раздела. Например, когда мы работаем над разделом 5.4, третье уравнение называется просто (3) или уравнением (3), но в других местах оно называется (5.4.3) или уравнением (5.4.3). Рисунки, примеры и упражнения всегда называются полными именами, например упражнение 1.2.3. Примеры и доказательства заканчиваются специальным символом ■.

Благодарности

Спасибо Национальному научному фонду за финансовую поддержку. Хочу выразить благодарность за помощь в работе над книгой Диане Дабби, Партхе Саха и Шинье Ватанабэ (студенты); Джихаду Тома и Родни Уортинг (помощники преподавателя); Энди Кристиану, Джиму Кратчфилду, Кевину Куомо, Фрэнку Дезимоуну, Роджеру Экхардту, Дане Хобсон и Таносу Сиапасу (за рисунки); Бобу Девани, Ирвуу Эпштейн, Дэнни Каплану, Уиллему Малкусу, Чарли Маркусу, Полу Мэтьюзу, Артуру Мэтттаку, Ренни Миролло, Питеру Ренцу, Дэну Рокмору, Гилу Стрэнгу, Ховарду Стоуну, Джону Тайсону, Курту Визенфельду, Арту Уинфри и Мэри Лу Зиману (друзья и коллеги, давшие советы); моему редактору Джеку Репчеку, руководителю производства Линн Ридг и всем другим полезным людям из Addison-Wesley. Наконец, спасибо моей семье и Элизабет за их любовь и поддержку.

*Стивен Строгац
Кембридж, Массачусетс
1994 г.*

Об авторе

Стивен Строгац (доктор философии Гарвардского университета) – заслуженный профессор математики Корнелльского университета. Среди его наград – высшая преподавательская премия Массачусетского технологического института, награда за достижения в области популяризации математики и членство в Американской академии искусств и наук. Его исследования различных нелинейных систем, от синхронизированных светлячков до сетей малого мира, были опубликованы на страницах журналов *Scientific American*, *Nature*, *Discover*, *Business Week* и *The New York Times*.

Глава 1

Обзор темы

1.0 Хаос, фракталы и динамика

В 1980-е годы хаос и фракталы были в моде. Книга Джеймса Глейка «Хаос» (Gleick, 1987) несколько месяцев была бестселлером – потрясающее достижение для книги о математике и естественных науках. Книжки с картинками, такие как «Красота фракталов» Пейтгена и Рихтера (Peitgen and Richter, 1986), можно было найти на кофейных столиках в гостиницах повсюду, а множество Мандельброта (рис. 1.0.1) попало на обложку журнала Scientific American (Dewdney, 1985). К 1993 году, когда Джефф Голдблюм сыграл в «Парке Юрского периода» теоретика хаоса, одетого в черное и похожего на рок-звезду, казалось, что хаос действительно достиг большого успеха.

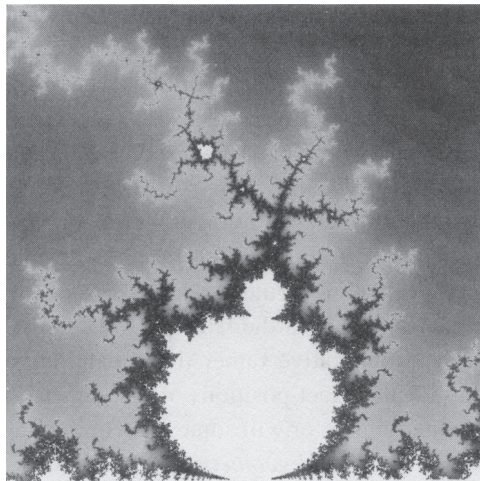


Рис. 1.0.1

За прошедшие годы хаос и фракталы стали частью более широкой культуры, и многие люди хотя бы поверхностно с ними знакомы. Но, возможно, вам хочется пойти глубже – изучить математику, лежащую в основе этих красивых и таинственных явлений, и увидеть, как хаос и фракталы находят применение в разных областях науки и техники. В таком случае этот учебник для вас.

Я старался писать эту книгу в неформальном стиле (насколько возможно), с упором на конкретные примеры и геометрическое мышление, а не на сухие доказательства и абстрактные аргументы. Это также чрезвычайно «прикладная» книга – практически каждую идею иллюстрирует применение в науке или технике. Во многих случаях примеры взяты из новейшей исследовательской литературы. Конечно, проблема подобного прикладного подхода заключается в том, что не все читатели являются знатоками физики и биологии, и механики жидкости, и ..., поэтому аспекты разных наук, как и математику, придется объяснять с нуля. Но это очень увлекательно и поучительно – открывать неожиданные связи между различными областями знаний.

Прежде чем мы начнем, нужно сделать оговорку: хаос и фракталы являются частью еще более необъятной темы, которая называется *динамикой*. Это научный подход, посвященный изучению изменений и систем, которые развиваются во времени. Независимо от того, приходит ли рассматриваемая система к равновесию, меняет свое состояние циклически или делает что-то более сложное, для анализа поведения мы используем именно динамику. Вероятно, вы уже сталкивались с понятиями динамики на курсах дифференциальных уравнений, классической механики, химической кинетики, популяционной биологии и т. д. С точки зрения динамики все упомянутые предметы укладываются в общую систему, о которой мы поговорим в конце этой главы.

Мы приступим к изучению динамики в главе 2. Но сначала вы познакомьтесь с двумя обзорами: историческим и логическим. Они нужны для интуитивного понимания темы, а строгие определения будут даны по мере необходимости. Эта глава завершается «динамическим взглядом на мир» – подходом, которому посвящен процесс обучения в оставшейся части книги.

1.1 Краткая история динамики

Хотя сегодня динамика является междисциплинарным предметом, изначально она была разделом физики. Как отдельная область науки она возникла в середине 1600-х годов, когда Ньютон изобрел дифференциальные уравнения, открыл законы движения и всемирного тяготения и объединил их, чтобы объяснить законы движения планет Кеплера. В частности, Ньютон решил *задачу двух тел* – задачу расчета движения Земли вокруг Солнца с учетом закона обратных квадратов гравитационного притяжения между ними. Последующие поколения математиков и физиков пытались распространить аналитические методы Ньютона на *задачу трех тел* (например, Солнца, Земли и Луны), но, как ни странно, решить эту задачу оказалось гораздо труднее. После десятилетий бесплодных усилий стало понятно, что задачу трех тел практически *невозможно* решить в виде явных формул, описывающих движения трех тел. В то время ситуация казалась безнадежной.

В конце 1800-х годов Пуанкаре совершил прорыв. Он предложил новый метод, в котором особое внимание уделялось качественной, а не количествен-

ной постановке вопросов. Например, вместо того чтобы постоянно находить точное положение планет, он спросил: «Будет ли Солнечная система устойчива всегда или некоторые планеты в конечном итоге улетят в бесконечность?» Пуанкаре разработал мощный геометрический подход к анализу подобных вопросов. Из него выросло современное научное направление – *динамика*, приложения которого выходят далеко за рамки небесной механики. Пуанкаре был также первым ученым, отметившим возможность *хаоса*, когда детерминированная система демонстрирует аperiodическое поведение, сильно зависящее от начальных условий, что делает невозможным долгосрочное предсказание.

Но даже в первой половине XX века хаос оставался на заднем плане; вместо этого динамика в основном занималась нелинейными осцилляторами и их применением в физике и технике. Нелинейные осцилляторы сыграли жизненно важную роль в развитии таких прикладных технологий, как радио, радар, система фазовой автоподстройки частоты и лазеры. Что касается теории, нелинейные осцилляторы стимулировали изобретение новых математических методов – пионерами в этой области были Ван дер Пооль, Андронов, Литтлвуд, Картрайт, Левинсон и Смейл. Между тем благодаря работам Биркгофа, а затем Колмогорова, Арнольда и Мозера геометрические методы Пуанкаре были существенно расширены и позволили достичь гораздо более глубокого понимания классической механики.

Появление быстродействующего компьютера в 1950-х годах стало переломным моментом в истории динамики. Компьютер позволил экспериментировать с уравнениями способами, которые раньше были невозможны, и тем самым достигнуть некоторого понимания нелинейных систем. Такие эксперименты привели к открытию Лоренцем в 1963 году хаотического движения странного аттрактора. Он изучал упрощенную модель конвекционных колебаний в атмосфере, стремясь понять пресловутую непредсказуемость погоды. Лоренц обнаружил, что решения его уравнений никогда не достигали равновесия или периодических состояний – вместо этого они продолжали совершать нерегулярные, аperiodические колебания. Более того, стоило лишь незначительно изменить начальные условия моделирования, и результирующее поведение системы вскоре становилось совершенно другим. Это означало, что система по своей сути непредсказуема – крошечные расхождения в показателях текущего состояния атмосферы (или любой другой хаотической системы) будут быстро усиливаться, что в конечном итоге приведет к бессмысленным прогнозам. Но Лоренц также показал, что в хаосе есть структура: при построении трехмерного графика решения его уравнений падали на набор точек в форме бабочки (рис. 1.1.1). Он утверждал, что это множество должно быть «бесконечным комплексом поверхностей» – сегодня мы бы рассматривали его как пример фрактала.

На работу Лоренца не обращали особого внимания до 1970-х годов, когда начался бум хаоса. Вот некоторые из основных событий того славного десятилетия. В 1971 г. Рюэль и Такенс предложили новую теорию возникновения турбулентности в жидкостях, основанную на абстрактных представлениях о странных аттракторах. Несколько лет спустя Мэй обнаружил примеры хаоса

в повторяющихся отображениях, возникающих в популяционной биологии, и опубликовал авторитетную обзорную статью, в которой подчеркивал педагогическую важность изучения простых нелинейных систем, чтобы уравновесить часто вводящий в заблуждение линейный подход, поощряемый традиционным образованием. Затем последовало самое удивительное открытие, сделанное физиком Фейгенбаумом. Он обнаружил, что существуют определенные универсальные законы, управляющие переходом от регулярного поведения к хаотическому; грубо говоря, совершенно разные системы могут прийти в хаос одинаковым путем. Его работа установила связь между хаосом и фазовыми переходами и побудила целое поколение физиков заняться изучением динамики. Наконец, такие экспериментаторы, как Голлаб, Либхабер, Суинни, Линсей, Мун и Вестервельт, проверяли новые идеи о хаосе в экспериментах с жидкостями, химическими реакциями, электронными схемами, механическими осцилляторами и полупроводниками.

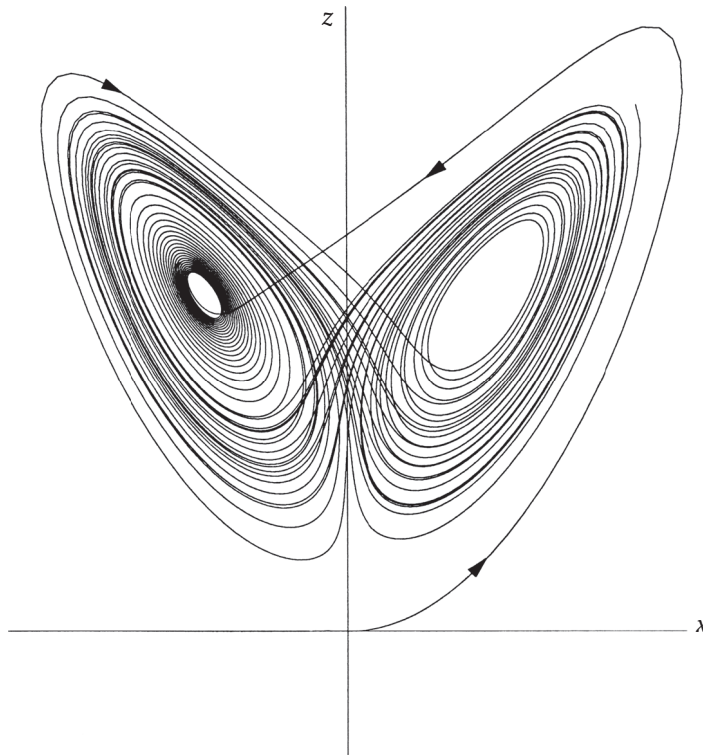


Рис. 1.1.1

Хотя в центре внимания ученых был хаос, в 1970-х годах в динамике произошли еще два важных события. Мандельброт систематизировал и популяризировал фракталы, создал великолепные образцы компьютерной графики и показал, как их можно применять в самых разных областях. А в развивающейся области математической биологии Уинфри применил геометриче-

ские методы динамики к биологическим колебаниям, особенно к циркадным (примерно 24-часовым) ритмам и сердечным ритмам.

В 1980-х годах исследованиями динамики занимались многие ученые, и перечислить их вклад поименно невозможно. В табл. 1.1.1 представлены лишь наиболее примечательные достижения.

Таблица 1.1.1. Краткая история динамики

1666	Ньютон	Изобретение математического анализа, объяснение движения планет
1700-е		Расцвет математического анализа и классической механики
1800-е		Аналитические исследования движения планет
1890-е	Пуанкаре	Геометрическое приближение, кошмар хаоса
1920-1950		Нелинейные осцилляторы в физике и технике, изобретение радио, радара и лазера
1920-1960	Биркхофф Колмогоров Арнольд Мозер	Сложное поведение в гамильтоновой механике
1963	Лоренц	Странный аттрактор в простой модели конвекции
1970-е	Рюэль и Такенс Мэй Фейгенбаум Уинфри Мандельброт	Турбулентность и хаос Хаос в логистическом отображении Универсальность и перенормировка, связь хаоса и фазовых переходов Нелинейные осцилляторы в биологии Фракталы
1980-е		Широкий интерес к хаосу, фракталам, осцилляторам и их приложениям
1990-е – сегодня		Сложные системы, сети, коллективное поведение

1.2 Почему так важна нелинейность

Теперь мы переходим от истории к логической структуре динамики. Прежде всего определим термины и обозначим важные различия.

Существует два основных типа динамических систем: *дифференциальные уравнения* и *итерированные отображения* (iterated map, также называемые *разностными уравнениями*). Дифференциальные уравнения описывают эволюцию систем в непрерывном времени, тогда как итерированные отображения возникают в задачах, где время дискретно. Мы сосредоточимся на дифференциальных уравнениях, потому что они гораздо шире используются в науке и технике. Далее в книге вы увидите, что итерированные отображения тоже могут быть очень полезны как в качестве простых примеров хаоса, так и в качестве инструментов для анализа периодических или хаотических решений дифференциальных уравнений.

Конец ознакомительного фрагмента.

Приобрести книгу можно

в интернет-магазине

«Электронный универс»

e-Univers.ru