Содержание

Предисловие 9

Часть I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ 12

Глава 1

Преобразование Фурье и фильтры 13
1.1. Предварительные замечания 13
1.2. Ряды Фурье 14
1.3. Преобразование Фурье 18
1.3.1. Преобразование Фурье в $L^1(R)$ 18
1.3.2. Преобразование Фурье в $L^2(R)$ 19
1.3.3. Свойства преобразований Фурье 21
1.3.4. Примеры 23
1.3.5. Теорема Пэли-Винера 23
1.3.6. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции 24
1.3.7. Формула суммирования Пуассона 25
1.3.8. Оконное преобразование Фурье 26
1.4. Преобразование Фурье дискретных сигналов 27
1.4.1. Дискретизация 27
1.4.2. Дискретное преобразование Фурье сигнала длины N 29
1.4.3. Преобразование Фурье числовой последовательности 32
1.4.4. Z–преобразование 35
1.5. Фильтры 35
1.5.1. Фильтрация непрерывных сигналов 35
1.5.2. Примеры фильтров 37
1.5.3. Цифровые фильтры 40
1.5.4. Примеры цифровых фильтров 41

1.6. Разложение сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие.....42
1.6.1. Разложение идеальными фильтрами.....43
1.6.2. Восстановление идеальными фильтрами.....47
1.6.3. Общий случай.....49
1.6.4. Примеры.....54
1.6.5. Многоуровневый анализ сигналов.....57

▼ Глава 2

Основы теории вейвлетов.....59
2.1. Вейвлеты Хаара.....59
2.1.1. Последовательность масштабированных подпространств.....60
2.1.2. Операторы проектирования.....62
2.1.3. Пространства вейвлетов.....64
2.2. Масштабирующие функции.....68
2.2.1. Примеры и общие свойства масштабирующих функций.....68
2.2.2. Построение масштабирующей функции.....71
2.3. Ортогональный кратномасштабный анализ.....77
2.3.1. Ортогональное кратномасштабное разложение.....78
2.3.2. Вейвлеты.....81
2.3.3. О единственности порождающих функций.....88
2.3.4. Неортогональный случай.....90
2.3.5. Достаточные условия ортогональности.....93
2.4. Вейвлет-преобразование.....95
2.4.1. Вейвлет-разложение.....95
2.4.2. Быстрое вейвлет-преобразование.....99
2.4.3. Вопрос о начальных коэффициентах.....100
2.4.4. Восстановление.....102
2.4.5. Вейвлет-пакеты.....103
2.5. Примеры кратномасштабного анализа и вейвлетов.....108
2.5.1. Вейвлеты Шеннона–Котельникова.....108
2.5.2. Вейвлеты Мейера.....110
2.6. Вейвлеты Батла-Лемарье. B-сплайны.....115
2.6.1. Вейвлеты на основе B-сплайна степени 1.....116
2.6.2. B-сплайны.....120
2.6.3. Сплайновые вейвлеты.....122
2.7. Регулярность и нулевые моменты.....125
2.8. Построение вейвлетов Добеши с компактным носителем.....131
2.8.1. Построение функции H0(ω).....132
2.8.2. Симлеты.....137
2.9. Койфлеты.....139

2.10. Биортогональные вейвлеты ... 142
2.10.1. Мотивировка и определение ... 142
2.10.2. Условия на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ... 144
2.10.3. Построение функции $\widetilde{\varphi}(x)$ ... 146
2.10.4. Построение функций $\psi(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ ... 148
2.10.5. Условия на коэффициенты ... 150
2.10.6. Симметричные биортогональные вейвлеты ... 150
2.10.7. Сплайны ... 151
2.11. Двумерные вейвлеты ... 154
2.11.1. Вейвлет-преобразование ... 158
2.12. Непрерывное вейвлет-преобразование ... 159
2.12.1. Непрерывное вейвлет-преобразование в одномерном случае ... 159
2.12.2. Многомерные обобщения непрерывного вейвлет-преобразования ... 162
2.13. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования N ... 172
2.13.1. Масштабирующие функции ... 173
2.13.2. N-кратномасштабное разложение ... 174
2.13.3. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования N ... 176
2.13.4. Вейвлет-преобразование ... 177
2.13.5. Разложение и восстановление в неортогональном случае ... 179
2.14. Примеры N-масштабирующих функций и вейвлетов ... 182
2.14.1. Вейвлеты Хаара с параметром сжатия N ... 182
2.14.2. Вейвлеты Шеннона с параметром сжатия N ... 185
2.14.3. Вырожденные масштабирующие функции и вейвлеты Кантора ... 188
2.14.4. Сплайновые масштабирующие функции ... 192
2.14.5. Вейвлеты на основе B-сплайнов ... 195
2.14.6. Кратные коэффициенты масштабирования ... 206
2.15. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем для $N > 2$ ... 210
2.15.1. Условия ортогональности ... 211
2.15.2. Построение матрицы частотных функций ... 213
2.15.3. Построение матрицы частотных функций в случае $N = 3$ ... 216
2.15.4. Примеры масштабирующих функций и вейвлетов для $N = 3$ ... 218
2.16. Многомерные вейвлеты с матричным коэффициентом масштабирования ... 223
2.16.1. Масштабирующие функции ... 224
2.16.2. A-кратномасштабное разложение ... 234
2.16.3. Вейвлеты с матрицей масштабирования ... 238
2.16.4. Вейвлет-преобразование ... 239
2.16.5. Разложение и восстановление ... 240
2.16.6. Построение вейвлетов с матрицей масштабирования ... 245
2.17. Гармонические вейвлеты ... 251

2.17.1. Гармонические вейвлеты на R 251
2.17.2. Периодические гармонические вейвлеты 254
2.17.3. Дискретное гармоническое вейвлет-разложение 256
2.18. Мультивейвлеты 258

Часть II

Вейвлеты в MATLAB 266

Глава 3

Функции вейвлет-анализа в MATLAB 267
3.1. Вейвлеты и банки фильтров в системе MATLAB 269
3.1.1. Вещественные и комплексные вейвлеты 269
3.1.2. Ортогональные и биортогнальные банки фильтров 281
3.1.3. Построение вейвлетов. Лифтинг 286
3.2. Частотно-временной анализ 291
3.2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование cwt 291
3.2.2. Q-постоянно адаптивные к данным и квадратичные частотно-временные преобразования 305
3.2.3. Многомасштабный анализатор сигнала 314
3.3. Дискретный вейвлет-анализ 317
3.3.1. Анализ одномерных сигналов 317
3.3.2. Анализ изображений 339
3.3.3. Трехмерный анализ 355
3.3.4. Анализ мультисигналов 359
3.4. Вейвлет-пакеты 366
3.5. Удаление шума и сжатие сигнала 378
3.5.1. Функции MATLAB для удаления шума и сжатия 379
3.5.2. Многовариантное удаление шума 389
3.5.3. Сжатие сигнала 398
3.6. Вейвлеты в машинном и в глубоком обучении 405
3.6.1. Вейвлет-рассеивание 406
3.6.2. Функции вейвлет-рассеивания времени 409
3.7. Тестовые сигналы в MATLAB 411
3.7.1 Одномерные тестовые сигналы 412
3.7.2. Изображения 412
3.7.3. Генерирование сигналов 413
3.8. Приложения вейвлет-анализа 416
3.8.1. Вейвлет-анализ кардиосигнала 416
3.8.2. Непрерывный вейвлет-анализ кордиосигнала 426

3.8.3. Удаление шума, компрессия и сглаживание кардиосигнала ... 433
3.8.4. Использование пакетных разложений ... 435
3.8.5. Высокочастотные вейвлет-компоненты кардиосигнала для задач классификации ... 441
3.8.6. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы ... 450
3.8.7. Выделение контура объекта изображения ... 458

Глава 4

Вейвлет-анализатор пакета Wavelet Toolbox ... 464
4.1. Просмотр вейвлетов ... 465
4.1.1. Просмотр вейвлетов ... 465
4.1.2. Просмотр пакетных вейвлетов ... 467
4.2. Продолжение сигналов и изображений (Extension) ... 468
4.3. Одномерный вейвлет-анализ ... 471
4.3.1. Одномерный вейвлет-анализ сигнала (Wavelet 1-D) ... 471
4.3.2. Одномерный пакетный вейвлет-анализ ... 480
4.3.3. Непрерывный вейвлет-анализ (Continuous Wavelet 1-D) ... 483
4.3.4. Комплексный непрерывный вейвлет-анализ (Complex Continuous Wavelet 1-D) ... 487
4.3.5. Непрерывный вейвлет-анализ на основе FFT ... 489
4.4. Специализированные средства одномерного вейвлет-анализа ... 493
4.4.1. Удаление шума стационарного одномерного сигнала (SWT De-noising 1-D) ... 494
4.4.2. Оценка плотности (Density Estimation 1-D) ... 498
4.4.3. Оценка регрессии (Regression Estimation 1-D) ... 502
4.4.4. Выбор вейвлет-коэффициентов сигнала (Wavelet Coefficients Selection 1-D) ... 505
4.4.5. Моделирование дробного броуновского движения (Fractional Brownian Generation 1-D) ... 507
4.4.6. Выполнение подгонки (Matching Pursuit 1-D) ... 508
4.5. Двумерный вейвлет-анализ ... 512
4.5.1. Двумерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 2-D) ... 513
4.5.2. Двумерный пакетный вейвлет-анализ ... 515
4.5.3. Двумерное непрерывное вейвлет-преобразование ... 516
4.6. Специализированные средства двумерного вейвлет-анализа ... 519
4.6.1. Удаление шума изображения (SWT De-noising 2-D) ... 519
4.6.2. Выбор вейвлет-коэффициентов изображения (Wavelet Coefficients Selection 2-D) ... 520
4.6.3. Слияние двух изображений (Image Fusion) ... 522
4.6.4. Истинное сжатие с использованием вейвлетов (True Compression 2-D) ... 524

4.7. Трехмерный вейвлет-анализ (Wavelet 3-D) ... 528
4.8. Мультисигналы (Multiple 1-D) ... 532
4.8.1. Вейвлет-анализ мультисигнала ... 532
4.8.2. Многовариантное удаление шума (Multivariate Denoising) ... 537
4.8.3. Многомасштабный анализ главных компонент ... 544
4.9. Проектирование вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования (New Wavelet for CWT) ... 547

Список литературы ... 550

Предметный указатель ... 557

Предисловие

Функции типа маленькой волны (всплески, или вейвлеты) в математике возникли достаточно давно при изучении базисов функциональных пространств. Однако только в последние десятилетия они нашли широкие применения в обработке сигналов и изображений. Эти приложения стимулировали мощное развитие теории вейвлетов. Теория вейвлетов является альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. Одно из основных преимуществ вейв-лет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения сигнала, тогда как анализ Фурье этого не дает – в коэффициентах Фурье отражается поведение сигнала за все время его существования. Разработана глубокая и красивая математическая теория вейвлетов [Дб], [М], [НС], [Чуи], [J03].

Из имеющихся на русском языке книг по вейвлетам отметим фундаментальные монографии: И. Добеши [Дб], К. Чуи [Чуи] и И. Я. Новикова, В. Ю. Протасова, М. А. Скопиной [НПС], А. Н. Яковлева [Я] и Ю. А. Фаркова [Фар]. Издан перевод замечательной книги С. Малла [М] – это наиболее полное учебное пособие по обработке сигналов при помощи вейвлетов. В ней прекрасно сочетаются доступность и глубина изложения. Кроме того, издан еще ряд пособий, среди которых нужно отметить книгу К. Блаттера [Бл], учебные пособия Л. В. Новикова [Но], А. П. Петухова [Пе] и В. Г. Захарова [За]. Приложениям вейвлетов в компьютерной графике посвящены книги [СДС] и [У].

Данная книга предлагается как учебник по теории вейвлетов и их применениям для студентов по математическим специальностям и направлениям подготовки. Она возникла на основе курса лекций, читаемых автором в течение ряда лет. Чтобы сделать книгу более независимой, в нее включены сведения по рядам и преобразованию Фурье, по фильтрам и разложению сигналов. Теоретический материал не должен быть самоцелью, нужно овладеть и практическими приемами работы с вейвлетами. Поэтому в книгу включено описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB и их использования для обработки сигналов. В соответствии с этим книга состоит из двух частей: «Основы теории вейвлетов» и «Вейвлеты в MATLAB». Первая часть книги содержит необходимый теоретический материал, а вторая часть прямо ориентирована на практические занятия по вейвлетам. Выбор системы компьютерной математики MATLAB объясняется тем, что она популярна среди инженеров и математиков, занимающихся прикладными разработками, а также потому, что именно в MATLAB вейвлеты представлены наиболее полно.

Данное издание книги является переработанным и дополненным. Многие вопросы изложены более доступно. Добавлено описание новых возможностей пакета Wavelet Toolbox MATLAB R2018B и разобраны новые примеры применения вейвлет-анализа в медицине и в компьютерной графике. Из наиболее интересных новинок пакета расширения Wavelet Toolbox отметим вейвлет-методы для машинного и глубокого обучения, разработку примеров использования вейвлетов для классификации ЭКГ, новые функции вейвлет-преобразования двойного дерева и возможности создания C/C++ кодов из функций пакета Wavelet Toolbox.

Рассмотрим кратко содержание книги. Теория вейвлетов широко использует технику рядов Фурье и преобразования Фурье. Поэтому в первой главе излагаются основные факты из этих тем. Даже если сигнал представлен функцией, на практике для его анализа берется достаточно плотная выборка значений (дискретизация). Рассмотрены вопросы, которые возникают при дискретизации сигнала, определено дискретное преобразование Фурье и изучаются его свойства. Вейвлет-преобразование сигнала сводится к действию на этот сигнал определенных фильтров. Поэтому в первой главе изложены также основные факты фильтрации сигналов. Рассмотрены вопросы разложения сигнала на сглаженную и высокочастотную компоненты и последующего восстановления сигнала. Хотя первая глава является вспомогательной, результаты последних параграфов существенны для понимания теории вейвлетов и их практических применений.

Вторая глава «Основы теории вейвлетов» является центральной в данной книге. Она содержит изложение основ теории вейвлетов и способов их построения. Начинается изложение с определения масштабирующих функций и построения известного вейвлет-базиса Хаара. На этом примере мы изучаем основные конструкции, которые затем последовательно развиваются в следующих параграфах. Рассмотрены примеры масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов: Шеннона-Котельникова, Мейера, ортогональных вейвлетов с компактным носителем, биортогональных вейвлетов. Кратко изложены вопросы о двумерных вейвлетах. Рассмотрено непрерывное вейвлет-преобразование и его многомерные обобщения. Достаточно подробно изучаются масштабирующие функции с произвольным натуральным коэффициентом сжатия N, и приводятся примеры построения соответствующих вейвлетов. В конце главы рассмотрены масштабирующие функции и вейвлеты в многомерном случае с матричным коэффициентом масштабирования, гармонические вейвлеты и мультивейвлеты. Несмотря на то что в книге изложены не все темы теории вейвлетов, надеюсь, что ее содержания будет достаточно для первоначального изучения предмета студентами, прослушавшими курс функционального анализа.

Во второй части книги дается описание основных функций системы MATLAB, связанных с вейвлетами и их использованием. Показано, как можно получить значения и построить графики основных типов вейвлетов, как найти масштабирующие фильтры и фильтры разложения и восстановления вейвлетов. Рассмотрены возможности Wavelet Toolbox MATLAB для анализа сигналов, очистки от шума, сжатия. Дано описание применения пакетных и двумерных вейвлетов. Приведены примеры вейвлет-анализа ЭКГ и ЭЭГ. Описываются те-

стовые сигналы Wavelet Toolbox MATLAB. С целью облегчения работы с вейвлетами в MATLAB создан комплекс графических оболочек, называемый вейвлет-анализатором, для вейвлет-анализа и визуализации исходных данных и результатов. В последней главе достаточно подробно рассматривается работа с вейвлетами с использованием вейвлет-анализатора Wavelet Toolbox.

Ссылки на литературу даны по возможности на доступные издания.

Надеюсь, что данная книга будет доступна и полезна студентам вузов и специалистам, начинающим использовать вейвлеты в своей работе.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕЙВЛЕТОВ

ЧАСТЬ I

Теория вейвлетов является мощной альтернативой классическому анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. В то же время она широко использует технику рядов Фурье и преобразования Фурье. Поэтому в первой главе излагаются основные факты из указанных тем, включая дискретное преобразование Фурье и фильтрацию сигналов. Во второй главе рассматриваются основы теории вейвлетов и способы их построения. Приведены примеры масштабирующих функций и соответствующих вейвлетов: Шеннона-Котельникова, Мейера, ортогональные вейвлеты с компактным носителем, биортогональные вейвлеты и вейвлеты с произвольным натуральным коэффициентом сжатия N. Рассмотрено непрерывное вейвлет-преобразование и его многомерные обобщения. В конце главы разобраны масштабирующие функции и вейвлеты в многомерном случае с матричным коэффициентом масштабирования, а также гармонические вейвлеты.

Преобразование Фурье и фильтры

1

В данной главе кратко представлены основные сведения по рядам Фурье и преобразованию Фурье, изложены вопросы дискретного преобразования Фурье, фильтров и разложения сигналов.

1.1. Предварительные замечания

Напомним понятия, которые далее часто встречаются, и примем некоторые обозначения.

Числовые последовательности $\{x_n\}$, которые мы будем рассматривать, являются «бесконечными в обе стороны», т. е. номер n может принимать любые целые значения $n \in \mathbf{Z}$. Числовой ряд $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x_n$ называется сходящимся, если существует предел $\lim_{N,K\to\infty} \sum_{n=-K}^{n=N} x_n$. Степенные ряды рассматриваются как формальные, они содержат отрицательные степени, и вопрос об их сходимости не рассматривается. Такие степенные ряды будут обозначаться следующими символами:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n.$$

Функции $f(x)$ являются, вообще говоря, комплекснозначными и определены на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел. *Носителем* функции $f(x)$ называется замыкание множества точек x, в которых $f(x) \neq 0$. Носитель обозначается символом supp (f). Если supp (f) находится на конечном промежутке $[a, b]$, то $f(x)$ называется функцией с *компактным носителем*.

Некоторое свойство функции $f(x)$ выполняется *почти всюду* (*п. в.*), если множество точек, в которых это свойство не выполнено, имеет нулевую меру.

Векторное пространство E называется евклидовым, если в нем задано скалярное произведение (u, v). В этом случае для любого элемента $v \in E$ определена норма $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ и сходимость $v_n \to v$, если $\|v_n - v\| \to 0$. Пространство E называется *гильбертовым,* если оно является полным относительно определенной выше сходимости. Система элементов $\{u_n, n \in \mathbf{Z}\}$ в гильбертовом пространстве E называется *ортонормированной,* если

$$(u_n, u_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \text{ для любых } n, m \in \mathbf{Z}.$$

Ортонормированная система $\{u_n\}$ в гильбертовом пространстве E называется *полной*, если замыкание множества всех линейных комбинаций элементов из $\{u_n\}$ совпадает с пространством E, другими словами, если E является наименьшим замкнутым пространством, содержащим $\{u_n\}$. Полная ортонормированная система $\{u_n\}$ называется *ортонормированным базисом* гильбертова пространства E. Примером ортогонального базиса может служить система функций $\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \ldots\}$ в гильбертовом пространстве $L^2[0, 2\pi]$ функций на $[0, 2\pi]$, интегрируемых с квадратом.

Элементарные гармоники – это наиболее простые сигналы вида:

$$a\sin(\omega x + \varphi_0) \quad \text{и} \quad a\cos(\omega x + \varphi_0),$$

где a – амплитуда, ω – *круговая частота*, φ_0 – начальная фаза. Число $T = 2\pi/\omega$ есть период времени, за который система делает одно полное колебание. Величина $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ есть *частота*, число колебаний за единицу времени.

Аналоговым сигналом называется функция $f(x)$ действительного переменного $x \in \mathbf{R}$. Энергией сигнала $f(x)$ называется интеграл:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Другими интересными числовыми характеристиками сигнала $f(x)$ являются «моменты». *Начальным моментом* порядка n сигнала $f(x)$ называется интеграл:

$$m_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Центральным моментом порядка n называется интеграл:

$$\mu_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^n f(x) dx.$$

Момент первого порядка m_1 имеет смысл математического ожидания m. Центральный момент второго порядка имеет смысл дисперсии и характеризует разброс значений $f(x)$ относительно m_1.

Если аргумент x принимает дискретный ряд значений $x = x_n$, $n \in \mathbf{Z}$, то значения $y_n = f(x_n)$ называются отсчетами, а весь набор значений $\{y_n\}$ – *выборкой*. *Дискретизация* непрерывного сигнала $f(x)$ – это замена его выборкой $\{y_n\}$. Такая процедура называется *оцифровкой* аналогового сигнала.

1.2. Ряды Фурье

Напомним основные факты теории рядов Фурье. Подробности и доказательства можно найти в любом учебнике по математическому анализу, например [АСЧ], [КФ].

Будем рассматривать функции $f(x)$ на $[0,2\pi]$, *интегрируемые с квадратом*, т. е. для которых существует интеграл (Лебега) $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Множество таких функций образует гильбертово пространство $L^2[0, 2\pi]$. Скалярное произведение и норма в $L^2[0, 2\pi]$ определены следующим образом:

$$(f,g)=\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad \|f\|_2=\sqrt{(f,f)},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Полную ортогональную систему в $L^2[0, 2\pi]$ образуют функции:

$\{1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, \ldots\}$.

Если $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$, то для нее можно определить *ряд Фурье*:

$$f(x)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{1}$$

где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx. \tag{2}$$

Из полноты тригонометрической системы следует, что ряд Фурье функции $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$ сходится к $f(x)$ в пространстве $L^2[0, 2\pi]$. Это означает, что $\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} \to 0$, где $S_n(x)$ – частичные суммы ряда. Имеет место равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2.$$

С другой стороны, если сходится числовой ряд $a_0^2/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$, то ряд (1) сходится в L^2 к функции, у которой коэффициентами Фурье являются числа a_n и b_n.

Отметим также, что если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$, то тригонометрический ряд (1) сходится равномерно, его сумма является непрерывной функцией и ряд (1) является рядом Фурье этой функции.

Комплексная форма ряда Фурье. Пусть

$$c_n=\frac{a_n+ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

и $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$. Тогда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\,nx+b_n\sin nx=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{-inx}+c_{-n}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx}.$$

Таким образом,

$$f(x)\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx},\text{ где } c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,e^{inx}dx. \tag{3}$$

Равенство Парсеваля. Если функция $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx.$$

Случай промежутка [0, 2*N*]. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, 2N]$, где N – некоторое положительное число. Полную ортогональную систе-

му в $L^2[0, 2N]$ образуют функции:

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{N}nx, \sin\frac{\pi}{N}nx,\ n=1, 2, \ldots\right\}.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{N}nx + b_n \sin\frac{\pi}{N}nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{N}\int_0^{2N} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{N}nx\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{N}\int_0^{2N} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{N}nx\right)dx.$$

В комплексной форме:

$$f(x) \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\frac{\pi}{N}nx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2N}\int_0^{2N} f(x)\, e^{i\frac{\pi}{N}nx}dx.$$

В приложениях функцию $f(x)$ часто называют сигналом. При разложении $f(x)$ в ряд Фурье величина каждого коэффициента a_n, b_n показывает, насколько значителен вклад гармоники $\cos nx$ или $\sin nx$ в формирование сигнала $f(x)$. Эти коэффициенты характеризуют интенсивность элементарных гармоник. Набор коэффициентов Фурье $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\}$ называется спектром сигнала $f(x)$. Спектром считают также набор комплексных коэффициентов Фурье $\{c_n, n \in \mathbf{Z}\}$.

Замечание. Пусть $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$ и $g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{-imx}$. Тогда коэффициенты Фурье произведения $f(x)g(x)$ получаются в виде свертки коэффициентов c_k и d_m:

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}.$$

Действительно,

$$f(x)g(x) = \left(\sum_k c_n e^{-ikx}\right)\left(\sum_m d_m e^{-imx}\right) = \sum_{k,m} c_k d_m e^{-i(k+m)x} =$$

$$= \sum_n \left(\sum_{k+m=n} c_k d_m\right) e^{-inx} = \sum_n \left(\sum_k c_k d_{n-k}\right) e^{-inx} = \sum_n c_n(fg) e^{-inx}.$$

Приведем несколько примеров вычисления коэффициентов Фурье функций, которые будут в дальнейшем использоваться.

Пример 1. Коэффициенты Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le a \le \pi \\ 0, & \text{при остальных } x \end{cases}$$

на промежутке $[-\pi, \pi]$. Функция четная, поэтому все коэффициенты b_n равны нулю и соответствующий ряд Фурье содержит только косинусы. Коэффициенты Фурье a_n легко вычисляются:

$$a_0 = \frac{2a}{\pi}, \quad a_n = \frac{2\sin na}{\pi n}, \quad c_n = \frac{\sin na}{\pi n}.$$

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin na}{\pi n} \cos nx.$$

В частности, если $a = \pi/2$, то

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 2k, k \neq 0, \\ (-1)^k \dfrac{2}{n\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}.$$

Пример 2. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = \cos^2(x/2)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Используя известную формулу $\cos^2(x/2) = (\cos x + 1)/2$, получаем два ненулевых коэффициента: $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$. Для функции $f(x) = \sin^2(x/2)$ аналогично получаем $a_0 = 1$, $a_1 = -1/2$.

Пример 3. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = e^{ix/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ находятся прямым вычислением:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix/2} e^{inx} dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Коэффициенты Фурье функции $f(x) = e^{-ix/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ следующие:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix/2} e^{inx} dx = -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

В общем случае для функции $f(x) = e^{ikx/2}$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ имеем:

1. В случае четного $k = 2m$:

$$c_n = \begin{cases} 1, & n = -m, \\ 0 & n \neq -m \end{cases}.$$

2. В случае нечетного $k = 2m + 1$:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+m}}{2n+2m+1}.$$

Пример 4. Коэффициенты Фурье функции $f(x) = \cos(x/2)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Можно использовать пример 3 для нахождения комплексных коэффициентов прямым вычислением либо непосредственным интегрированием, применяя известную формулу $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$. В любом случае $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}, \quad c_n = c_{-n} = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi(4n^2-1)}.$$

1.3. Преобразование Фурье

В данном параграфе мы напомним основные факты, связанные с преобразованием Фурье. Все доказательства можно найти в учебниках по математическому анализу, например [АСЧ], [КФ].

Пусть $L^1(\mathbf{R})$ – пространство, состоящее из абсолютно интегрируемых функций на $\mathbf{R}$. Оно является банаховым пространством с нормой:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx.$$

Произведение $f(x)g(x)$ двух функций из пространства $L^1(\mathbf{R})$ может не принадлежать пространству $L^1(\mathrm{R})$. Тем не менее для функций класса $L^1(\mathbf{R})$ определена операция *свертки* $f*g$, превращающая пространство $L^1(\mathbf{R})$ в коммутативную банахову алгебру без единицы:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \tag{1}$$

Корреляция функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых с квадратом на $\mathbf{R}$, определяется как следующий интеграл:

$$K_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\tau)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x-\tau)}dx. \tag{2}$$

Корреляция показывает степень сходства функций $f(x)$ и $g(x)$ при различных значениях сдвигов по оси Ox. Хотя корреляция функций $f(x)$ и $g(x)$ по форме напоминает свертку, по существу имеются серьезные различия. Нет коммутативности относительно $f(x)$ и $g(x)$. Корреляция определена для функций из $L^2(\mathrm{R})$. При интегрировании переменная интегрирования x в функциях $f(x)$ и $g(x)$ ориентирована одинаково. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются некоррелированными, если $K_{fg}(\tau) = 0$. В случае $g(x) = f(x)$ функция $K_f(\tau) = K_{ff}(\tau)$ называется автокорреляционной.

1.3.1. Преобразование Фурье в $L^1(\mathrm{R})$

Определение 1. *Преобразованием Фурье функции $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ называется интеграл*

$$F[f] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx, \qquad \omega \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Переменная ω имеет смысл частоты. Поэтому переход от $f(x)$ к $\hat{f}(\omega)$ часто называют переходом из пространственной области в частотную.

Рассмотрим вопрос о восстановлении функции $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $\hat{f}(\omega)$. Естественно ожидать, что $f(x)$ будет выражаться интегралом:

$$F^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega. \tag{4}$$

К сожалению, $\hat{f}(\omega)$ может оказаться неинтегрируемой. Например, для характеристической функции $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ промежутка $[-1, 1]$ преобразованием Фурье будет функция $\hat{f}(\omega) = 2(\sin\omega)/\omega$. Хорошо известно, что она не является абсолютно интегрируемой на $\mathbf{R}$ (для нее существует только условно сходящийся несобственный интеграл Римана). Из свойства 1 преобразования Фурье (см. ниже) следует, что причина неинтегрируемости $\hat{f}(\omega)$ заключается в разрывности исходной функции $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

Для того чтобы обойти эту трудность с неинтегрируемостью $\hat{f}(\omega)$, обычно используют несобственные интегралы, т. е. полагают:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega = \lim_{a,b\to+\infty} \int_{-a}^{b} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega.$$

Главное значение $V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ несобственного интеграла получается, когда $a = b \to \infty$.

Обратным преобразованием Фурье называется выражение (4), в котором интеграл понимается как несобственный в смысле главного значения.

Хорошо известно, что равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega \tag{5}$$

имеет место в точке $x \in \mathbf{R}$, если $f(x)$ удовлетворяет в этой точке условию Дини, а интеграл справа понимается в смысле главного значения. Приведем некоторые достаточные условия для обращения преобразования Фурье:

- если функции $f(x)$ и $\hat{f}(\omega)$ абсолютно интегрируемы, то равенство (5) имеет место в любой точке x, где $f(x)$ непрерывна;
- если $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ непрерывна и кусочно дифференцируема на $\mathbf{R}$, то имеет место формула (5) обращения преобразования Фурье.

Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой на $\mathbf{R}$, если она дифференцируема всюду, кроме дискретного множества точек, в каждой из которых она имеет односторонние производные.

1.3.2. Преобразование Фурье в $L^2(\mathbf{R})$

Как уже отмечалось, преобразование Фурье F определено формулой (3) для функций из $L^1(\mathbf{R})$, но значения $F[f]$ этого оператора могут не принадлежать $L^1(\mathbf{R})$. Можно решить эту проблему, обратившись к гильбертову пространству $L^2(\mathbf{R})$ функций, интегрируемых с квадратом на $\mathbf{R}$. При этом мы получаем все преимущества, связанные с существованием на $L^2(\mathbf{R})$ скалярного произведения.

Для функций, интегрируемых с квадратом, интеграл (3) может не существовать. Однако можно определить преобразование Фурье как оператора $F : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$. Это делается по следующей схеме. Сначала определяется обычным образом преобразование Фурье на некотором всюду плотном подпространстве S из $L^2(\mathbf{R})$. Затем показывается, что оператор F на этом подпространстве S является непрерывным. Наконец, преобразование Фурье $F : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ определя-

ется как продолжение по непрерывности с подпространства S на все пространство $L^2(\mathbf{R})$. В качестве подпространства $S \subset L^2(\mathbf{R})$ обычно берут пространство быстро убывающих функций. Нам пока достаточно в качестве S взять пересечение $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ пространств $L^1(\mathbf{R})$ и $L^2(\mathbf{R})$.

Возможность продолжения оператора $F : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ на $L^2(\mathbf{R})$ основывается на следующей теореме.

Теорема 1 (формула Планшереля). *Пусть $f, g \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Тогда $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbf{R})$ и имеет место равенство:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega, \tag{6}$$

т. е. $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) / 2\pi$.

Из данной теоремы следует, что оператор $F : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ является ограниченным и

$$\|F[f]\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2. \tag{7}$$

Поскольку пространство $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ всюду плотно в $L^2(\mathbf{R})$, то F единственным образом продолжается на все пространство $L^2(\mathbf{R})$ с сохранением нормы. Продолжение оператора F на $L^2(\mathbf{R})$ строится следующим образом. Пусть $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$. Тогда функция $f_n(x)$, равная $f(x)$ при $|x| < n$ и равная нулю при остальных x, лежит в пространстве $L^1(\mathbf{R})$. Поэтому определено ее преобразование Фурье $\hat{f}_n(\omega)$. Последовательность $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ фундаментальна в $L^2(\mathbf{R})$ и, следовательно, существует единственный предел $F[f] = \lim \hat{f}_n(\omega)$ в пространстве $L^2(\mathbf{R})$. Он и называется преобразованием Фурье функции $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$.

Из теоремы 3 следует, что преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $L^2(\mathbf{R})$ на $L^2(\mathbf{R})$. В частности, для любой функции $g \in L^2(\mathbf{R})$ определено обратное преобразование Фурье $F^{-1}[g]$.

Теорема 2 (Планшереля). *Преобразование Фурье*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F : L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$$

продолжается до унитарного оператора пространства $L^2(\mathbf{R})$. Обращение F^{-1} преобразования Фурье на $L^2(\mathbf{R})$ можно получить, полагая:

$$F^{-1}[\hat{f}] = \frac{1}{2\pi} F[\hat{f}](-x).$$

Интересно, что в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ существует ортогональный базис, в котором оператор $F : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ диагонализируется. Это хорошо известный базис функций Эрмита. Напомним его построение. Известно, что функция Гаусса $f(x) = e^{-x^2/2}$ является собственной функцией для преобразования Фурье:

$$F[e^{-x^2/2}] = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}. \tag{8}$$

Искомый базис функций Эрмита можно построить из системы функций

$$e^{-x^2/2}, \quad xe^{-x^2/2}, \quad x^2e^{-x^2/2}, \quad \ldots, \quad x^ne^{-x^2/2}, \ \ldots$$

обычным процессом ортогонализации. В результате получаются функции вида $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, где $H_n(x)$ – многочлены Эрмита степени n. Они могут быть найдены по формуле:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Приведем в качестве примеров несколько первых многочленов Эрмита, $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$.

Хорошо известно (см., например, [КФ]), что система функций Эрмита $\{\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ образует ортогональный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Кроме того, эти функции являются собственными для преобразования Фурье:

$$F[\varphi_n] = c_n\varphi_n(\omega).$$

Коэффициенты c_n удовлетворяют условию $c_n^4 = (2\pi)^2$, т. е. $c_n = \pm\sqrt{2\pi}, \pm i\sqrt{2\pi}$. Можно показать, что эти коэффициенты будут чередоваться в следующем порядке: $\sqrt{2\pi},\ -i\sqrt{2\pi},\ -\sqrt{2\pi},\ i\sqrt{2\pi}$.

1.3.3. Свойства преобразований Фурье

Свойство 1. *Если $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, то $\hat{f}(\omega)$ является ограниченной непрерывной функцией на $\mathbf{R}$, причем*

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| \le \|f\|_1 \quad \text{и} \quad \hat{f}(\omega) \to 0 \quad \text{при } \omega \to \infty. \tag{9}$$

Свойство 2. *Если функция $f(x)$ дифференцируема n раз и $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L^1(\mathbf{R})$, то*

$$F[f^{(n)}] = (i\omega)^n F[f]. \tag{10}$$

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема n раз и $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L^1(\mathbf{R})$, то существует число $M \ge 0$, такое, что*

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| \le \frac{M}{(1+|\omega|)^n} \qquad \text{и} \qquad |\omega|^n\left|\hat{f}(\omega)\right| \to 0 \quad \text{при } \omega \to \infty.$$

Свойство 3. *Если $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, то $\hat{f}(\omega)$ дифференцируема n раз и*

$$(F[f])^{(n)} = (-i)^n F[x^n f(x)]. \tag{11}$$

Вывод. Чем выше степень гладкости функции $f(x)$, тем быстрее убывает ее преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$. Чем быстрее убывает на бесконечности функция $f(x)$, тем выше порядок дифференцируемости $\hat{f}(\omega)$.

Свойство 4. Изменение масштаба. *Если $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, то для любого числа $a \ne 0$:*

$$F[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \tag{12}$$

В частности,

$$F[f(-x)] = \hat{f}(-\omega). \tag{12.1}$$

Свойство 5. Сдвиг в пространстве и в области частот. *Если* $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$, *то для любых чисел* b *и* τ *имеют место равенства*

$$F[f(x-b)] = e^{-i\omega b}\hat{f}(\omega), \quad F[e^{ix\tau}f(x)] = \hat{f}(\omega-\tau). \tag{13}$$

Свойство 6. Преобразование Фурье и свертка:

$$F[f*g] = F[f]\cdot F[g], \quad F[f\cdot g] = \frac{1}{2\pi}F[f]*F[g]. \tag{14}$$

Свойство 7. Преобразование Фурье корреляции. *Если* $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, *то*

$$F[K_{fg}](\omega) = \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}. \tag{15}$$

Замечание 1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются некоррелированными, если $K_{fg}(\tau) = 0$. В этом случае и $F[K_{fg}](\omega) = \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} = 0$. Последнее равенство означает, что частотные спектры (носители функций $\hat{f}(\omega)$ и $\hat{g}(\omega)$) не пересекаются. Верно и обратное: функции с непересекающимися частотными спектрами являются некоррелированными. В случае $g(x) = f(x)$ функция $K_f(\tau) = K_{ff}(\tau)$ называется *автокорреляционной*. Из свойства 7 следует, что преобразование Фурье автокорреляционной функции $K_f(\tau)$ есть энергетический спектр $|\hat{f}(\omega)|^2$ сигнала $f(x)$.

Свойство 8. *Если* $f(x), g(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, *то* $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbf{R})$, *и имеет место равенство:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega, \tag{16}$$

т. е. $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g})/2\pi$, *в частности,* $\|\hat{f}(\omega)\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Свойство 9. Прямое и обратное преобразования Фурье. *Если* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, *то*

$$F^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi}F[f(-x)], \qquad F[F[f]](x) = 2\pi f(-x). \tag{17}$$

Свойство 10. Преобразования Фурье и сопряжение. *Если* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, *то*

$$\overline{F[f](\omega)} = F[\overline{f}](-\omega). \tag{17-1}$$

В частности, если функция $f(x)$ *вещественная, то*

$$\overline{F[f](\omega)} = F[f](-\omega). \tag{17-2}$$

Конец ознакомительного фрагмента.
Приобрести книгу можно
в интернет-магазине
«Электронный универс»
e-Univers.ru