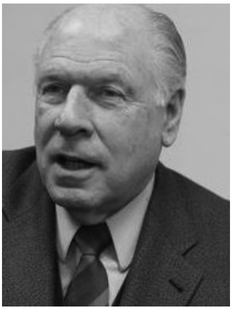
Оглавление

Об авторах



Альфред Позаментье — в настоящее время декан педагогического факультета и профессор математического образования в колледже Мерси, Нью-Йорк, в прошлом почетный преподаватель Городского технологического колледжа Городского университета Нью-Йорка. Он почетный профессор математического образования Городского университета Нью-Йорка и бывший декан педагогического факультета, где проработал 40 лет. Позаментье автор и соавтор более 55 книг по математике для преподавателей, учащихся средних и начальных школ, а также широкого круга читателей. Статьи д-ра Позаментье по вопросам образования можно часто встретить в газетах и журналах.

После получения степени бакалавра в области математики в Хантер-колледже Городского университета Нью-Йорка он получил должность преподавателя математики в средней школе Теодора Рузвельта (в Бронксе, Нью-Йорк), где сосредоточился на развитии навыков учащихся, связанных с решением задач, и одновременно на расширении традиционной программы обучения. За шесть лет работы благодаря его усилиям в школе были созданы математические группы (младшего и старшего уровней). Позаментье продолжает работать с учителями математики и методистами, помогая им повышать эффективность преподавания.

Сразу после прихода на математический факультет Городского колледжа в 1970 г. (после получения там степени магистра в 1966 г.) он занялся созданием курса повышения квалификации без отрыва работы для учителей математики средних школ, включавшего такие специальные области, как занимательная математика и решение задач в математике. Как декан педагогического факультета Городского колледжа, Позаментье на протяжении 10 лет всесторонне занимался вопросами образования. За это время ему удалось поднять рейтинг факультета в штате Нью-Йорк до высшего уровня с идеальной оценкой Национального совета по аккредитации подготовки учителей (NCATE) в 2009 г.

В 2014 г. д-р Позаментье повторил свое достижение, подняв педагогический факультет Колледжа Мерси до статуса единственного в США, получившего идеальную первоначальную аккредитацию одновременно и в NCATE, и в Совете по аккредитации подготовки преподавателей (CAEP).

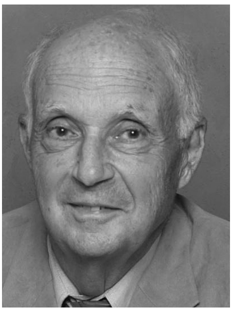
В 1973 г. д-р Позаментье получил степень доктора философии в Фордэмском университете (Нью-Йорк) в области математического образования, и с той поры заслужил профессиональное уважение не только в США, но и в Европе. Он является приглашенным профессором университетов в Австрии, Англии, Германии, Чешской Республике и Польше, а в Венском университете — профессором по программе Фулбрайта (1990 г.).

В 1989 г. д-р Позаментье был удостоен звания «почетный член» в Университете Саут-Бэнк (Лондон, Англия). В знак признания его достижений в области преподавания Ассоциация выпускников Городского колледжа называла его «преподавателем года» в 1994 и 2009 гг. В Нью-Йорке в его честь был устроен праздник 1 мая 1994 г. В 1994 г. он получил «Большую медаль почета» от Республики Австрия, а в 1999 г. с одобрения парламента президент Австрии присвоил ему звание «Профессор университета Австрии». В 2003 г. он получил звание Ehrenbürger (Почетный член) Венского технологического университета, а в 2004 г. — Почетный крест за достижения в области искусства и науки первого класса. В 2005 г. его имя увековечили и Зале славы выпускников Хантер-колледжа, а в 2006 г. Ассоциация выпускников Городского колледжа вручила ему престижную медаль Таунсенда Харриса. Его имя с 2009 г. присутствует в Зале славы преподавателей математики штата Нью-Йорк, в 2010 г. он получил в Берлине почетную премию Кристиана Петера Бойта.

Д-р Позаментье занимает целый ряд руководящих должностей в сфере преподавания математики на местном уровне. Он является членом Полномочной комиссии при комиссаре по вопросам образования в штате Нью-Йорк и Комитета по стандартам математического образования, а также входит в консультативный совет канцлеров школ г. Нью-Йорк.

Д-р Позаментье — один из ведущих обозревателей по вопросам образования и продолжает активно искать пути повышения интереса к математике как у учителей и учащихся, так и у широкой публики. Это ясно видно по его книгам: Numbers: Their Tales, Types and Treasures (Prometheus, 2015), Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units, 9th Ed. (Pearson, 2015), Mathematical Curiosities: A Treasure Trove of Unexpected Entertainments (Prometheus, 2014), Geometry: Its Elements and Structure (Dover, 2014), Magnificent Mistakes in Mathematics (Prometheus Books, 2013), 100 Commonly Asked Questions in Math Class: Answers that Promote Mathematical Understanding, Grades 6–12 (Corwin, 2013), What successful

Math Teacher Do: Grades 6–12 (Corwin, 2006, 2013), The Secrets of Triangles: A Mathematical Journey (Prometheus Books, 2012), The Glorious Golden Ratio (Prometheus Books, 2012), The Art of Motivating Students for Mathematics Instruction (McGraw-Hill, 2011), The Pythagorean Theorem: Its Power and Glory (Prometheus, 2010), Mathematical Amazements and Surprises: Fascinating Figures and Noteworthy Numbers (Prometheus, 2009), Problem Solving in Mathematics: Grades 3–6: Powerful Strategies to Deepen Understanding (Corwin, 2009), Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions, Grades 6–12 (Corwin, 2008), The Fabulous Fibonacci Numbers (Prometheus Books, 2007), Progress in Mathematics, K-9 textbook series (Sadlier-Oxford, 2006–2009), What Successful Math Teacher Do: Grades K-5 (Corwin, 2007), Exemplary Practices for Secondary Math Teachers (ASCD, 2007), 101+ Great Ideas to Introduce Key Concepts in Mathematics (Corwin, 2006), *π,* A Biography of the World's Most Mysterious Number (Prometheus Books, 2004), Math Wonders: To Inspire Teachers and Students (ASCD, 2003), и Math Charmers: Tantalizing Tidbits for the Mind (Prometheus Books, 2003).



Стивен Крулик — почетный профессор математического образования в Университете Темпл в Филадельфии. В университете д-р Крулик отвечает за преддипломную и последипломную подготовку преподавателей математики для 1–12 классов, а также за повышение квалификации преподавателей математики. Он читает разнообразные курсы, в числе которых история математики, методы преподавания математики и обучение методам решения задач.

Последний курс появился как результат интереса к решению задач и логическому рассуждению на уроках математики. Основой этого интереса стало его стремление к тому, чтобы учащиеся понимали красоту и ценность решения задач, а также умели логически рассуждать.

Д-р Крулик получил степень бакалавра в области математики в Бруклинском колледже Городского университета Нью-Йорка, а степень магистра и степень доктора педагогических наук в области математики — в Педагогическом колледже Колумбийского университета. До прихода в Университет Темпл он в течение 15 лет преподавал математику в школах г. Нью-Йорк. В средней школе Лафайетт в Бруклине он организовал ряд курсов для подготовки учащихся к SAT-экзамену с акцентом на освоении методов решения задач вместо механического запоминания алгоритмов.

На общенациональном уровне д-р Крулик входит в состав комитета Национального совета преподавателей математики, отвечающего за разработку Профессиональных стандартов преподавания математики. В 1980 г. он был редактором ежегодника Национального совета под названием «Решение математических задач в школе». На региональном уровне он был президентом Ассоциации преподавателей математики Нью-Джерси, в 1993 г. входил в редакционный совет математического справочника The New Jersey Calculator Handbook и в 1997 г. редактировал монографию Tomorrow's Lessons.

Основная сфера его интереса — обучение методам решения задач и умению логически рассуждать, методические материалы по преподаванию математики, также комплексная оценка математических способностей. Он является автором и соавтором более 30 книг для преподавателей математики, в том числе Roads to Reasoning (классы 1–8) и Problem Driven Math (классы 3–8). Д-р Крулик, помимо прочего, является основным автором задач для серии базовых учебников. Д-р Крулик часто выступает со статьями по математическому образованию в профессиональных журналах. Он консультировал и проводил семинары в школьных округах США и Канады, а также выступал с лекциями в Вене (Австрия), Будапеште (Венгрия), Аделаиде (Австралия) и Сан-Хуане (Пуэрто-Рико). Д-ра Крулика часто приглашают на национальные и международные совещания, где он концентрирует внимание на формировании у всех учащихся умения логически рассуждать и решать задачи как на уроках математики, так и в жизни.

В 2007 г. в Университете Темпл ему вручили премию «Выдающийся учитель». В 2011 г. Национальный совет преподавателей математики представил его к почетной премии за «Выдающиеся заслуги в сфере математического образования».

Введение

С начала 1980-х гг. решение задач, логическая аргументация и критическое мышление стали неотъемлемой частью программы по математике в США, а потом и в большей части мира. Еще в 1977 г. Национальный совет учителей математики заявил, «обучение решению задач — это главная причина изучения математики». В конце концов, что толку от понимания, как делать то или другое, если не знаешь, *когда* делать это. Движение под флагом приобретения навыков решения задач набирает силу и распространяется все больше на программу изучения математики. По мере углубления этого процесса он начинает переключаться и на решение задач в повседневной жизни. Каждый день люди сталкиваются с задачами, требующими решения. Они могут варьировать от очень простых, например, что надеть сегодня, до очень сложных. Даже то, что *кажется* простым, взять хотя бы переход улицы, может оказаться сложным и потребовать обдумывания, если мы приезжаем в страну, где уличное движение организовано иначе.

Прежде чем говорить о решении задач, нужно определиться с тем, что составляет задачу. Задача — это ситуация, в которой необходимо принять решение, но путь к этому решению заранее неизвестен. Запомните эти слова: «но путь к этому решению заранее неизвестен». Когда многие из нас ходили в школу, задачи, которые нас учили решать, нередко были «типовыми». Иначе говоря, «задачи, связанные с возрастом» решались одним путем, «задачи на движение» — другим, а еще были «задачи на смешивание», «задачи, связанные с измерением объема жидкости» и т. д., которые решались своими способами. Фактически, как только мы осваивали определенный метод, соответствующие задачи переставали быть задачами, требующими решения. Все, что нужно было сделать, это определить тип задачи и применить подходящий автоматический процесс.

История математических достижений полна прорывов, реакция на которые нередко выражается словами «мне и в голову не приходило, что можно использовать такой подход». Даже сегодня, когда представляют хорошее или изящное решение задачи, многие реагируют именно так. Решение задач — это попытка сделать такие необычные решения частью досягаемой базы знаний.

Решение задач сегодня в значительной мере основывается на эвристической модели, описанной Джорджем Пойа в книге «Как решить задачу» (How to Solve It), которая была издана в 1945 г. и до сих пор пользуется спросом. В этой книге Пойа представил такой четырехэтапный план решения задач:

1. Уяснение сути задачи.
2. Составление плана.
3. Выполнение плана.
4. Оценка найденного решения.

Большинство нынешних моделей решения задач строятся именно на этой четырехэтапной эвристической модели. План обычно включает в себя: 1) чтение условий задачи; 2) выбор подходящей стратегии, 3) решение задачи и 4) оценка найденного решения или его осмысление. Ключевым аспектом всего процесса является выбор подходящей стратегии, или определение подхода к задаче. Наша книга посвящена детальному исследованию именно этого критически важного этапа.

Итак, выбор подходящей стратегии является ключевым аспектом решения задачи. За последние десятилетия разные авторы описали и представили множество стратегий. В основе большинства из них лежат одни и те же идеи. В этой книге рассматриваются 10 наиболее ценных, на наш взгляд, стратегий решения задач. Каждой из них посвящена отдельная глава. При представлении задачи мы пытаемся сначала предположить, каким будет наиболее очевидный или распространенный подход. Чаще всего он приводит к правильному ответу. Вместе с тем самый употребительный подход нередко требует довольно запутанного математического аппарата, сложных вычислений, а в некоторых случаях дает неправильный ответ.

Затем мы предлагаем более изящное, или образцовое решение, показывающее, как рассматриваемая стратегия решения задачи приводит к ответу. Обратите внимание на то, что мы разделяем «ответ» и «решение». Решение — это процесс от момента чтения условий задачи до момента получения окончательного ответа и его осмысления. Некоторые говорят, что конкретный ответ — это всего лишь одна из наименее важных частей решения. Да, должно быть, так и есть, но процесс, в результате которого получается ответ, является критической частью решения.

По мере того, как вы будете читать эту книгу (и, мы надеемся, прорабатывать предложенные задачи), учитывайте, что во многих случаях для решения задачи можно использовать несколько стратегий. Например, решение задачи с применением стратегии «обоснованное предположение и проверка» обычно требует организации данных в определенном порядке. Когда такое происходит, мы переносим задачу в более подходящую, на наш взгляд, главу.

Каждую главу в этой книге мы начинаем с описания конкретной стратегии, показывающего, как ее можно использовать в каждодневных ситуациях, а затем приводим примеры применения в математике. После этого мы представляем ряд задач, которые лучше всего решаются с помощью именно этой стратегии. Каждая задача — это попытка проиллюстрировать применение конкретной стратегии. В число стратегий, которые мы собираемся рассмотреть, входят:

1. Логическое рассуждение.
2. Распознавание закономерности.
3. Действие от обратного.
4. Принятие другой точки зрения.
5. Анализ экстремальных ситуаций.
6. Решение более простой аналогичной задачи.
7. Организация данных.
8. Схематичное изображение, или визуальное представление.
9. Учет всех возможностей.
10. Обоснованное предположение и проверка.

Как мы уже говорили, редко когда задачу можно решить единственным способом. Решение, которое мы демонстрируем, представляет собой всего лишь один иллюстративный пример. Мы предлагаем читателю попытаться найти другие решения, возможно, более интересные и необычные. Если это вам удастся, мы скажем, что вы молодец! Кроме того, в некоторых случаях, когда доступно несколько стратегий, можно с разным успехом использовать их сочетания.

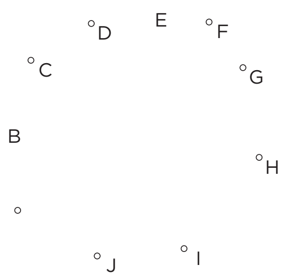
Чтобы показать, как можно подойти к задаче (и решить ее) с использованием различных стратегий, мы обычно даем несколько решений.

ЗАДАЧА

В комнате, где находятся 10 человек, все поздоровались друг с другом, однократно пожав руку. Сколько всего было рукопожатий?

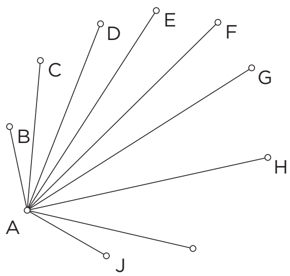
РЕШЕНИЕ 1

Воспользуемся **стратегией визуального представления** и построим схему. В ней 10 точек (которые расположены так, что никакие три из них не находятся на одной прямой), представляющих 10 людей. Начнем с человека, представленного точкой *A*.



Мы соединяем точку *A* с каждой из остальных девяти точек и, таким образом, обозначаем первые девять рукопожатий.

Далее, из точки *B* исходят восемь дополнительных рукопожатий (поскольку *A* уже поздоровался с *B*, и линия *AB* уже построена). Аналогичным образом из точки *C* можно провести только семь линий к другим точкам (линии *AC* и *BC* уже построены), из точки *D* — шесть дополнительных линий и т. д. Когда мы дойдем до точки I, останется только одно доступное рукопожатие, а именно I с J, поскольку I уже поздоровался с A, B, C, D, E, F, G и H. Таким образом, сумма рукопожатий составит $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$. Это то же самое, что получается при использовании формулы для суммы первых n натуральных чисел: $\frac{n(n-1)}{2}$, где $n \geq 2$. (Обратите внимание на то, что последний рисунок — это десятиугольник, у которого построены все диагонали.)



РЕШЕНИЕ 2

Для решения задачи можно использовать **стратегию учета всех возможностей**. Возьмем показанную ниже сетку, в которую включены 10 человек, $A, B, C, \ldots, H, I, J$, пожимающие друг другу руки. Диагональ с символами X показывает, что люди не могут пожимать руки самим себе.

Оставшиеся клетки показывают двойное число всех других рукопожатий (т. е. A пожимает руку B, а B пожимает руку A). Таким образом, нам нужно взять общее количество клеток (10^2), вычесть из него количество клеток на диагонали (10) и разделить результат на два. В результате мы получаем: $\frac{100-10}{2} = 45$.

	A	B	c	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

В общем случае для сетки размером $n \times n$ результат будет равен $\frac{n^2 - n}{2}$, что эквивалентно формуле $\frac{n(n-1)}{2}$, приведенной выше.

РЕШЕНИЕ 3

Попробуем теперь решить задачу с помощью **принятия другой точки зрения**. Возьмем комнату, где находятся 10 человек, каждый из которых пожимает руку остальным девяти. Можно предположить, что число рукопожатий будет равным 10×9, или 90. Однако нам нужно разделить это число на два, чтобы устранить дублирование (поскольку рукопожатие *A* с *B* можно рассматривать как рукопожатие *B* с *A*), и мы получаем $\frac{90}{2} = 45$.

РЕШЕНИЕ 4

Теперь подойдем к решению задачи через **распознавание закономерности**. В таблице, представленной ниже, мы перечисляем количество рукопожатий в комнате по мере увеличения числа присутствующих.

Количество людей в комнате	**Количество рукопожатий на дополнительного человека**	**Суммарное количество рукопожатий в комнате**
1	0	0
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45

В третьей колонке, где приведено суммарное количество рукопожатий, представлена последовательность чисел, называемых *треугольными*, разность между которыми возрастает каждый раз на единицу. Таким образом, можно просто заполнять таблицу до тех пор, пока мы не достигнем суммы, соответствующей 10 человекам. Можно заметить следующую закономерность: результат в каждой строке равен половине произведения количества людей в этой строке на количество людей в предыдущей строке.

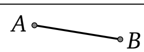
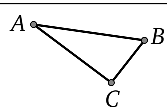
РЕШЕНИЕ 5

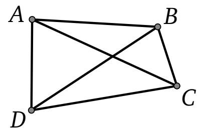
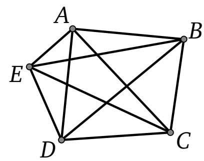
Посмотрим теперь, как задача решается с помощью **стратегии организации данных**. В таблице, представленной ниже, показан номер человека, входящего в комнату, и количество рукопожатий, которыми он обменивается, с учетом того, что присутствующие уже поздоровались друг с другом, а вошедший не пожимает руку сам себе. Итак, человек номер 10 пожимает руку девятерым, человек номер 9 пожимает руку восьмерым и т. д. Наконец, мы доходим до человека номер 2, который пожимает руку только одному, и человека номер 1, которому здороваться не с кем. И вновь мы получаем сумму, равную 45.

Организованные данные										
Номер человека	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Количество рукопожатий	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

РЕШЕНИЕ 6

Можно также объединить **решение более простой задачи** с **визуальным представлением (схематичным изображением)**, **организацией данных** и **распознаванием закономерности**. Начнем с рассмотрения одного человека, представленного одной точкой. Здесь, очевидно, мы имеем ноль рукопожатий. Затем увеличим количество людей до двух, представленных двумя точками. В этом случае у нас будет одно рукопожатие. Увеличим количество людей до трех. Теперь получим три рукопожатия. Продолжим увеличивать количество людей до четырех, пяти и т. д.

Количество людей	**Количество рукопожатий**	**Визуальное представление**
1	0	
2	1	
3	3	

Количество людей	**Количество рукопожатий**	**Визуальное представление**
4	6	
5	10	

Задача становится геометрической, где ответом является количество сторон и диагоналей «n-угольника». Таким образом, для 10 человек мы получаем 10-угольник, у которого число сторон $n = 10$. Для определения количества диагоналей можно использовать формулу:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}, \text{где } n > 3.$$

$$d = \frac{10 \times 7}{2} = 35.$$

Итак, количество рукопожатий = 10 + 35 = 45.

РЕШЕНИЕ 7

Конечно, некоторые читатели уже видят, что эту задачу можно легко решить с помощью комбинаторной формулы для определения числа сочетаний из 10 элементов, которые берутся по два за раз.

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45.$$

Впрочем, это решение, хотя оно эффективно, кратко и правильно, практически не требует математического мышления (если не считать применения формулы) и обходится без какого-либо подхода к решению задач. Несмотря на то, что такое решение имеет право на существование, только другие решения позволяют продемонстрировать различные стратегии, а именно с этой целью мы и привели данную задачу.

Мы предполагаем, что вы будете читать эту книгу, решать задачи и, таким образом, знакомиться со стратегиями. Это позволит вам составить собственный набор стратегий решения задач, который станет базовым в решении ваших задач. У тех, для кого решение задач является новым делом, мы надеемся пробудить интерес и подтолкнуть к дальнейшему изучению этого полезного аспекта математики. Те же, кто уже интересуется критическим мышлением и решением задач, найдут здесь новые, занятные и нестандартные задачи, способные захватить внимание. Приятного вам чтения!

Глава 1
Логическое рассуждение

Выделение целой главы такой стратегии, как логическое рассуждение, может показаться излишним. В самом деле, без логического мышления, хотя оно и используется для решения задач, немыслимо применение ни одной стратегии. Для многих людей решение задач является практически синонимом логического рассуждения, или логического мышления. Так зачем же тогда нужна эта глава, и зачем вообще выделять эту стратегию?

В повседневной жизни мы прибегаем к логическому рассуждению, когда спорим о чем-нибудь с кем-то. И это понятно — во время спора мы рассчитываем на то, что определенные доводы будут вызывать конкретную реакцию. На работе мы с помощью логической цепочки доводов добиваемся изменения того или иного производственного процесса. Мы логически выстраиваем цепочку утверждений в надежде на получение желаемого вывода. В суде, например, адвокаты используют логическое рассуждение, чтобы представить дело в нужном им свете. Если мы назначаем кому-то встречу через два дня, а сегодня суббота, то логика подсказывает нам, что встреча должна состояться в понедельник.