Оглавление

Введение

Задачи с параметрами представляют наибольшую трудность для учащихся при сдаче ЕГЭ профильного уровня. Умение выполнять такие задачи свидетельствует о том, что выпускник хорошо подготовлен по различным разделам школьного курса математики: знает стандартные алгоритмы решения математических задач без параметров, умеет грамотно анализировать задачу, применять на практике основные методы решения. В таблице ниже указан средний процент решаемости этого задания участниками экзамена в период с 2021 по 2024 г.

<table>
<tr><th rowspan="2">Баллы</th><th colspan="4">Процент решаемости задания 18, %</th></tr>
<tr><th>2021 г.</th><th>2022 г.</th><th>2023 г.</th><th>2024 г.</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">Средний процент решаемости 2,0 %</td><td>19,3</td><td>30,2</td><td rowspan="4">Средний процент решаемости 5,2 %</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4,1</td><td>11,6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0,27</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0,69</td><td>1,7</td></tr>
</table>

Процент выпускников, приступивших на ЕГЭ к выполнению задачи с параметром, с каждым годом повышается, как и процент успешного её выполнения.

Наибольшие затруднения, с которыми сталкиваются выпускники при решении заданий этого типа, — это непонимание логики задачи, неправильный анализ условия, неумение делать необходимые обоснования, строить графики и использовать геометрические интерпретации.

При проверке этого задания баллы выставляются в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но — в ответ включены также и одно-два неверных значения (исключено одно-два верных значения); — решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: — взаимного расположения фигур на плоскости (прямых, окружностей и др.); — совокупности уравнений (неравенств) с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Параметр в задаче считается фиксированным числом, обозначенным буквой. Допустимыми значениями параметра в задаче считаются все те значения, при которых выражения, входящие в задачу, имеют смысл.

Например, в уравнении $\sqrt{x^2 - x - 2} = a$ допустимым является любое действительное значение a, а в неравенстве $\dfrac{1}{\sqrt{x-a}} + \dfrac{2}{a} \geqslant 3a$ допустимые значения параметра a задаются условиями $\begin{cases} x - a > 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$

Задачи с параметрами условно можно разделить на две большие группы. К первой группе можно отнести задачи, в которых надо решить неравенство или уравнение при всех допустимых значениях параметра. Ко второй группе относятся задания, в которых надо найти лишь те значения параметра, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Решить уравнение (неравенство) с параметрами — значит указать, при каких допустимых значениях параметров существуют решения и каковы они.

Среди множества задач с параметрами выделим один класс задач, связанный с количеством решений уравнения (неравенства), системы уравнений (неравенств).

Задачи такого вида обычно формулируют в следующем виде: *найдите все значения параметра (параметров), при которых уравнение (неравенство, система) имеет конечное множество решений (ровно одно, ровно два и т. д.); имеет бесконечное множество решений (интервал, отрезок, луч, прямая, часть плоскости — область); не имеет решений.*

В пособии рассматриваются основные подходы к решению задач с параметрами: алгебраический, функциональный, функционально-графический и геометрический. Задачи классифицированы по методам их решения.

Пособие содержит упражнения для самостоятельной работы, к каждому из которых дан ответ, а к некоторым — указания к решению.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать на адрес электронной почты издательства `legionrus@legionrus.com`.

§ 1. Алгебраические методы решения

В данном параграфе задачи (уравнения, неравенства, системы) классифицированы по их виду. Здесь рассмотрены следующие методы: метод сведения задачи к равносильной, перебор различных значений параметра, замена переменной, выявление необходимых и достаточных условий или необходимых условий.

1.1. Задачи вида $\boldsymbol{a \cdot x \vee b}$

Рассмотрим задачи вида $a \cdot x \vee b$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, и системы линейных уравнений.

Уравнения

Уравнение вида $a \cdot x = b$ с переменной x имеет единственное решение при $a \neq 0$; имеет бесконечное множество решений при $a = 0$, $b = 0$; не имеет решений при $a = 0$, $b \neq 0$.

Пример 1 (МГУ, 2002). При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b + \sqrt{3})$$

не имеет корней?

Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x.

$$(b^4 - 9)x = b^3 + (1 + \sqrt{3})b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3}.$$

Последнее уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b^4 - 9 = 0, \\ b^3 + (1 + \sqrt{3})b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$.

Подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: $b = \sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $(a^2 - a)x = a - 1$ при всех значениях параметра a.

Решение. Так как $a^2 - a = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$, то рассмотрим три случая.

1. Пусть $a = 0$, тогда данное уравнение обращается в неверное числовое равенство $0 = -1$. Значит, при $a = 0$ уравнение не имеет решений.

2. Подставим $a = 1$ в исходное уравнение, получим верное числовое равенство $0 = 0$. Следовательно, при $a = 1$ корнем уравнения является любое действительное число.

3. Пусть $a \neq 0$ и $a \neq 1$, тогда из данного уравнения находим единственный корень $x = \dfrac{a-1}{a(a-1)}$, или $x = \dfrac{1}{a}$.

Ответ: если $a = 0$, то корней нет; если $a = 1$, то x — любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x = \dfrac{1}{a}$.

Неравенства

Множество решений неравенства вида $a \cdot x > b$ с переменной x представляет собой:

– промежуток $\left(\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$ при $a > 0$;

– промежуток $\left(-\infty; \dfrac{b}{a}\right)$ при $a < 0$;

– промежуток $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0$, $b < 0$;

– пустое множество (не имеет решений) при $a = 0$, $b \geqslant 0$.

Пример 3. При каких значениях параметра a решением неравенства $ax - 6 \leqslant 2a - 3x$ является любое действительное число?

Решение. Приведём данное неравенство к виду $(a+3)x \leqslant 2(a+3)$ и рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $a + 3 > 0$, тогда получаем $x \leqslant 2$.

2. При $a + 3 < 0$ имеем $x \geqslant 2$.

3. Если $a + 3 = 0$, т. е. $a = -3$, то числовое неравенство $0 \geqslant 0$ выполняется при всех значениях $x \in R$.

Ответ: $a = -3$.

Пример 4. Решить неравенство $(p^2 + p)x + 2 > 6x + p$ с параметром p.

Решение. Приведём данное неравенство к следующему виду:

$$(p^2 + p - 6)x > p - 2. \quad (*)$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $p^2 + p - 6 = 0$, т. е. $p = -3$ или $p = 2$. Если $p = -3$, то неравенство (*) обращается в верное числовое неравенство $0 > -5$. Значит, при $p = -3$ решением неравенства является любое действительное число. Если $p = 2$, то неравенство (*) обращается в неверное числовое неравенство $0 > 0$. Значит, при $p = 2$ неравенство не имеет решений.

2. Если $p^2 + p - 6 > 0$, то получаем значения $p \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Тогда из неравенства (*) находим решения $x > \dfrac{p-2}{p^2+p-6}$ или после сокращения $x > \dfrac{1}{p+3}$.

3. Если $p^2 + p - 6 < 0$, то получаем значения $p \in (-3; 2)$. Тогда из неравенства (*) находим решения $x < \dfrac{1}{p+3}$.

Ответ: если $p = 2$, то решений нет; если $p = -3$, то x — любое действительное число; если $p \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, то $x > \dfrac{1}{p+3}$; если $p \in (-3; 2)$, то $x < \dfrac{1}{p+3}$.

Системы уравнений

Пусть коэффициенты уравнений системы
$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$
отличны от нуля. Тогда

1) чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно выполнение условия
$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}; \tag{1.1}$$

2) чтобы система имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно выполнение условия
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}; \tag{1.2}$$

3) чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}. \qquad (1.3)$$

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.

Пример 5. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (a-2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a+1)y = 3. \end{cases}$$

Решение. Определим значения параметра a, при которых

$$\frac{a-2}{2} = \frac{27}{a+1}.$$

Равенство возможно, если $a^2 - a - 56 = 0$ $(a+1 \neq 0)$, т. е. при $a = 8$ или $a = -7$.

Если $a = 8$ или $a = -7$, то решений нет, так как $\dfrac{a-2}{2} = \dfrac{27}{a+1} \neq \dfrac{3}{2}$.

Пусть $a \neq 8$ и $a \neq -7$. Умножим первое уравнение системы на -2, а второе уравнение на $a-2$. Складывая левые и правые части уравнений, найдём из полученного линейного уравнения $y = \dfrac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}$. Аналогично найдём $x = \dfrac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}$. Следовательно, система при $a \neq 8$ и $a \neq -7$ имеет единственное решение.

Ответ: если $a = -7$ или $a = 8$, то решений нет; если $a \neq -7$ и $a \neq 8$, то $\left(\dfrac{9(a-17)}{2(a-8)(a+7)}; \dfrac{3(a-5)}{(a-8)(a+7)}\right)$.

В следующей задаче используется приём обратной задачи.

Пусть $A = A_1 + A_2$ — множество допустимых значений параметра a, входящего в уравнение (неравенство, систему), причём A_1 — множество значений параметра, при которых задача имеет решение, A_2 — множество значений параметра, при которых задача не имеет решения. Если найдены множества A и A_2, то легко определить множество A_1.

Пример 6 (ЕГЭ, 2015). Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y(y-7) = xy - 5(x+2), \\ x \leqslant 6, \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2} = 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуя первое уравнение системы, получим

$$y^2 - 7y = xy - 5x - 10;$$

$$(y^2 - 5y) - x(y-5) - 2(y-5) = 0;$$

$$(y-5)(y-x-2) = 0.$$

Данная система уравнений равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 5, \\ y = x+2, \end{array}\right. \\ x \leqslant 6, \\ y \neq 2, \\ y = a(x-6). \end{cases}$$

Последняя система равносильна совокупности двух систем (I) и (II).

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y = 5, \\ x \leqslant 6, \\ y = a(x-6). \end{cases}$$

Отсюда $y = 5$, $x = \dfrac{5}{a} + 6$ $(a \neq 0)$. При $a = 0$ система не имеет решений.

Из неравенства $\dfrac{5}{a} + 6 \leqslant 6$ следует, что $a < 0$. Это значит, что при $a < 0$ система (I) имеет решение вида $\left(\dfrac{5}{a} + 6; 5\right)$.

$$(\mathrm{II})\begin{cases} y = x+2, \\ x \leqslant 6, \\ y \neq 2, \\ y = a(x-6). \end{cases}$$

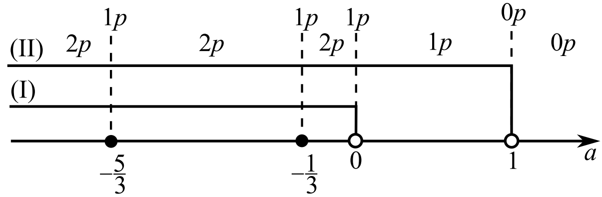

Рис. 1

Отсюда $x = \dfrac{2+6a}{a-1}$, $y = \dfrac{8a}{a-1}$ $(a \neq 1)$. При $a = 1$ система не имеет решений. Из ограничений $\dfrac{2+6a}{a-1} \leqslant 6$ и $\dfrac{8a}{a-1} \neq 2$ следует, что $a < 1$ и $a \neq -\dfrac{1}{3}$. Это значит, что при $a < 1$ и $a \neq -\dfrac{1}{3}$ система (II) имеет решение вида $\left(\dfrac{2+6a}{a-1}; \dfrac{8a}{a-1}\right)$. Решения систем (I) и (II) совпадают, если одновременно выполнены равенства $\dfrac{2+6a}{a-1} = \dfrac{5}{a} + 6$ и $\dfrac{8a}{a-1} = 5$. Отсюда $a = -\dfrac{5}{3}$. Используя рисунок 1, записываем ответ.

Ответ: $\left\{-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{1}{3}\right\} \cup [0; 1)$.

Пример 7. Определить, при каких значениях параметра a уравнения $x + ay = 1$ и $ax + y = 2a$ имеют хотя бы одно общее решение.

Решение. Допустимые значения параметра a составляют множество всех действительных чисел. Решим обратную задачу. Найдём значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases}$ не имеет решений. Это возможно (см. условие (1.3)), если $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{1} \neq \dfrac{1}{2a}$. (*)

Из равенства $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{1}$ находим $a = -1$ или $a = 1$ (удовлетворяют условию $a \neq 0$). Для этих значений неравенство в (*) также выполняется. Следовательно, исходная задача выполняется при всех значениях a, отличных от -1 и 1.

Ответ: $a \neq \pm 1$.

1.2. Задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$

Рассмотрим задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, и системы уравнений (неравенств).

• Функция $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ задаёт параболу с вершиной в точке $C(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a}$, $y_{\text{в}} = y(x_{\text{в}})$.

• Функция $y = a(x-m)^2 + n$ $(a \neq 0)$ задаёт параболу с вершиной в точке $C(m; n)$.

Уравнения

Уравнение вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ с переменной x при $a = 0$ приводится к уравнению степени не выше первой; при $a \neq 0$ является квадратным уравнением.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$.

1. Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0) \tag{1.4}$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда $D < 0$, где $D = b^2 - 4ac$.

2. Квадратное уравнение (1.4) имеет

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$;

б) два корня (могут быть кратными) тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$;

в) два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} > 0; \end{cases}$$

г) два отрицательных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} < 0; \end{cases}$$